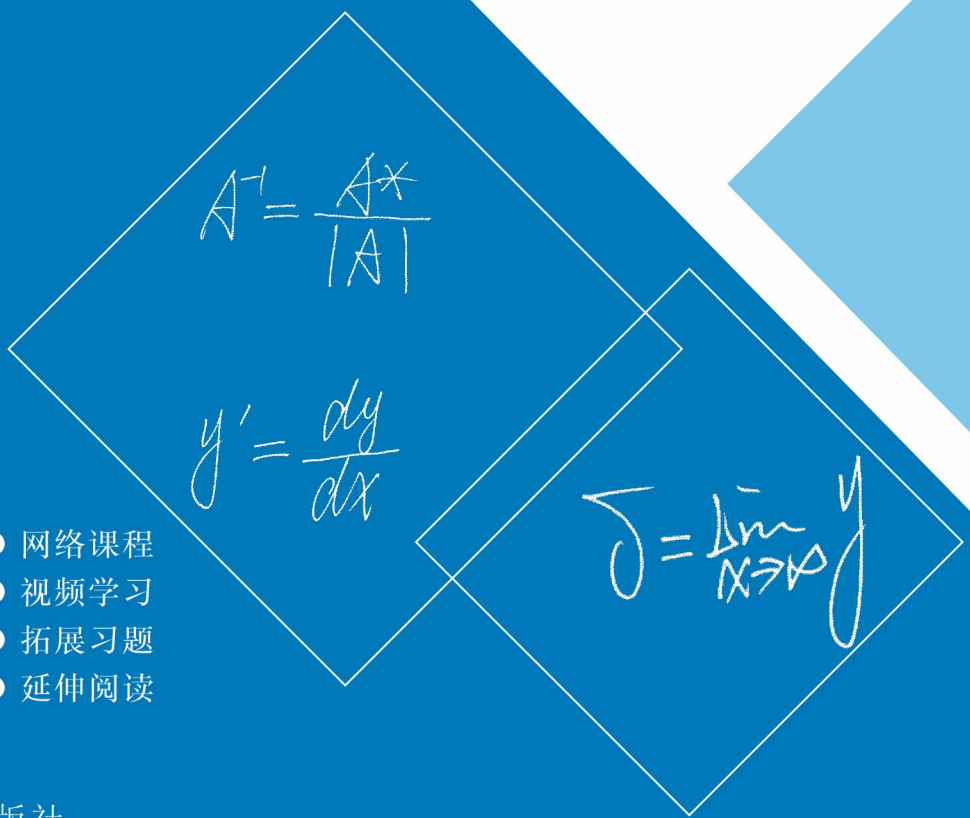
“十四五”职业教育国家规划教材

工科数学

（第六版）

杨　军　盛秀兰　主编



- 网络课程
- 视频学习
- 拓展习题
- 延伸阅读

南京大学出版社

“十四五”职业教育国家规划教材

“十三五”江苏省高等学校重点教材

（编号：2019-1-018）

工科数学

（第六版）

◎主 编 杨 军 盛秀兰

◎主 审 陶书中

南京大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

工科数学 / 杨军，盛秀兰主编. -- 6 版. -- 南京 ：南京大学出版社，2022.2 (2022.12重印)

ISBN 978-7-305-25430-7

Ⅰ. ①工… Ⅱ. ①杨… ②盛… Ⅲ. ①高等数学－高等职业教育－教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2022)第 032064 号

出版发行　南京大学出版社
社　　址　南京市汉口路 22 号　　邮　编　210093
出 版 人　金鑫荣

书　　名　工科数学
主　　编　杨　军　盛秀兰
责任编辑　刘　飞　蔡文彬　　编辑热线　025-83592146

照　　排　南京南琳图文制作有限公司
印　　刷　南京京新印刷有限公司
开　　本　787×1092　1/16　印张 20.75　字数 550 千
版　　次　2022年2月第6版　2022年12月第2次印刷
ISBN 978-7-305-25430-7
定　　价　56.00 元

网址：http://www.njupco.com
官方微博：http://weibo.com/njupco
官方微信号：njupress
销售咨询热线：(025) 83594756

* 版权所有，侵权必究
* 凡购买南大版图书，如有印装质量问题，请与所购图书销售部门联系调换

第六版前言

本书第一版在2011年7月被评为江苏省高等学校精品教材，第四版在2019年11月被评为“十三五”江苏省高等学校重点教材，并于2020年11月被评为“十三五”职业教育国家规划教材。为贯彻党的二十大精神中关于教育要落实立德树人的根本任务，推进职普融通、产教融合、科教融汇，优化职业教育类型定位等育人要求，响应高职数学课程教学的不断改革，以及职业教育中工科专业学生的特点及未来实际需求，我们修订了本书。在修订过程中，我们始终遵循“数学为基，工程为用”的原则，力求做到“深化概念、强化运算、淡化理论、加强应用”。

本书的设计理念是“从专业中来，到专业中去”，即从专业课程中的实际问题精选与数学有关的案例或模型，将案例所涉及的数学知识加工整理成若干数学模块，再用案例驱动数学模块内容，最后将所学数学知识应用于解决实际问题。具体做到以下几个方面：

1. 抓住知识点，注意数学知识的深度和广度。基础知识和基本理论以“必需、够用”为度，把重点放在概念、方法和结论的实际应用上。多用图形、图表表达信息，多用有实际应用价值的案例、示例促进对概念、方法的理解；对基础理论不做论证，必要时只作简单的几何解释。

2. 强化系统性，力争从体系、内容、方法上进行改革，有所创新。将教材的结构、体系进一步优化，强调数学思想方法的突出作用，强化与实际应用联系较多的基础知识和基本方法。加强基础知识的案例教学，力求突出在解决实际问题中应用数学思想方法，揭示重要的数学概念和方法的本质。新增思政案例模块，着眼于提高学生的数学素质，培养学生的睿智、细致、创新的品格和家国情怀。

3. 突出实践性，注重数学建模思想、方法的渗透。通过应用实例介绍数学建模过程，从而引入数学概念。专门设计了一章数学实验，以培养学生运用计算机及相应的数学软件求解数学模型的能力。

4. 注重复合性，采用“案例驱动”的教学模式。教材体系突出与各工科专业紧密结合，体现数学知识专业化，工程问题数学化，尽可能应用数学知识解释工程应用中的现象，并用数学方法解决实际问题，实现“教、学、做”一体的教学改革精神。

5. 加大训练，增加课堂练习的力度。采用“三讲一练”的方式(即按照数学教学规律，采用讲练结合的方式)，加强学生应用创新能力的培养。本书针对不同专业的需求，

共设计了十三个模块，部分模块以学生扫二维码学习的形式出现在教材中。在每一节前增加了学习目标，每一节后配备了类型合理、深度和广度适中的习题。同时为适应高职学生专转本的需求，每一章后增加了真题练习，便于学生了解专转本考试的题型与深度；每章还新增了小结内容，包括重难点介绍、知识点概览、疑难解析与例题分析，更方便学生自学。另外，还编写了专门与本书配备的案例与习题练习册，单独出版，方便学生在做课堂练习时使用。

6. 以学生为主体，以教师为主导。在内容处理上便于组织教学，在保证教学要求的同时，让教师比较容易组织教学内容，学生也比较容易理解，并能让学生积极主动地参与到教学中，从而使学生在知识、能力、素养方面均有较大的提高。

全书由盛秀兰、杨军统稿，定稿。江苏食品药品职业技术学院党委书记陶书中教授主审。

为了加快实现高职教育与远程开放教育的深度融合，本书增设了若干知识点的教学视频资料，以满足广大读者自学的需求。在此，特别感谢叶惠英副教授、王洁老师对本书提供的建议，以及徐薇副教授、张洁副教授等许多教学一线的教师提供高质量的教学视频资料。本书的出版得到江苏城市职业学院教育学院、教务处以及南京大学出版社的大力支持，在此谨表示衷心感谢！

限于编者水平，加上时间仓促，书中难免有不当之处，敬请广大师生和读者批评指正。

编　者

目　录

第一章　函数、极限与连续 …… 1

第一节　函数 …… 1
第二节　极限及其运算 …… 13
第三节　函数的连续性与间断点 …… 26
本章小结 …… 31
本章习题 …… 31
思政案例　中国伟大的数学家——刘徽 …… 33

第二章　一元函数微分学及应用 …… 35

第一节　导数的概念 …… 35
第二节　求导法则 …… 40
第三节　高阶导数 …… 45
第四节　隐函数和由参数方程所确定的函数的导数 …… 46
第五节　函数的微分 …… 50
第六节　微分中值定理与洛必达法则 …… 53
第七节　函数的单调性与极值 …… 59
第八节　曲线的凹凸拐与函数图形描绘 …… 66
本章小结 …… 71
本章习题 …… 71
思政案例　分析数学的开拓者——拉格朗日 …… 74

第三章　一元函数积分学及应用 …… 75

第一节　不定积分的概念与性质 …… 75
第二节　换元积分法 …… 79
第三节　分部积分法 …… 88
第四节　有理函数的积分 …… 92
第五节　定积分的概念与性质 …… 95
第六节　微积分基本公式 …… 101
第七节　定积分的换元法和分部积分法 …… 105

第八节　定积分的应用…… 109
第九节　反常积分…… 117
本章小结…… 120
本章习题…… 120
思政案例　数学史上最精彩的纷争——莱布尼茨 VS 牛顿 …… 122

第四章　常微分方程…… 124

第一节　微分方程的基本概念…… 126
第二节　一阶常微分方程…… 128
第三节　二阶常微分方程…… 133
本章小结…… 141
本章习题…… 141
思政案例　包罗万象的数学分支——微分方程 …… 142

第五章　无穷级数…… 144

第一节　常数项级数的基本概念和性质…… 146
第二节　常数项级数的审敛法…… 151
第三节　幂级数…… 157
本章小结…… 168
本章习题…… 168
思政案例　数学神话——泰勒 …… 170

第六章　向量代数与空间解析几何*…… 171

第一节　向量及其运算* …… 171
第二节　平面与直线* …… 171
第三节　空间曲面与空间曲线* …… 171

第七章　多元函数微分学及应用…… 172

第一节　多元函数的基本概念…… 172
第二节　偏导数…… 176
第三节　全微分及其应用…… 181
第四节　多元复合函数及隐函数的求导法则…… 183
第五节　多元函数的极值及其求法…… 189
本章小结…… 193
本章习题…… 194
思政案例　极值的诗情画意 …… 195

第八章　多元函数积分学及应用…… 197

第一节　二重积分的概念与性质…… 197

第二节　二重积分的计算法…… 201
第三节　二重积分的应用…… 207
本章小结…… 213
本章习题…… 213
思政案例　微积分学在中国的最早传播人——李善兰 …… 215

第九章　线性代数初步…… 216

第一节　行列式…… 216
第二节　矩阵…… 229
第三节　线性方程组…… 245
第四节　向量组的线性相关性…… 255
本章小结…… 267
本章习题…… 268
思政案例　数学之美——杨辉三角 …… 270

第十章　MATLAB 实验 …… 272

第一节　MATLAB 简介与函数运算实验 …… 272
第二节　导数运算实验…… 282
第三节　积分运算实验…… 284
第四节　微分方程求解实验…… 287
第五节　无穷级数实验…… 289
第六节　向量代数与空间解析几何实验* …… 292
第七节　多元函数微分运算实验…… 292
第八节　多元函数积分运算实验…… 296
第九节　线性代数初步实验…… 298

第十一章　傅里叶级数与积分变换* …… 303

第十二章　概率论与数理统计初步* …… 303

第十三章　图论初步* …… 303

附录　初等数学中的常用公式…… 304

习题参考答案与提示…… 307

参考文献…… 323

* 表示选学内容，可扫二维码学习。

第一章　函数、极限与连续

本章将介绍集合、函数、极限和函数连续性等基本概念以及它们的一些性质，这些内容都是学习本课程必需的基本知识.

第一节　函　　数

学习目标

1. 理解集合概念，掌握集合运算.
2. 理解函数的概念，了解分段函数，能熟练地求函数的定义域和对应法则.
3. 了解函数的主要性质(单调性、奇偶性、周期性和有界性).
4. 熟练掌握基本初等函数的解析表达式、定义域、主要性质和图形.
5. 理解复合函数、初等函数的概念.
6. 能够建立实际问题中的函数关系式.

现实世界中，存在着各种各样不断变化着的量，它们之间相互依存，相互联系. 函数就是对各种变量之间的相互依存关系的一种抽象. 微积分学的研究对象是函数. 函数概念是数学中的一个基本而重要的概念. 1837 年，德国数学家狄利克雷(Dirichlet，1805—1859)提出现今通用的函数定义，使函数关系更加明确，从而推动了数学的发展和应用.

一、集合与区间

1. 集合的概念

引例：

① 一个书柜的书；

② 一间教室里的全体学生；

③ 全体实数.

上述几个例子中体现了数学中的一个基本概念——集合.

(1) 集合(简称集)

具有某种共同属性的事物的总体，称为**集合**. 常用大写拉丁字母 $A,B,C,\cdots$ 表示. 组成集合的事物称为集合的**元素**. 常用小写拉丁字母 $a,b,c,\cdots$ 表示. a 是集合 M 的元素表示为 $a\in M$(读作 a 属于 M). a 不是集合 M 的元素表示为 $a\notin M$(读作 a 不属于 M).

一个集合中，若只有有限个元素，称为**有限集**；不是有限集的集合称为**无限集**.

(2) 子集

若 $x\in A$，必有 $x\in B$，则称 A 是 B 的**子集**，记为 $A\subset B$(读作 A 包含于 B)或 $B\supset A$(读作 B 包含 A).

如果集合 A 与集合 B 互为子集，即 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称**集合 A 与集合 B 相等**，记作 $A=B$（或 $B=A$）.

若 $A\subset B$ 且 $A\neq B$，则称 A 是 B 的**真子集**，记作 $A\subsetneq B$.

不含任何元素的集合称为**空集**，记作 $\varnothing$. 规定空集是任何集合的子集.

(3) 集合的表示

① 列举法：把集合的全体元素一一列举出来.

例如 $A=\{a,b,c,d,e,f,g\}$.

② 描述法：若集合 M 是由具有某种性质 P 的元素 x 的全体所组成，则 M 可表示为

$$M=\{x\mid x\text{ 具有性质 }P\}.$$

例如 $M=\{(x,y)\mid x,y\text{ 为实数},x^2+y^2=1\}$.

对于数集，我们在表示数集的字母的右上角，标上“$*$”来表示该数集内排除 0 的集，标上“$+$”来表示该数集内排除 0 与负数的集.

(4) 几个常用的数集

$\mathbf{N}$ 表示所有自然数构成的集合，称为自然数集.

$\mathbf{N}=\{0,1,2,\cdots,n,\cdots\}$；$\mathbf{N}^*=\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$.

$\mathbf{Z}$ 表示所有整数构成的集合，称为整数集.

$\mathbf{Z}=\{\cdots,-n,\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots,n,\cdots\}$.

$\mathbf{Q}$ 表示所有有理数构成的集合，称为有理数集.

$$\mathbf{Q}=\left\{\frac{p}{q}\mid p\in\mathbf{Z},q\in\mathbf{N}^*\text{ 且 }p\text{ 与 }q\text{ 互质}\right\}.$$

$\mathbf{R}$ 表示所有实数构成的集合，称为实数集. $\mathbf{R}^*$ 为排除 0 的实数集，$\mathbf{R}^+$ 表示全体正实数.

2. 集合的运算

(1) 集合运算的种类

集合的基本运算有以下几种：并集、交集、差集.

给定两个集合 A,B，可定义下列运算（如图 1.1）：

并集：$A\cup B=\{x\mid x\in A\text{ 或 }x\in B\}$.

交集：$A\cap B=\{x\mid x\in A\text{ 且 }x\in B\}$.

差集：$A\backslash B=\{x\mid x\in A\text{ 且 }x\notin B\}$.

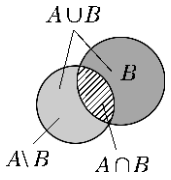


图 1.1

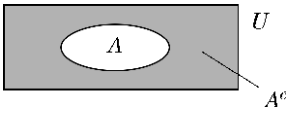


图 1.2

设 A 是一个集合，U 是包含 A 的全集，把 $U\backslash A$ 称为 A 的**余集**或**补集**（如图 1.2），记作 $\boldsymbol{A}^c$.

(2) 集合运算的法则

设 A、B、C 为任意三个集合，则有下列法则成立：

① 交换律：$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$.

② 结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

③ 分配律：$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$，$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$.

④ 对偶律：$(A\cup B)^C=A^C\cap B^C$，$(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$.

以上这些法则都可以根据集合相等的定义验证.

3. 区间和邻域

(1) 有限区间

设 a 和 b 都是实数，且 $a<b$，称数集 $\{x\mid a<x<b\}$ 为**开区间**，记为 (a,b)，即

$$(a,b)=\{x\mid a<x<b\}.$$

类似地有

$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$ 称为**闭区间**；

$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}$ 和 $(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}$ 称为**半开区间**.

其中 a 和 b 称为区间 (a,b)、$[a,b]$、$[a,b)$、$(a,b]$ 的**端点**，$b-a$ 称为**区间的长度**.

从数轴上看，这些有限区间是长度为有限的线段. 闭区间 $[a,b]$ 与开区间 (a,b) 在数轴上分别如图 1.3(a)与图 1.3(b)所示.

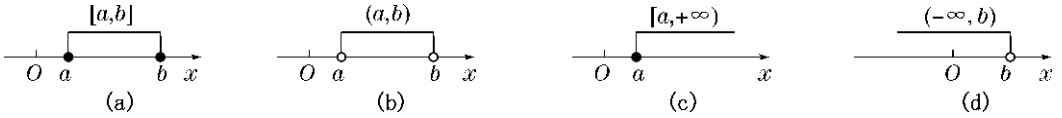


图 1.3

(2) 无限区间

引进记号 $+\infty$(读作正无穷大)及 $-\infty$(读作负无穷大)，可类似地表示**无限区间**：

$$[a,+\infty)=\{x\mid a\leqslant x\};(-\infty,b)=\{x\mid x<b\};(-\infty,+\infty)=\{x\mid |x|<+\infty\}.$$

区间 $[a,+\infty)$ 和 $(-\infty,b)$ 在数轴上分别如图 1.3(c)与图 1.3(d)所示.

(3) 邻域

以点 a 为中心的任何开区间称为点 a 的**邻域**，记作 $U(a)$.

设 δ 是一正数，则称开区间 $(a-\delta,a+\delta)$ 为点 a 的 δ 邻域，记作 $U(a,\delta)$，即

$$U(a,\delta)=\{x\mid a-\delta<x<a+\delta\}=\{x\mid |x-a|<\delta\}.$$

其中点 a 称为**邻域的中心**，δ 称为**邻域的半径**，如图 1.4(a).

图 1.4

(4) 去心邻域

点 a 的 δ 邻域去掉中心后，称为点 a 的**去心 δ 邻域**，记作 $\mathring{U}(a,\delta)$，如图 1.4(b)，即

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}.$$

二、函数

微课

1. 函数的概念

在考察某些自然现象或社会现象时，往往会遇到几个变量. 这些变量并不是孤立地变化的，而是存在着某种相互依赖关系.

案例 1.1（**自由落体运动方程**） 在自由落体运动中，物体下落的距离 S 随下落时间 t 的变化而变化，下落距离 S 与时间 t 之间的函数关系为：

$$S=\frac{1}{2}gt^2,$$

其中 g 为重力加速度，$g=9.8\ \mathrm{m/s^2}$.

案例 1.2（**气温变动**） 某气象站测得某天早上 6 时至晚上 10 时的气温如表 1.1 所示.

表 1.1

时间(h)	6	8	10	12	14	16	18	20	22
温度(℃)	12.1	14.3	17	18.5	20.5	16.8	16.3	15.2	12

从表中我们可以了解当天 6 时至 22 时的气温变化情况.

案例 1.3（**股票曲线**） 股票在某天的价格和成交量随时间的变化常用图形表示，图 1.5 为某一股票在某天的走势图.

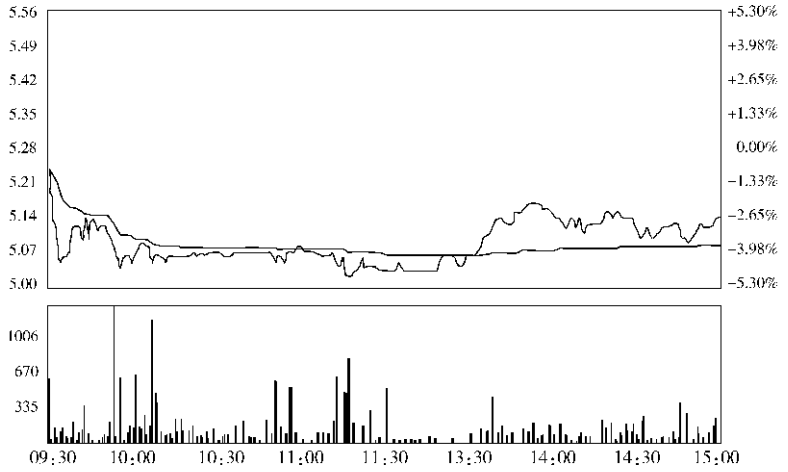


图 1.5

从股票曲线，我们可以看出这只股票当天的价格和成交量随时间的波动情况.

定义 1.1 设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的数集. 如果对于每一个数 $x\in D$，变量 y 按照一定的法则总有确定的数值与之对应，则称 y 是 x 的**函数**，记作 $y=f(x)$，其中 x 为**自变量**，y 为**因变量**. 数集 D 称为函数 $f(x)$ 的**定义域**. 当 x 取遍 D 内的各个数值时，对应的

函数值的全体组成的数集称为函数 $f(x)$ 的**值域**，记为 $f(D)$.

如果自变量在定义域内任取一个数值，对应的函数值只有唯一的一个，称这种函数为**单值函数**；否则，如果有多个函数值与之对应，就称为**多值函数**. 没有特别说明时，本书讨论的函数都是指单值函数.

从函数定义我们可以看出，构成函数的两个要素是定义域和对应法则. 如果两个函数的定义域相同，对应法则也相同，那么这两个函数就是相同的，否则就是不同的.

【例 1.1】　求函数 $y=\dfrac{1}{\ln(x+2)}+\sqrt{4-x^2}$ 的定义域.

解　函数的定义域是满足不等式组

$$\begin{cases} x+2>0, \\ x+2\neq 1, \\ 4-x^2\geqslant 0 \end{cases}$$

的 x 值的全体. 解此不等式组，得其定义域为：

$$D=\{x\mid -2<x\leqslant 2,\text{且 } x\neq -1\}\text{或 } D=(-2,-1)\cup(-1,2]$$

【例 1.2】　已知函数 $f\left(\dfrac{1}{x}-1\right)=\dfrac{1}{x^2}-1$，求 $f(x)$.

解　令 $\dfrac{1}{x}-1=t$，则 $\dfrac{1}{x}=t+1$，代入得

$$f(t)=(t+1)^2-1=t^2+2t.$$

所以 $f(x)=x^2+2x$.

2. 函数的表示法

表示函数的主要方法有三种：解析法（公式法）、表格法、图形法.

（1）解析法

用数学式子表示函数的方法叫作**解析法**. 如 $y=f(x)$，其中 y 是因变量，f 为对应法则，x 是自变量. 其优点是便于数学上的分析和计算，本书主要讨论用解析式表示的函数，如案例 1.1 表示自由落体运动的路程与时间的函数关系式 $s=\dfrac{1}{2}gt^2$.

（2）表格法

用表格形式表示函数的方法叫作**表格法**. 它是将自变量所取的值和对应的函数值列为表格，其优点是直观、精确. 如案例 1.2 气象站测量的某天不同时间的气温.

（3）图形法

以图形表示函数的方法叫作**图形法**. 其优点是直观形象，且可看到函数的变化趋势，如案例 1.3 某一股票在某天的走势图.

3. 函数的几种特性

（1）函数的有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，数集 $X\subset D$. 如果存在数 K_1，使对任意 $x\in X$，有 $f(x)\leqslant K_1$，则称函数 $f(x)$ 在 X 上**有上界**，而称 K_1 为函数 $f(x)$ 在 X 上的一个**上界**. 图形特点是 $y=f(x)$ 的图形在直线 $y=K_1$ 的下方.

如果存在数 K_2，使对任一 $x\in X$，有 $f(x)\geqslant K_2$，则称函数 $f(x)$ 在 X 上**有下界**，而称 K_2

为函数 $f(x)$在 X 上的一个**下界**. 图形特点是函数 $y=f(x)$的图形在直线 $y=K_2$ 的上方.

如果存在正数 M,使对任一 $x\in X$,有$|f(x)|\leqslant M$,则称函数 $f(x)$在 X 上**有界**. 图形特点是函数 $y=f(x)$的图形在直线 $y=-M$ 和 $y=M$ 之间.

如果这样的 M 不存在,则称函数 $f(x)$在 X 上**无界**. 函数 $f(x)$无界,就是说对任何正数 M,总存在 $x_1\in X$,使$|f(x_1)|>M$.

例如:

① 函数 $f(x)=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$上是有界的,即$|\sin x|\leqslant 1$.

② 函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$在开区间$(0,1)$内是无上界的,或者说它在$(0,1)$内有下界,无上界,而它在$(1,2)$内是有界的.

(2) 函数的单调性

设函数 $y=f(x)$的定义域为 D,区间 $I\subset D$. 如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2,当 $x_1<x_2$时,恒有

$$f(x_1)<f(x_2)(\text{或 } f(x_1)>f(x_2)),$$

则称函数 $f(x)$在区间 I 上是**单调增加**(或**单调减少**)的.

单调增加和单调减少的函数统称为**单调函数**.

例如:函数 $y=x^2$ 在区间$(-\infty,0]$上是单调减少的,在区间$[0,+\infty)$上是单调增加的,但在$(-\infty,+\infty)$上不是单调的.

(3) 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$的定义域 D 关于原点对称(即若 $x\in D$,则$-x\in D$).

如果对于任一 $x\in D$,有 $f(-x)=f(x)$,则称 $f(x)$为**偶函数**.

如果对于任一 $x\in D$,有 $f(-x)=-f(x)$,则称 $f(x)$为**奇函数**.

偶函数的图形关于 y 轴对称,奇函数的图形关于原点对称.

例如:$y=x^2$,$y=\cos x$ 都是偶函数,$y=x^3$,$y=\sin x$ 都是奇函数,$y=\sin x+\cos x$ 是非奇非偶函数.

(4) 函数的周期性

设函数 $f(x)$的定义域为 D. 如果存在一个正数 l,使得对于任意 $x\in D$ 有$(x\pm l)\in D$,且 $f(x\pm l)=f(x)$,则称 $f(x)$为**周期函数**,l 称为 $f(x)$的**周期**(一般指最小正周期).

周期函数的图形特点:在函数的定义域内,每个长度为 l 的区间上,函数的图形有相同的形状.

4. 分段函数

案例 1.4(**矩形波的函数表示**) 图 1.6 为一个周期为 2π 的矩形波图形,它在区间$[-\pi,\pi)$内的解析式为:$f(t)=\begin{cases}0, & -\pi\leqslant t<0,\\ A, & 0\leqslant t<\pi.\end{cases}$

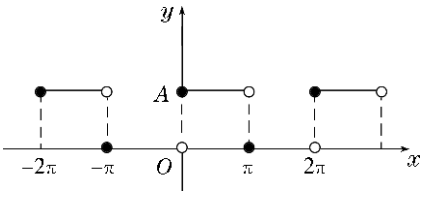


图 1.6

案例 1.5(**出租车收费标准**) 某城市出租车收费标准为:5 km 以内收费 10 元,超过 5 km 至 15 km 的部分每千米加收 1.2 元,超过15 km的部分每千米加收 1.8 元. 这样出租车

载客的收费 f 与行驶千米数 s 的函数关系可表示为：

$$f(s)=\begin{cases}10, & 0<s\leqslant 5,\\ 10+1.2(s-5), & 5<s\leqslant 15,\\ 22+1.8(s-15), & s>15.\end{cases}$$

这两个函数的特点是其由多个表达式构成，在工程实践及日常生活中常常会遇到此类函数. 在定义域的不同子集上用不同解析式表示的函数称为**分段函数**.

下面介绍几种特殊的分段函数：

(1) 符号函数(如图 1.7)

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x>0.\end{cases}$$

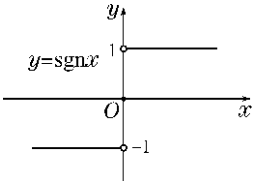


图 1.7

(2) 取整函数(如图 1.8)

设 x 为任意实数，称不超过 x 的最大整数为取整函数，记为 $y=[x]$，即若 $n\leqslant x<n+1$，则 $[x]=n$，其中 n 为整数，因此其数学表达式为：

$$y=\begin{cases}\cdots, & \cdots\\ -2, & -2\leqslant x<-1,\\ -1, & -1\leqslant x<0,\\ 0, & 0\leqslant x<1,\\ 1, & 1\leqslant x<2,\\ 2, & 2\leqslant x<3,\\ \cdots, & \cdots\end{cases}$$

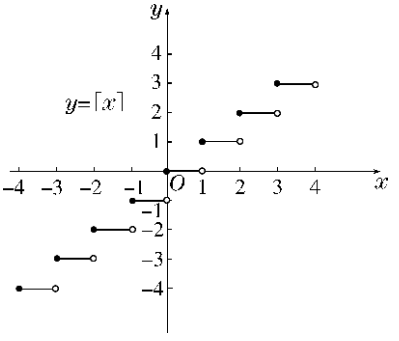


图 1.8

(3) 特征函数

$$y=\chi_A=\begin{cases}1, & x\in A,\\ 0, & x\notin A.\end{cases}$$

其中 A 是数集，此函数常用于计数统计.

注意：分段函数是一个整体，不是几个函数，分段函数的图形应分段作出，求函数值 $f(x_0)$ 要先判断 x_0 所在的范围，再用对应的法则求函数值.

【例 1.3】(旅馆定价)　一旅馆有 200 间房间，如果定价不超过 100 元/间，则可全部出租. 若每间定价每高出 10 元，则会少出租 4 间. 设每间房间出租后的服务成本费为 20 元，试建立旅馆一天的利润与房价间的函数关系.

解　设旅馆的房价为 x 元/间，旅馆一天的利润为 y 元.

若 $x\leqslant 100$，则旅馆出租 200 间，利润为：

$$y=200(x-20).$$

若 $x>100$，则旅馆少出租 $4(x-100)/10$ 间，出租了 $200-4(x-100)/10$ 间，利润为：

$$y=[200-4(x-100)/10](x-20).$$

综上分析，旅馆利润与房价之间的函数为：

$$y=\begin{cases}200(x-20), & x\leqslant 100,\\ [200-4(x-100)/10](x-20), & x>100.\end{cases}$$

5. 反函数与复合函数

案例 1.6（**商品销售**） 已知某种商品的价格(即单价)为 m,如果要想用该商品的销售量 x 来计算该商品销售总收入 y,那么 x 是自变量,y 是因变量,其函数关系为:

$$y=mx.$$

反过来,如果想以这种商品的销售总收入来计算其销售量,就必须把 y 作为自变量,把 x 作为因变量,并由函数 $y=mx$ 解出 x 关于 y 的函数关系

$$x=\frac{y}{m}.$$

这时称 $x=\frac{y}{m}$ 为 $y=mx$ 的反函数,$y=mx$ 为直接函数.

一般,设函数 $y=f(x)$ 在 D 上是一一对应的,值域为 $f(D)$,对任意的 $y\in f(D)$,有唯一的 $x\in D$,使得 $f(x)=y$,若把 y 看作自变量,x 视为因变量,所得到的一个新的函数,称为函数 $y=f(x)$ 的**反函数**,记为 $x=f^{-1}(y)$.

通常把 $y=f(x)$,$x\in D$ 的反函数记成 $y=f^{-1}(x)$,$x\in f(D)$.

例如,函数 $y=-\sqrt{x-1}(x\geqslant 1)$ 的反函数是 $x=y^2+1(y\leqslant 0)$,习惯上改写为 $y=x^2+1(x\leqslant 0)$.

相对于反函数 $y=f^{-1}(x)$ 来说,原来的函数 $y=f(x)$ 称为**直接函数**. 把函数 $y=f(x)$ 和它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形画在同一坐标平面上,这两个图形关于直线 $y=x$ 是对称的(如图 1.9). 这是因为如果 $P(a,b)$ 是 $y=f(x)$ 图形上的点,则有 $b=f(a)$. 按反函数的定义,有 $a=f^{-1}(b)$,故 $Q(b,a)$ 是 $y=f^{-1}(x)$ 图形上的点;反之,若 $Q(b,a)$ 是 $y=f^{-1}(x)$ 图形上的点,则 $P(a,b)$ 是 $y=f(x)$ 图形上的点. 而 $P(a,b)$ 与 $Q(b,a)$ 是关于直线 $y=x$ 对称的(即直线 $y=x$ 是线段 PQ 的垂直平分线).

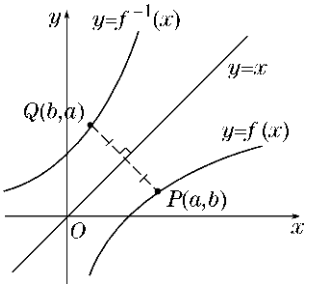


图 1.9

定理 1.1 如果直接函数 $y=f(x)$,$x\in D$ 是单调增加(或减少)的,则存在反函数 $y=f^{-1}(x)$,$x\in f(D)$,且该反函数也是单调增加(或减少)的.

案例 1.7 自由落体运动物体的动能 E 是速度 v 的函数:$E=f(v)=\frac{1}{2}mv^2$(m 为物体的质量),而速度 v 又是时间 t 的函数:$v=\varphi(t)=gt$.

通过中间变量 v 的联系,动能 E 也是时间 t 的函数,即将 $v=\varphi(t)$ 代入 $E=f(v)$ 中得到一个由 $E=f(v)$ 经过中间变量 $v=\varphi(t)$ 复合而成的关于 t 的函数:

$$E=f[\varphi(t)]=\frac{1}{2}m(gt)^2=\frac{1}{2}mg^2t^2.$$

一般,设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_1,函数 $u=g(x)$ 在 D 上有定义且 $g(D)\subset D_1$,则由下式确定的函数 $y=f[g(x)]$,$x\in D$ 称为由函数 $u=g(x)$ 和函数 $y=f(u)$ 构成的**复合函数**,它的定义域为 D,变量 u 称为**中间变量**.

函数 g 与函数 f 构成的复合函数通常记为 $f\circ g$,即 $(f\circ g)(x)=f[g(x)]$.

函数 g 与 f 能构成复合函数 $f\circ g$ 的条件是:函数 g 在 D 上的值域 $g(D)$ 必须含在 f 的

定义域 D_1 内，即 $g(D)\subset D_1$. 否则，不能构成复合函数.

例如，函数 $y=f(u)=\arcsin u$ 的定义域为 $[-1,1]$，函数 $u=g(x)=2\sqrt{1-x^2}$ 在 $D=\left[-1,-\frac{\sqrt{3}}{2}\right]\cup\left[\frac{\sqrt{3}}{2},1\right]$ 上有定义，且 $g(D)\subset[-1,1]$，则函数 g 与 f 可构成复合函数 $y=\arcsin 2\sqrt{1-x^2}$，$x\in D$；但函数 $y=\arcsin u$ 和函数 $u=2+x^2$ 不能构成复合函数，这是因为对任一 $x\in\mathrm{R}$，$u=2+x^2$ 均不在 $y=\arcsin u$ 的定义域 $[-1,1]$ 内.

6. *初等函数*

在自然科学与工程技术中，常见的函数大都是初等函数，构成初等函数的元素是常数和基本初等函数.

(1) 基本初等函数

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数，统称为**基本初等函数**.

① 幂函数

形如 $y=x^{\mu}$（μ 为常数）的函数叫作**幂函数**. 定义域随 μ 值的不同而不同. 例如 $y=x$，$y=x^3$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$；$y=\sqrt{x}$ 的定义域为 $[0,+\infty)$. 常见的幂函数的图像如图 1.10 所示.

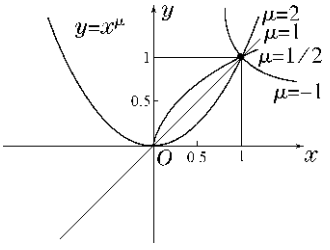


图 1.10

② 指数函数

形如 $y=a^x$（a 为常数且 $a>0$，$a\neq 1$）的函数叫作**指数函数**，其定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $(0,+\infty)$.

当 $a>1$ 时，$y=a^x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 是单调增加的，例如 $y=2^x$；

当 $0<a<1$ 时，$y=a^x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 是单调减少的，例如 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$，其图像如图 1.11 所示，它们的图形关于 y 轴对称，且都过 $(0,1)$ 点.

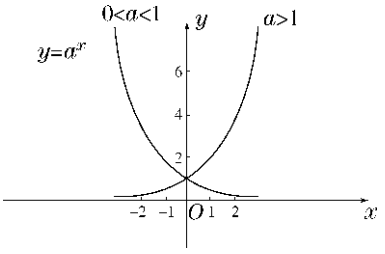


图 1.11

以常数 $\mathrm{e}=2.718\,281\,8\cdots$ 为底的指数函数 $y=\mathrm{e}^x$ 是工程中常用的指数函数.

③ 对数函数

形如 $y=\log_a x$（a 为常数且 $a>0$，$a\neq 1$）的函数叫作**对数函数**. 其定义域为 $(0,+\infty)$，值域为 $(-\infty,+\infty)$.

当 $a>1$ 时，$y=\log_a x$ 在 $(0,+\infty)$ 上是单调增加的，如 $y=\log_2 x$；

当 $0<a<1$ 时，$y=\log_a x$ 在 $(0,+\infty)$ 上是单调减少的，如 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$，其图像如图 1.12 所示，它们的图形关于 x 轴对称，且都过 $(1,0)$ 点.

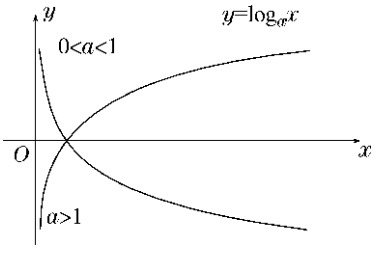


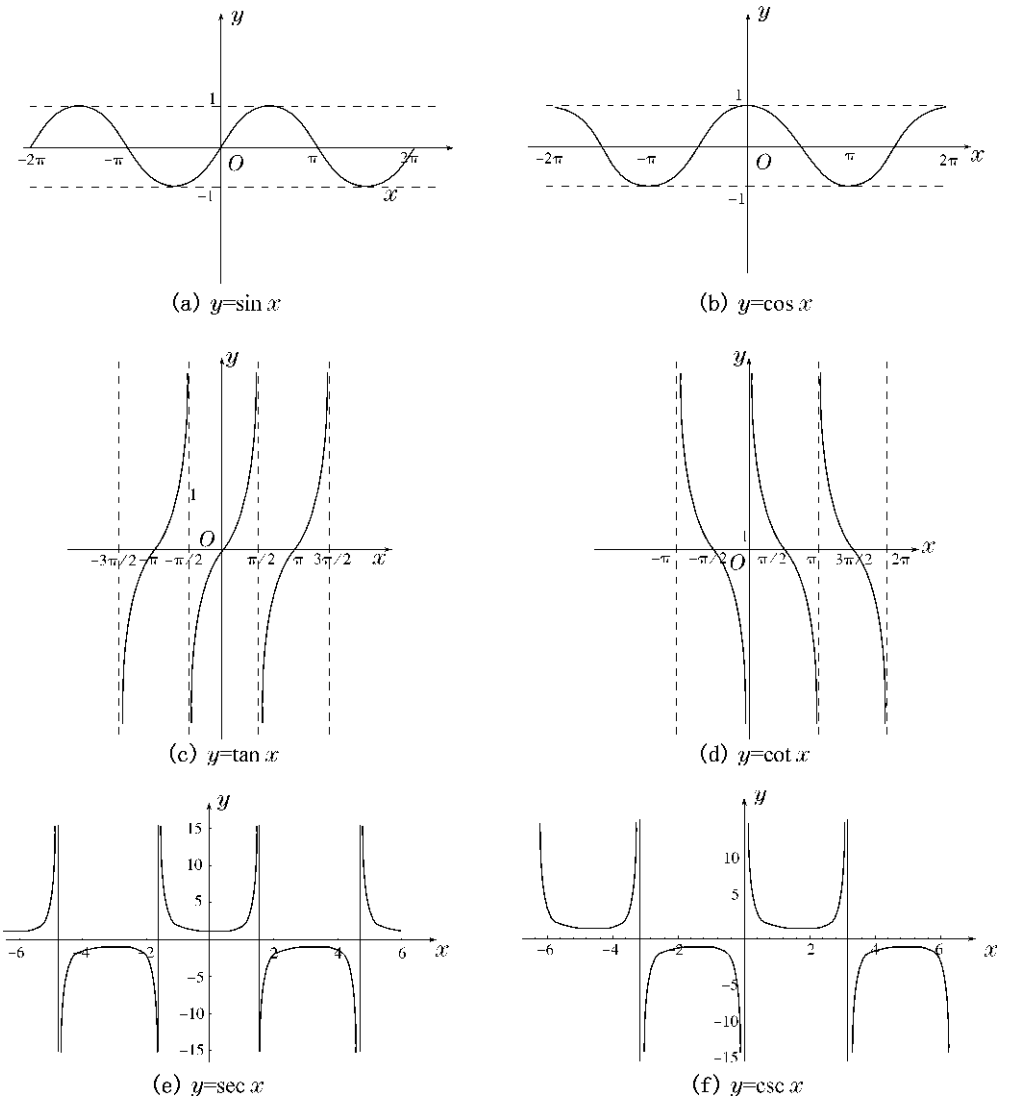
图 1.12

以常数 e 为底的对数函数，称为**自然对数函数**，记作 $y=\ln x$.

④ 三角函数与反三角函数

三角函数包括正弦函数 $y=\sin x$、余弦函数 $y=\cos x$、正切函数 $y=\tan x$、余切函数 $y=$

$\cot x$、正割函数 $y=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$、余割函数 $y=\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$，如图 1.13 所示. 这些函数大家在中学数学中已很熟悉，这里就不再多作介绍了.



(a) $y=\sin x$　(b) $y=\cos x$

(c) $y=\tan x$　(d) $y=\cot x$

(e) $y=\sec x$　(f) $y=\csc x$

图 1.13

三角函数的反函数为**反三角函数**. 常用的反三角函数有四种，见表 1.2.

表 1.2　常见的四种反三角函数

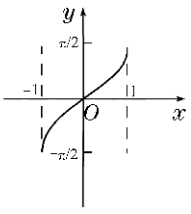
名称	定义域	值域	奇偶性	增减性
反正弦函数（$\arcsin x$）	$[-,1]$	$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$	奇函数	单调增函数
反余弦函数（$\arccos x$）	$[-1,1]$	$[0,\pi]$	非奇非偶函数	单调减函数
反正切函数（$\arctan x$）	$(-\infty,+\infty)$	$\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$	奇函数	单调增函数
反余切函数（$\operatorname{arccot} x$）	$(-\infty,+\infty)$	$(0,\pi)$	非奇非偶函数	单调减函数

反正弦函数 $y=\arcsin x$，定义域为$[-1,1]$，值域为$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，如图 1.14(a)所示，在闭区间$[-1,1]$上是单调增加的，是奇函数.

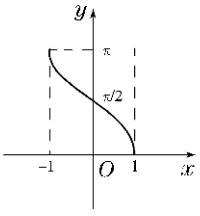
反余弦函数 $y=\arccos x$，定义域为$[-1,1]$，值域为$[0,\pi]$，如图 1.14(b)所示，在闭区间$[-1,1]$上是单调减少的，是非奇非偶函数.

反正切函数 $y=\arctan x$，定义域为$(-\infty,\infty)$，值域为$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，如图 1.14(c)所示，在区间$(-\infty,\infty)$上单调增加的，是奇函数.

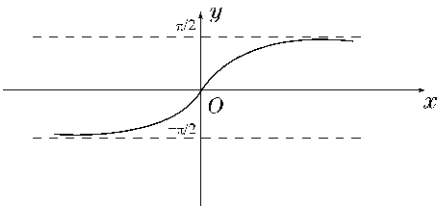
反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$，定义域为$(-\infty,\infty)$，值域为$(0,\pi)$，如图 1.14(d)所示，在区间$(-\infty,\infty)$上是单调减少的，是非奇非偶函数.



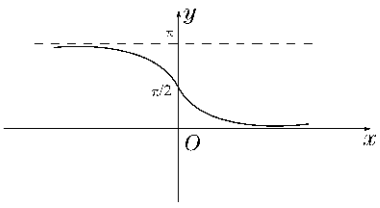
(a) $y=\arcsin x$



(b) $y=\arccos x$



(c) $y=\arctan x$



(d) $y=\operatorname{arccot} x$

图 1.14

(2) 初等函数

由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合步骤所构成，并可用一个式子表示的函数，称为**初等函数**.

例如 $y=\sqrt{1-x^2}$，$y=\sin^2 x$，$y=\sqrt{\cot\frac{x}{2}}$ 等都是初等函数. 在本课程中所讨论的函数绝大多数都是初等函数.

7. 函数关系式的建立

为解决实际问题，我们常常要把问题量化，找出问题中变量的关系，建立数学模型，即确定目标函数，再利用相关的数学知识解决这些问题.

【例 1.4】 为贯彻落实党的“二十大”报告提出的“推动经济社会发展绿色化、低碳化是实现高质量发展的关键环节”，某单位在国家科研部门的支持下，加快产业结构调整优化，进行技术攻关，采用了生产新工艺，能把 CO_2 转化为一种可利用的化工产品. 已知该单位每月处理量最少为 400 吨，最多为 600 吨，月处理成本 y 元与月处理 x 吨的函数关系可以表示为

$y=\frac{1}{2}x^2-200x+80\ 000$，且每处理一吨 CO_2 能得到可利用的化工产品的价值为 100 元. 现求

(1) 该单位每月处理量为多少吨时，才能使每顿的平均处理成本最低？

(2) 该单位每月能否获利？如果获利，求出最大利润；如果不获利，则国家目前每月至少需要补贴多少元才能使该单位不亏损？

解 (1) 欲求 CO_2 的每吨平均成本，则由已知函数关系式 $y=\frac{1}{2}x^2-200x+80\ 000$，两边同除以 x 得

$$\frac{y}{x}=\frac{1}{2}x+\frac{80\ 000}{x}-200\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{2}x\cdot\frac{80\ 000}{x}}-200=200$$

当且仅当 $\frac{1}{2}x=\frac{80\ 000}{x}$，即 $x=400$ 时，才能使每吨的最低平均处理成本为 200 元.

(2) 设该单位每月获利为 Q，则

$$Q=100x-y=100x-\left(\frac{1}{2}x^2-200x+80\ 000\right)=-\frac{1}{2}x^2+300x-80\ 000$$

$$=-\frac{1}{2}(x^2-600x)-80\ 000=-\frac{1}{2}(x-300)^2-35\ 000$$

因 $x\in[400,600]$，则在 $x=400$ 时，Q 有最大值为 $-40\ 000$，因此该单位不能获利，国家每月需要补贴 40 000 元才能持平.

【例 1.5】 某水渠横截面是等腰梯形，如图 1.15 所示，底边宽 2 m，边坡 1∶1(即倾角为 45°). $ABCD$ 称为过水截面. 试建立过水截面的面积 S 与水深 h 的函数关系式.

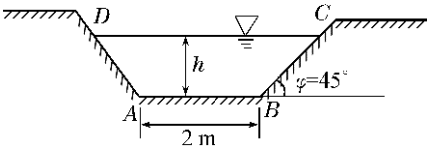


图 1.15

解 显然过水截面是一个等腰梯形，其面积随水深 h 与上底 DC 而变化. 由题意知上底 DC 与 h 有关，DC 的长度等于 $2+2h$，所以过水截面的面积为：

$$S=\frac{1}{2}(2+2+2h)\cdot h=2h+h^2(0<h<+\infty).$$

习题 1.1

1. 用区间表示适合下列不等式的变量 x 的变化范围.

(1) $|x|<5$；　　(2) $|x-3|\leqslant\frac{1}{6}$；

(3) $|x|>10$；　　(4) $0<|x-1|<0.01$.

2. 设 $A=\{x|3<x<5\}$，$B=\{x|x>4\}$，求：(1) $A\cup B$；(2) $A\cap B$.

3. 下列各对函数是否相同，为什么？

(1) $f(x)=\lg x^2$，$g(x)=2\lg x$；

(2) $f(x)=x$，$g(x)=\sqrt{x^2}$；

(3) $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}$，$g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$；

(4) $f(x)=\sqrt{1-\cos^2 x}$，$g(x)=\sin x$.

4. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\sqrt{3x-x^2}$；　　(2) $y=\dfrac{2x}{x^2-3x+2}$；

(3) $y=\lg(5-x)+\arcsin\dfrac{x-1}{6}$；　　(4) $y=\begin{cases}-x, & -1\leqslant x\leqslant 0,\\ \sqrt{3-x}, & 0<x<2.\end{cases}$

5. 讨论下列函数的奇偶性.

(1) $y=a^x-a^{-x}(a>0)$；　　(2) $y=\lg(x+\sqrt{1+x^2})$；

(3) $y=\sin x-\cos x+1$；　　(4) $y=\dfrac{1}{1+x^2}\cos x$.

6. 指出下列函数由哪些函数复合而成?

(1) $y=\ln(\tan x)$；　　(2) $y=e^{x^3}$；

(3) $y=\cos(e^{\sqrt{x}})$；　　(4) $y=\sqrt{\ln\sqrt{x}}$；

(5) $y=\tan(x^2+1)$；　　(6) $y=\arctan\dfrac{x-1}{x+1}$.

7. 设函数 $f(x)=\begin{cases}2x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ x^2, & 1<x\leqslant 2,\end{cases}$ $g(x)=\ln x$，求 $f[g(x)]$，$g[f(x)]$.

8. 某厂生产某种产品 1 600 吨，定价为 150 元/吨，销售量在不超过 800 吨时，按定价出售；超过 800 吨时，超出部分按定价 8 折出售. 试求销售收入与销售量之间的函数关系.

9. 要设计一个容积为 $V=200\pi(\mathrm{m}^3)$ 有盖圆柱形油桶，已知上盖单位面积造价是侧面的一半，而侧面单位面积造价又是底面的一半，设上盖单位面积造价为 a(元/m^2)，试将油桶总造价 p 表示为油桶半径 r 的函数.

10. 有一抛物线拱形桥，跨度为 20 m，高为 4 m，选择适当的坐标系，把拱形上点的纵坐标 y 表示成横坐标 x 的函数.

第二节　极限及其运算

学习目标

1. 了解极限的概念，知道函数极限的描述性定义，会求左右极限.

2. 了解无穷小量的概念，了解无穷小量的运算性质及其与无穷大量的关系，以及无穷小量的比较等关系.

3. 掌握极限的四则运算法则.

4. 掌握两个重要极限.

5. 掌握一些常用的求极限的方法.

十九世纪以前，人们用朴素的极限思想计算了圆的面积或某些不规则物体的体积等. 十九世纪之后，柯西以物体运动为背景，结合几何直观，引入了极限概念. 后来，维尔斯特拉

斯给出了形式化的数学语言描述.极限概念的创立,是微积分严格化的关键,它奠定了微积分学的基础.

一、数列的极限

微课

首先来研究一种特殊的函数,它是以正整数集 $\mathbf{N}^*$ 为定义域的函数,$x_n=f(n),n\in\mathbf{N}^*$,称为**数列**,记作$\{x_n\}$.

案例 1.8(**循环数**) 观察循环数列 0.9,0.99,0.999,0.999 9,…, $\sum\limits_{k=1}^{n}9\times\frac{1}{10^k}$,…的变化趋势,可以看出,随着项数 n 的无限增大,此数列无限接近于 1.

案例 1.9(**弹球模型**) 一只球从 100 m 处掉下,每次弹回的高度为上次高度的$\frac{2}{3}$.这样下去,用球第 1,2,…,n,…次的高度来表示球的运动规律,则得数列 $100,100\times\frac{2}{3},100\times\left(\frac{2}{3}\right)^2,\cdots,100\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1},\cdots$研究该数列的变化趋势,可以看出,随着次数 n 的无限增大,数列无限接近于 0.

案例 1.10(**圆面积的计算**) 我国古代魏末晋初的杰出数学家刘徽(约 225—295 年)创造了“割圆术”,成功地推算出圆周率和圆的面积.

下面介绍一下“割圆术”求圆面积的作法和思路:

先作圆的内接正三边形,把它的面积记作 A_1,再作内接正六边形,其面积记作 A_2,再作内接正十二边形,其面积记作 A_3,…,照此下去,把圆的内接正 $3\times2^{n-1}$($n=1,2,\cdots$)边形的面积记作 A_n,这样得到一数列:

$$A_1,A_2,A_3,\cdots,A_n,\cdots$$

当边数 n 无限增大时,正多边形的面积 A_n 就无限接近于圆的面积.

定义 1.2 对于数列$\{x_n\}$,如果当 n 无限增大时,数列的通项 x_n 无限地接近于某一确定的常数 a,则称常数 a 是数列$\{x_n\}$的**极限**,或称数列$\{x_n\}$**收敛**于 a.记为 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=a$.如果数列没有极限,就说数列是**发散**的.

对无限接近的刻画:x_n 无限接近于 a 等价于$|x_n-a|$无限接近于 0.

数列极限的几何解释:一般地,若 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=a$,可将常数 a 和数列的通项 x_n 在数轴上用它们的对应点表示出来,对 a 的任一个取定的邻域 $U(a,\varepsilon)$,当 n 无限增大时,数列的项 x_n 最终(从某项 x_N 以后的项)都要落到邻域内(如图 1.16).

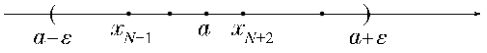


图 1.16

【例 1.6】 利用数列极限的定义,讨论下列数列的极限.

(1) $1,\frac{5}{2},\frac{5}{3},\frac{9}{4},\frac{9}{5},\cdots,\frac{2n+(-1)^n}{n},\cdots$

(2) $2,4,8,\cdots,2^n,\cdots$

(3) $1,-1,1,\cdots,(-1)^{n+1},\cdots$

解　(1) 该数列的通项 $x_n=\dfrac{2n+(-1)^n}{n}$，通项 x_n 与 2 的距离 $|x_n-2|=\dfrac{1}{n}$，当项数 n 无限增大时，$|x_n-2|$ 无限逼近于零，即通项 x_n 无限逼近于 2，因此 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2n+(-1)^n}{n}=2$.

(2) 当项数 n 无限增大时，该数列的通项 x_n 也无限增大，不可能逼近一个常数项，从而 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$ 不存在.

(3) 在数列 $1,-1,1,\cdots,(-1)^{n+1},\cdots$ 中，奇数项总是 1，偶数项总是 -1，因此通项 x_n 不可能逼近一个常数项，从而 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$ 不存在.

收敛数列的性质：

定理 1.2(极限的唯一性)　收敛数列 $\{x_n\}$ 不能收敛于两个不同的极限.

定理证明从略.

事实上，如果数列 $\{x_n\}$ 有两个极限：$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=a$，$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=b$，且 $a\neq b$，则这时在数轴上看，当通项 x_n 变化到一定“时刻”后，x_n 既要与点 a 无限接近，又要与另外一点 b 无限接近，这显然是不可能的，可见，数列的极限是唯一的.

定理 1.3(收敛数列的有界性)　如果数列 $\{x_n\}$ 收敛，那么数列 $\{x_n\}$ 一定有界.

定理证明从略.

这就是说，数列有界是数列收敛的必要条件，而不是充分条件，即有界数列未必收敛，无界数列必发散，发散数列未必无界.

微课

上述数列极限的两个性质对以下函数极限同样成立.

二、函数的极限

如果把数列极限中的函数 $f(n)$ 的定义域 (N^*) 以及自变量的变化过程 $(n\to+\infty)$ 等特殊性撇开，我们就可以得到函数极限的一般概念.

1. $x\to\infty$ 时函数的极限

案例 1.11(水温的变化趋势)　将一盆 80℃ 的热水放在一间室温恒为 20℃ 的房间里，水的温度 T 将逐渐降低，随着时间 t 的推移，水温会越来越接近室温 20℃.

案例 1.12(函数的变化趋势)　考察函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $x\to+\infty$ 和 $x\to-\infty$ 时的变化情况(如表 1.3)：

表 1.3

x	1	10	100	1 000	10 000	100 000	1 000 000	…
$f(x)=\dfrac{1}{x}$	1	0.1	0.01	0.001	0.000 1	0.000 01	0.000 001	…
x	-1	-10	-100	$-1\,000$	$-10\,000$	$-100\,000$	$-1\,000\,000$	…
$f(x)=\dfrac{1}{x}$	-1	-0.1	-0.01	-0.001	$-0.000\,1$	$-0.000\,01$	$-0.000\,001$	…

可以从表中观察出：当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)=\dfrac{1}{x}$ 与 0 无限接近；当 $x\to-\infty$ 时，$f(x)=\dfrac{1}{x}$ 也

与 0 无限接近.

从上述两个问题中,我们看到:当自变量的绝对值逐渐增大时,相应的函数值接近于某一个常数.

定义 1.3 若函数 $f(x)$当自变量 x 的绝对值无限增大时,函数 $f(x)$的值无限趋近于某个确定的常数 A,则称 A 为**函数 $f(x)$当 $x\to\infty$时的极限**,记作 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A$ $(x\to\infty)$.

注意:$x\to\infty$表示 x 既取正值且无限增大(记为 $x\to+\infty$),同时又取负值且绝对值无限增大(记为 $x\to-\infty$),故称为双边的.

有时 x 的变化趋向是单边的,即 $x\to+\infty$或 $x\to-\infty$.

定义 1.4 设函数 $f(x)$在$(a,+\infty)$内有定义,当 x 无限增大时,对应的函数值 $f(x)$无限趋近于某个确定的常数 A,则称常数 A 为**函数 $f(x)$当 $x\to+\infty$时的极限**,记作

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to+\infty).$$

类似地,可以给出 $x\to-\infty$时的极限的定义.

【例 1.7】 讨论 $f(x)=\arctan x$ 当 $x\to\infty$时的极限.

解 由图 1.14(c)反正切函数的图像可知:

$$\lim_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2},\quad \lim_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}.$$

由于当 $x\to+\infty$和 $x\to-\infty$时,$f(x)=\arctan x$ 不是无限趋于同一个确定的常数,所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 不存在.

一般有结论:双边极限存在的充分必要条件是两个单边极限存在且相等,即

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}f(x)=A.\text{(记号“}\Leftrightarrow\text{”表示等价)}$$

2. $x\to x_0$ 时函数的极限

案例 1.13(**人影长度**) 考虑一个人沿直线走向路灯的正下方时其影子的长度.若目标总是灯的正下方那一点,灯与地面的垂直高度为 H.由日常生活知识知道,当此人走向目标时,其影子长度 y 越来越短,当人越来越接近目标(即 $x\to0$)其影子的长度 y 越来越短,逐渐趋于 0(即 $y\to0$)(如图 1.17).

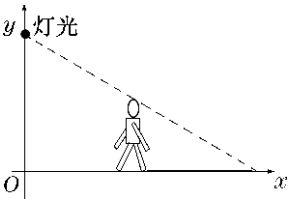


图 1.17

这一案例中,自变量无限接近某一点(即 $x\to0$)时,相应函数也无限地接近某一确定的值 0(即 $y\to0$).

定义 1.5 设函数 $f(x)$在点 x_0 的某个去心邻域内有定义,如果在自变量 $x\to x_0$ 的变化过程中,函数值 $f(x)$无限接近确定的常数 A,则称 A 是**函数 $f(x)$当 $x\to x_0$ 时的极限**,记作 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A(x\to x_0)$.

说明:在定义中,“设函数 $f(x)$在点 x_0 的某个去心邻域内有定义”反映我们关心的是函数 $f(x)$在点 x_0 附近的变化趋势,而不是 $f(x)$在 x_0 这一孤立点的情况.$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$是否存在,与 $f(x)$在点 x_0 有没有定义或函数取什么数值都没有关系.

【例 1.8】 求 $\lim\limits_{x\to1}(2x-1)$.

解　当 $x\to 1$ 时，$(2x-1)$ 以 1 为极限，即 $\lim\limits_{x\to 1}(2x-1)=1$.

在这里，函数 $f(x)=2x-1$ 在点 $x=1$ 处有定义，且当 $x\to 1$ 时，$f(x)$ 的极限值恰好是 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的值，即 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=f(1)$.

【例 1.9】　求 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$.

解　函数 $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ 的图像是“挖掉”点 $(2,4)$ 的直线 $y=x+2$，如图 1.19，当 $x\neq 2$ 时，$f(x)=x+2$，则

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2)=4.$$

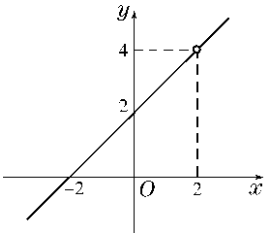


图 1.19

极限 $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$ 存在，但不等于 $f(x)$ 在点 $x=2$ 处的值（函数在 $x=2$ 处没有定义）.

3. 单侧极限

案例 1.14（矩形波形曲线分析）　如图1.18，设周期为 2π 的矩形波在区间 $[-\pi,\pi)$ 内的函数为

$$f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\leqslant x<0,\\ A, & 0\leqslant x<\pi,\end{cases}\quad (A\neq 0)$$

问函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的极限是多少？

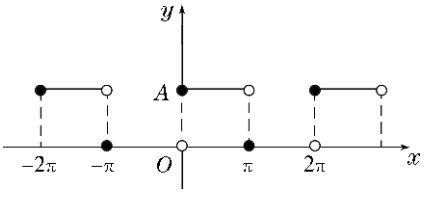


图 1.18

在函数极限的定义中，x 趋近于 x_0 的方式是任意的，此函数为分段函数，在 $x=0$ 的左右两侧，函数 $f(x)$ 的表达式不同，此时只能先对 $x=0$ 左右两侧分别进行讨论.

定义 1.6　设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个左（右）邻域内有定义，如果 x 从 x_0 的左（右）侧趋于 x_0 时，$f(x)$ 无限地接近确定的常数 A，那么数 A 称为**函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的左（右）极限**，记作 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 或 $f(x_0^-)$（$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 或 $f(x_0^+)$）.

根据 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限定义和左、右极限的定义，可以证明：函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时极限存在的充要条件是 $f(x)$ 在点 x_0 处的左极限和右极限各自存在且相等，即

$$f(x_0^-)=f(x_0^+)=A\Leftrightarrow\lim_{x\to x_0}f(x)=A.$$

案例 1.14 中函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的左极限为 0，右极限为 A，且 $A\neq 0$，所以函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处极限不存在.

利用函数极限的定义可以考察某个常数 A 是否为 $f(x)$ 在 x_0 处的极限，而不是用来求函数 $f(x)$ 在 x_0 处的极限的常用方法. 但可以验证：基本初等函数在其各自的定义域内每点处的极限都存在，且等于该点处的函数值.

【例 1.10】　设函数 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x<0,\\ x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 1, & x>1,\end{cases}$ 求函数在 $x=0$ 和 $x=1$ 处的极限.

解　因为

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(x+1)=1,$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} x^2=0,$$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$，所以 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$不存在.

因为

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-} x^2=1,$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+} 1=1,$$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$，所以 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1$.

三、无穷小与无穷大

微课

1. 无穷小

案例 1.15（**洗涤效果**） 在用洗衣机清洗衣物时，清洗次数越多，衣物上残留的污渍就越少. 当洗涤次数无限增大时，衣物上的污渍趋于零.

案例 1.16（**单摆运动**） 单摆离开铅直位置的偏度可以用角 θ 来度量，如图 1.20 所示. 这个角可规定当偏到一方（如右方）时为正，而偏到另一方（如左方）为负. 如果让单摆自己摆，则由于机械摩擦力和空气阻力，振幅就不断地减小. 在这个过程中，角 θ 越来越小，趋向于零.

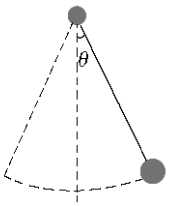


图 1.20

在对许多事物进行研究时，常遇到事物数量的变化趋势为零.

定义 1.7 在自变量某一变化过程中，变量 X 的极限为零，则称 X 为自变量在此变化过程中的**无穷小量**（简称**无穷小**），记作 $\lim X=0$，其中，lim 可表示 $n\to\infty$；$x\to x_0$，$x\to\infty$等.

注意：无穷小是个变量（函数），它在自变量某一变化过程中，其绝对值可以任意小，要多小就多小. 零这个常数作为无穷小是特殊情形，因为如果 $f(x)\equiv 0$，其绝对值可以任意小，或者说，常数零在自变量的任何一个变化过程中，极限总为零，因此零是可以作为无穷小的唯一的常数.

例如：因为 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}=0$，故函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$是 $x\to-\infty$时的无穷小.

又例如：因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$，故函数 $y=\dfrac{1}{x}$是 $x\to\infty$时的无穷小.

定理 1.4（**无穷小与函数极限的关系**） 在自变量 x 的某一变化过程中，函数 $f(x)$具有极限 A 的充要条件是 $f(x)=A+\boldsymbol{\alpha}$，其中 $\boldsymbol{\alpha}$ 是自变量 x 在同一变化过程中的无穷小.

定理证明从略.

例如：因为$\dfrac{1+x^3}{2x^3}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2x^3}$，而 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{2x^3}=0$，所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x^3}{2x^3}=\dfrac{1}{2}$.

无穷小的代数性质：

性质 1.1 有限个无穷小之和仍是无穷小.

性质 1.2　有界变量与无穷小之积仍是无穷小.

性质 1.3　常数与无穷小之积是无穷小.

性质 1.4　有限个无穷小之积仍是无穷小.

【例 1.11】　求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arctan x}{x}$.

解　当 $x\to\infty$ 时，分子和分母的极限都不存在. 若把 $\dfrac{\arctan x}{x}$ 视为 $\arctan x$ 与 $\dfrac{1}{x}$ 的乘积，由于 $\dfrac{1}{x}$ 是当 $x\to\infty$ 时的无穷小，而 $|\arctan x|<\dfrac{\pi}{2}$ 是有界变量，因此根据有界变量与无穷小之积仍是无穷小可得：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arctan x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\cdot\arctan x=0$.

2. 无穷大

定义 1.8　在自变量的某一变化过程中，变量 x 的绝对值 $|X|$ 无限增大，就称 X 为自变量在此变化过程中的**无穷大量**（简称**无穷大**），记为 $\lim X=\infty$，其中，lim 可表示 $n\to\infty$；$x\to x_0$，$x\to\infty$ 等.

注意：这里 $\lim x=\infty$ 只是沿用了极限符号，并不意味着变量 X 存在极限，无穷大（∞）不是数，不可与绝对值很大的数混为一谈. 无穷大是指绝对值可以任意变大的变量.

例如：因为 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}=\infty$，故函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 为当 $x\to0$ 时的无穷大.

又例如：因为 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan x=\infty$，故函数 $y=\tan x$ 为当 $x\to\dfrac{\pi}{2}$ 时的无穷大.

3. 无穷小与无穷大的关系

定理 1.5　在自变量的同一变化过程中：

（1）如果 X 为无穷大，则 $\dfrac{1}{X}$ 为无穷小；

（2）如果 $X\neq0$ 且 X 为无穷小，则 $\dfrac{1}{X}$ 为无穷大.

定理证明从略.

据此定理，关于无穷大的问题都可转化为无穷小来讨论.

四、极限的运算

微课

1. 极限的四则运算法则

案例 1.17　用列表法或图形法讨论较复杂的函数的极限，不仅工作量大，而且还不一定准确，如求 $\lim\limits_{x\to0}\left(x^2-\dfrac{\cos x}{10\,000}\right)$，表 1.4 列出了函数 $y=x^2-\dfrac{\cos x}{10\,000}$ 在 $x=0$ 处附近取值时的函数值.

表 1.4

x	±0.5	±0.1	±0.01	$\rightarrow$	0
$x^2-\frac{\cos x}{10\,000}$	0.249 91	0.009 90	0.000 000 005	$\rightarrow$	?

我们可能会估计 $\lim\limits_{x\to0}\left(x^2-\frac{\cos x}{10\,000}\right)=0$，但这个结果是错误的. 因此，我们需要研究函数极限的运算法则. 以下在同一式子中考虑自变量的同一变化过程，其主要定理如下：

定理 1.6 如果 $\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，那么

(1) $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$；

(2) $\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B$；

(3) $\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\frac{A}{B}(B\neq0)$.

定理证明从略.

推论 1 常数可以提到极限号前，即 $\lim[Cf(x)]=C\lim f(x)$

推论 2 若 $\lim f(x)=A$，且 n 为正整数，则 $\lim[f(x)]^n=[\lim f(x)]^n=A^n$.

【例 1.12】 求 $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^3-1}{x^2-5x+3}$.

解 运用定理及其推论可得：

$$\lim_{x\to2}\frac{x^3-1}{x^2-5x+3}=\frac{\lim\limits_{x\to2}(x^3-1)}{\lim\limits_{x\to2}(x^2-5x+3)}=\frac{\lim\limits_{x\to2}x^3-\lim\limits_{x\to2}1}{\lim\limits_{x\to2}x^2-5\lim\limits_{x\to2}x+\lim\limits_{x\to2}3}$$

$$=\frac{(\lim\limits_{x\to2}x)^3-1}{(\lim\limits_{x\to2}x)^2-5\cdot2+3}=\frac{2^3-1}{2^2-10+3}=-\frac{7}{3}.$$

【例 1.13】 求 $\lim\limits_{x\to3}\frac{x-3}{x^2-9}$.

分析：所给函数的特点是：当 $x\to3$ 时，分子、分母的极限都为零，但它们都有趋向 0 的公因子 $x-3$；当 $x\to3$ 时，可约去 $x-3$ 这个为零的公因子.

解 $\lim\limits_{x\to3}\frac{x-3}{x^2-9}=\lim\limits_{x\to3}\frac{x-3}{(x-3)(x+3)}=\lim\limits_{x\to3}\frac{1}{x+3}=\frac{\lim\limits_{x\to3}1}{\lim\limits_{x\to3}(x+3)}=\frac{1}{6}$.

【例 1.14】 求 $\lim\limits_{x\to1}\frac{2x-3}{x^2-5x+4}$.

分析：所给函数的特点是：当 $x\to1$ 时，分子的极限不为零，分母的极限为零，因此不能直接运用商的极限运算法则. 对于这类题目应先计算其倒数的极限，再运用无穷大与无穷小的关系得出结果.

解 $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-5x+4}{2x-3}=\frac{1^2-5\cdot1+4}{2\cdot1+3}=0$，根据无穷大与无穷小的关系得

$$\lim_{x\to1}\frac{2x-3}{x^2-5x+4}=\infty.$$

【例 1.15】 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3+4x^2+2}{7x^3+5x^2-3}$.

解 所给函数的特点是：当 $x\to\infty$ 时，分子和分母都趋于无穷大，因此不能直接运用商

的极限运算法则. 对于这类题目先用 x^3 去除分子及分母，然后求极限：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+4x^2+2}{7x^3+5x^2-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{4}{x}+\frac{2}{x^3}}{7+\frac{5}{x}-\frac{3}{x^3}}=\frac{3}{7}.$$

【例 1.16】　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x-1}{2x^3-x^2+5}$.

解　先用 x^3 去除分子及分母，然后求极限：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-2x-1}{2x^3-x^2+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}}{2-\frac{1}{x}+\frac{5}{x^3}}=\frac{0}{2}=0.$$

【例 1.17】　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-x^2+5}{3x^2-2x-1}$.

解　因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x-1}{2x^3-x^2+5}=0$，所以

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-x^2+5}{3x^2-2x-1}=\infty.$$

上述三个函数，当自变量趋于无穷大时，其分子、分母都趋于无穷大，这类极限称为“$\frac{\infty}{\infty}$”型极限，对于它们不能直接运用商的运算法则，而应采用分子分母同除自变量 x 的最高次的方法求极限.

一般，当 $a_n\neq0$，$b_n\neq0$，m 和 n 为非负整数时，有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_0}=\begin{cases}0, & n<m,\\ \dfrac{a_n}{b_n}, & n=m,\\ \infty, & n>m.\end{cases}$$

此结果可作为公式使用，但要注意只适用于 $x\to+\infty$，$x\to-\infty$ 和 $x\to\infty$ 的情形.

【例 1.18】　求 $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{x^2}{x^2-4}-\dfrac{1}{x-2}\right)$.

分析：此例也称“$\infty-\infty$”型极限，一般处理的方法为通分，再运用前面介绍过的求极限的方法计算.

解　$\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{x^2}{x^2-4}-\dfrac{1}{x-2}\right)=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-x-2}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)(x+1)}{(x+2)(x-2)}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x+1}{x+2}=\dfrac{3}{4}$.

2. 复合函数的极限法则

定理 1.7　设函数 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 满足以下两个条件：

(1) $\lim\limits_{u\to a}f(u)=A$；

(2) 当 $x\neq x_0$ 时，$\varphi(x)\neq a$，且 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$，

则 $\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=\lim\limits_{u\to a}f(u)=A$.

定理证明从略.

若 $f(u)$是基本初等函数，a 又是 $f(u)$的定义域内的点，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=f(a)$，即 $\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=f[\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)]$（在第三节有了连续函数的概念后，此式只要 $f(u)$在 a 点连续即成立）.

【例 1.19】 求 $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{\dfrac{x^2-9}{x-3}}$.

解 $y=\sqrt{\dfrac{x^2-9}{x-3}}$是由 $y=\sqrt{u}$ 与 $u=\dfrac{x^2-9}{x-3}$复合而成的.

因为 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}=6$，所以 $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{\dfrac{x^2-9}{x-3}}=\lim\limits_{u\to 6}\sqrt{u}=\sqrt{6}$.

【例 1.20】 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1-\sqrt{1+x^2}}$.

分析：根据复合函数的极限运算法则知，分子和分母均为零，因此，需先将分母有理化，约去关于 x 的公因子，再运用前面介绍过的求极限的方法计算.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1-\sqrt{1+x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2(1+\sqrt{1+x^2})}{1-(1+x^2)}=-\lim\limits_{x\to 0}(1+\sqrt{1+x^2})=-2$.

五、两个重要极限

微课

对这两个重要极限我们不作证明，仅用列表法来给出函数的变化趋势.

1. 第一个重要极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

通过列表法（见表 1.5）可以看出当 $x\to 0$ 时，函数 $y=\dfrac{\sin x}{x}\to 1$.

表 1.5

x	± 1	± 0.5	± 0.1	± 0.01	…
$\dfrac{\sin x}{x}$	0.841 471	0.958 85	0.998 33	0.999 98	…

【例 1.21】 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1}{\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x}=1$.

【例 1.22】 求 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sin(x^2-9)}{x-3}$.

解 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sin(x^2-9)}{x-3}=\lim\limits_{x^2-9\to 0}\dfrac{\sin(x^2-9)}{x^2-9}\lim\limits_{x\to 3}(x+3)=1\times 6=6$.

【例 1.23】 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\dfrac{x}{2}}{\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\right)^2=\dfrac{1}{2}\cdot 1^2=\dfrac{1}{2}$.

2. 第二个重要极限：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$（或 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$）.

通过列表法（见表 1.6）可以看出当 $x\to\infty$ 时，函数 $y=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}\to\mathrm{e}$.

表 1.6

x	1	2	5	10	100	1 000	10 000	100 000	100 000 000	…
$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}$	2	2.25	2.488	2.594	2.705	2.717	2.718 15	2.718 28	2.718 281 82	…

【例 1.24】 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{x}$.

解 令 $t=-x$，则 $x\to\infty$ 时，$t\to\infty$. 于是

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-t}=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}}=\frac{1}{\mathrm{e}}.$$

或

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-x}\right)^{-x\cdot(-1)}=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-x}\right)^{-x}\right]^{-1}=\mathrm{e}^{-1}=\frac{1}{\mathrm{e}}.$$

【例 1.25】 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln\left[\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]=\ln\mathrm{e}=1.$

【例 1.26】 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{x}-1}{x}$.

解 令 $u=\mathrm{e}^{x}-1$，则 $x=\ln(1+u)$，当 $x\to 0$ 时 $u\to 0$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x}-1}{x}=\lim_{u\to 0}\frac{u}{\ln(1+u)}=1.$$

【例 1.27】 设某人以本金 A_0 元进行一项投资，投资的年利率为 r.

如果以年为单位计算复利（即每年计息一次，并把利息加入下年的本金，重复计息），则 t 年后，资金总额将变为 $A_0(1+r)^{t}$（元）；

如以月为单位计算复利（即每月计息一次，并把利息加入下月的本金，重复计息），则 t 年后，资金总额将变为 $A_0\left(1+\dfrac{r}{12}\right)^{12t}$（元）；

以此类推，如以天为单位计算复利，则 t 年后，资金总额将变为 $A_0\left(1+\dfrac{r}{365}\right)^{365t}$（元）；

一般地，若以 $\dfrac{1}{n}$ 年为单位计算复利，则 t 年后，资金总额将变为 $A_0\left(1+\dfrac{r}{n}\right)^{nt}$（元）.

现在让 $n\to\infty$，即每时每刻计算复利（称为**连续复利**），则 t 年后资金总额将变为：

$$\lim_{n\to\infty}A_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}=\lim_{n\to\infty}A_0\left[\left(1+\frac{r}{n}\right)^{\frac{n}{r}}\right]^{rt}=A_0\mathrm{e}^{rt}\text{（元）}.$$

微课

六、无穷小的比较

根据无穷小的代数性质，我们知道，在同一过程中的两个无穷小的和差及乘积仍为无穷小，但它们的商却不一定是无穷小.

例如：当 $x\to 0$ 时，$3x$、x^2、$\sin x$ 都是无穷小，而

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{3x}=0,\ \lim_{x\to 0}\frac{3x}{x^2}=\infty,\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{3x}=\frac{1}{3}.$$

上述不同情况的出现，是因为不同的无穷小趋向于零的快慢程度的差异所致，就上面例子来说，在 $x\to 0$ 的过程中，$x^2\to 0$ 比 $3x\to 0$ 要快些，反过来 $3x\to 0$ 比 $x^2\to 0$ 要慢些，而 $\sin x\to 0$ 与 $3x\to 0$ 则快慢相仿.

为了比较在同一变化过程中两个无穷小趋于零的快慢，我们引进**无穷小的阶**的概念.

定义 1.9 设 $\alpha=\alpha(x)$，$\beta=\beta(x)$ 都是自变量同一变化过程中的无穷小，则

(1) 如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=c(c\neq 0)$，则称 β 与 α 是**同阶无穷小**. 特别地，如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=1$，则称 β 与 α 是**等价无穷小**，记作 $\beta\sim\alpha$ 或 $\alpha\sim\beta$.

(2) 如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0$，则称 β 是 α 的**高阶无穷小**，记作 $\beta=o(\alpha)$.

(3) 如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\infty$，则称 β 是 α 的**低阶无穷小**.

例如，因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\left(\frac{\sin(x/2)}{x/2}\right)^2=\frac{1}{2},$$

所以当 $x\to 0$ 时，$1-\cos x$ 与 x^2 是同阶无穷小，或者说 $1-\cos x$ 与 $\dfrac{1}{2}x^2$ 是等价无穷小，即 $1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2\left(\text{因为 }\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2/2}=1\right)$.

等价无穷小的替换原理：设 $\alpha,\beta,\alpha',\beta'$ 是自变量在同一变化过程中的无穷小，若 $\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$ 且 $\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$ 存在，则 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}$ 也存在，且 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$.

证明 $\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}=\lim\left(\dfrac{\beta'}{\alpha'}\cdot\dfrac{\beta}{\alpha}\cdot\dfrac{\alpha}{\beta}\right)=\lim\dfrac{\beta'}{\beta}\cdot\lim\dfrac{\beta}{\alpha}\cdot\lim\dfrac{\alpha}{\alpha'}=\lim\dfrac{\beta}{\alpha}$.

这个性质表明：求两个无穷小之比的极限时，分子及分母都可用等价无穷小来代替，这往往可使计算简化.

【例 1.28】 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{\sin 5x}$.

解 因为当 $x\to 0$ 时，$\tan 2x\sim 2x$，$\sin 5x\sim 5x$，故

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\sin 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{5x}=\frac{2}{5}.$$

【例 1.29】 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x^3-x^2+2x}$.

解 因为当 $x\to 0$ 时，$\tan x\sim x$，$x^3-x^2+2x\sim 2x$，故

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x^3-x^2+2x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{2x}=\frac{1}{2}.$$

【例 1.30】 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$.

解 因为当 $x\to 0$ 时，$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$，$\tan x\sim x$，从而 $(1-\cos x)\tan x\sim\dfrac{1}{2}x^3$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)\tan x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^3}{x^3}=\frac{1}{2}.$$

注意：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}\neq\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-x}{x^3}=0$，因为 $\tan x-\sin x$ 与 $x-x$ 不等价. 无穷小的替换，必须是两个无穷小之比或无穷小为极限式中的乘积，而且代换后的极限存在，才可以使用. 加减项的无穷小不能用等价无穷小代换.

常见的等价无穷小有（当 $x\to 0$ 时）：$x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x\sim\ln(1+x)\sim e^x-1$；$1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$；$(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x(\alpha\neq 0)$；$a^x-1\sim x\ln a$.

【例 1.31】　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x^2)^{\frac{1}{3}}-1}{\cos x-1}$.

解　因为当 $x\to 0$ 时，$(1+x^2)^{\frac{1}{3}}-1\sim\dfrac{1}{3}x^2$，$\cos x-1\sim-\dfrac{1}{2}x^2$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x^2)^{\frac{1}{3}}-1}{\cos x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^2}{-\frac{1}{2}x^2}=-\frac{2}{3}.$$

习题 1.2

1. 观察如下数列 $\{x_n\}$ 一般项 x_n 的变化趋势，写出它们的极限.

(1) $x_n=\dfrac{1}{3^n}$；　　(2) $x_n=(-1)^n\dfrac{1}{n}$；

(3) $x_n=3+\dfrac{1}{n^2}$；　　(4) $x_n=\dfrac{n-1}{n+1}$；

(5) $x_n=n(-1)^n$；　　(6) $x_n=n-\dfrac{1}{n}$.

2. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x<3,\\ 0, & x=3,\\ 2x-3, & x>3,\end{cases}$ 利用函数极限存在的充要条件判断 $\lim\limits_{x\to 3}f(x)$ 是否存在？

3. 设函数 $f(x)=\begin{cases}e^x+1, & x>0,\\ 2x+b, & x\leqslant 0,\end{cases}$ 要使极限 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 存在，b 应取何值？

4. 在下列各题中，指出哪些是无穷小？哪些是无穷大？

(1) $\dfrac{1+2x}{x^2}(x\to\infty)$；　　(2) $\dfrac{x+1}{x^2-9}(x\to 3)$；

(3) $\dfrac{\sin x}{1+\cos x}(x\to 0)$；　　(4) $e^{\frac{1}{x}}(x\to 0)$.

5. 计算下列各极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\cos\dfrac{1}{x-1}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\dfrac{1}{x}$.

6. 计算下列各极限.

(1) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x+1}{x^2+1}$；

(2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$；

(3) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+8}{x+2}$；

(4) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x}$；

(5) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(2-\dfrac{1}{x^2}\right)$；

(6) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{3}{x^3-1}\right)$.

7. 计算下列各极限.

(1) $\lim\limits_{x\to -3}\sqrt{x^2-x+8}$；

(2) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\arcsin\sqrt{x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\ln 2^x$；

(4) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{5x-8}-\sqrt{x}}{x-2}$.

8. 已知 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax+b}{1-x}=1$，试求 a 与 b 的值.

9. 计算下列各极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{x}$；

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 5x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{x\sin x}$；

(4) $\lim\limits_{n\to \infty}3^n\sin\dfrac{x}{3^n}(x\neq 0)$.

10. 计算下列各极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{1}{x}}$；

(2) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{1+x}{x}\right)^{3x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{1+x}{x+2}\right)^{x}$；

(4) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{2\sec x}$.

第三节　函数的连续性与间断点

学习目标

1. 理解函数连续性的定义，会求函数的连续区间.
2. 了解函数间断点的概念，会判别函数间断点的类型.
3. 知道闭区间上连续函数的几个性质.

自然界中有很多现象，如气温的变化、河水的流动、植物的生长等，都是连续变化的. 这些现象在函数关系上的反映，就是函数的连续性. 函数的连续性是与函数的极限密切相关的重要概念，这个概念的建立为进一步深入地研究函数的微分和积分及其应用打下了基础.

一、函数的连续性

微课

案例 1.18（**人体高度的连续变化**）　我们知道，人体的高度 h 是时间 t 的函数 $h(t)$，h 随着 t 的变化而连续变化. 事实上，当 Δt 的变化很微小时，人的高度 Δh 的变化也很微小，即

$\Delta t \to 0$ 时，$\Delta h \to 0$.

下面我们先引入增量的概念，然后来描述连续性，并引入连续性的定义.

设变量 y 从它的一个初值 y_1 变到终值 y_2，终值与初值的差 y_2-y_1 就叫作**变量 y 的增量**，记作 Δy，即 $\Delta y=y_2-y_1$.

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某一个邻域内是有定义的，当自变量 x 在该邻域内从 x_0 变到 $x_0+\Delta x$ 时，函数 y 相应地从 $f(x_0)$ 变到 $f(x_0+\Delta x)$，因此函数 y 的对应增量为

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0).$$

定义 1.10　设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某一个邻域内有定义，如果当自变量的增量 $\Delta x=x-x_0$ 趋于零时，对应的函数的增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 也趋于零，即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0 \text{ 或 } \lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0),$$

那么就称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处**连续**.

【例 1.32】　证明函数 $y=x^2$ 在点 x_0 连续.

证明　当自变量 x 的增量为 Δx 时，函数 $y=x^2$ 对应的增量为：

$$\Delta y=(x_0+\Delta x)^2-x_0^2=2x_0\Delta x+(\Delta x)^2,$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}[2x_0\Delta x+(\Delta x)^2]=0.$$

所以 $y=x^2$ 在点 x_0 连续.

从定义可以看出函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续，则函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的极限等于函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的函数值.

定义 1.11　如果 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$，则称 $y=f(x)$ 在点 x_0 处**左连续**；如果 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$，则称 $y=f(x)$ 在点 x_0 处**右连续**.

左右连续与连续的关系：

函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续 $\Leftrightarrow$ 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处左连续且右连续.

在区间上每一点都连续的函数，叫作该区间上的**连续函数**，或者说函数在该区间上连续. 如果区间包括端点，那么函数在右端点连续是指左连续，在左端点连续是指右连续.

【例 1.33】　试证明 $f(x)=\begin{cases}2x+1, & x\leqslant 0,\\ \cos x, & x>0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续.

证明　因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\cos x=1$，$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(2x+1)=1$ 且 $f(0)=1$，即

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^-}f(x)=f(0).$$

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

注意：一切初等函数在其定义区间内都是连续的.

微课

二、函数的间断点

案例 1.19（**电流的连续性**）　导线中电流通常是连续变化的，但当电流增加到一定的程度，会烧断保险丝，电流就突然为 0，这时连续性被破坏而出现间断.

案例 1.20（**矩形波的连续性**）　无线电技术中会遇到如图 1.21 所示的电压波形（矩形波），显然电压在 $-2l$，$-l$，0，l，$2l$ 等处发生间断.

定义 1.12 函数 $f(x)$不连续的点 x_0 称为函数 $f(x)$的**间断点**.

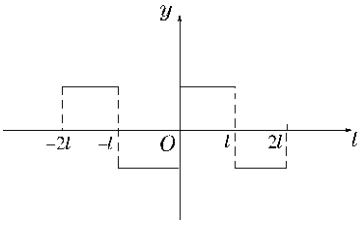


图 1.21

设函数 $f(x)$在点 x_0 的某去心邻域内有定义. 由定义 1.11 知,如果函数 $f(x)$有下列三种情形之一:

(1) 在 x_0 没有定义;

(2) 虽然在 x_0 有定义,但 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$不存在;

(3) 虽然在 x_0 有定义且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在,但 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$,则函数 $f(x)$在点 x_0 处间断.

通常把间断点分成两类:

如果 x_0 是函数 $f(x)$的间断点,且左极限 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$及右极限 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$都存在,那么 x_0 称为函数 $f(x)$的**第一类间断点**. 在第一类间断点中,左、右极限相等者称为**可去间断点**,不相等者称为**跳跃间断点**.

如果 x_0 是函数 $f(x)$的间断点,且左极限 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$及右极限 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$至少有一个不存在,那么 x_0 称为函数 $f(x)$的**第二类间断点**. 在第二类间断点中,函数趋向于无穷称为**无穷间断点**,函数出现振荡,称为**振荡间断点**.

【例 1.34】 考察函数 $y=\tan x$ 在 $x=\dfrac{\pi}{2}$处的连续性.

解 正切函数 $y=\tan x$ 在 $x=\dfrac{\pi}{2}$处没有定义,则点 $x=\dfrac{\pi}{2}$是函数 $\tan x$ 的间断点. 因为 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \tan x=\infty$,故称 $x=\dfrac{\pi}{2}$为函数 $\tan x$ 的无穷间断点.

【例 1.35】 考察函数 $y=\sin\dfrac{1}{x}$在 $x=0$ 处的连续性.

解 函数 $y=\sin\dfrac{1}{x}$在点 $x=0$ 没有定义,则点 $x=0$ 是函数 $\sin\dfrac{1}{x}$的间断点. 当 $x\to 0$ 时,函数值在 -1 与 $+1$ 之间变动无限多次,所以点 $x=0$ 称为函数 $\sin\dfrac{1}{x}$的振荡间断点.

【例 1.36】 考察函数 $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$在 $x=1$ 处的连续性.

解 函数 $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$在 $x=1$ 没有定义,则点 $x=1$ 是函数的间断点. 因为 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2$,如果补充定义:令 $x=1$ 时 $y=2$,则所给函数在$x=1$ 成为连续. 所以 $x=1$ 称为该函数的可去间断点.

【例 1.37】 考察函数 $f(x)=\begin{cases} x-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ x+1, & x>0 \end{cases}$在 $x=0$ 处的连续性.

解 因为 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x-1)=-1$,

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x+1)=1$,

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)\neq \lim_{x\to 0^+} f(x),$$

所以极限 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在，$x=0$ 是函数 $f(x)$ 的间断点. 因函数 $f(x)$ 的图形在 $x=0$ 处产生跳跃现象，我们称 $x=0$ 为函数 $f(x)$ 的跳跃间断点(如图 1.22 所示).

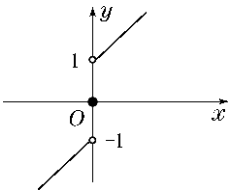


图 1.22

三、闭区间上连续函数的性质

在闭区间上连续函数具有一些重要的性质，下面我们将不加证明予以介绍.

定理 1.8(最大值和最小值定理)　在闭区间上连续的函数在该区间上一定能取得它的最大值和最小值.

定理证明从略.

图 1.23 给出了该定理的几何直观图形.

即设 $f(x)\in[a,b]$，则存在 $\xi_1,\xi_2\in[a,b]$，使得

$$f(\xi_1)=\min_{a\leqslant x\leqslant b} f(x),$$

$$f(\xi_2)=\max_{a\leqslant x\leqslant b} f(x).$$

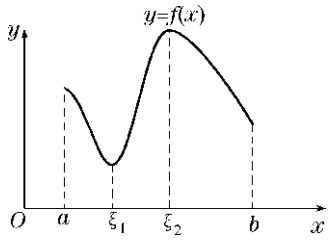


图 1.23

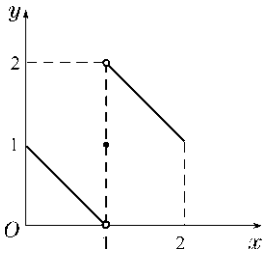


图 1.24

注意：如果函数在开区间内连续，或函数在闭区间上有间断点，那么函数在该区间上就不一定有最大值或最小值.

例如：在开区间 (a,b) 上，连续函数 $y=x$ 无最大值和最小值.

又如，函数 $y=f(x)=\begin{cases}-x+1, & 0\leqslant x<1,\\ 1, & x=1,\\ -x+3, & 1<x\leqslant 2\end{cases}$ 在闭区间 $[0,2]$ 上无最大值和最小值(如图 1.24).

定理 1.9(有界性定理)　在闭区间上连续的函数一定在该区间上有界.

定理证明从略.

如果有 x_0 使 $f(x_0)=0$，则 x_0 称为函数 $f(x)$ 的**零点**.

定理 1.10(零点定理)　设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号，那么在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=0$.

定理证明从略.

图 1.25 给出了该定理的几何直观图形：如果连续曲线弧 $y=f(x)$ 的两个端点位于 x 轴的不同侧，那么这段弧与 x 轴至少有一个交点 ξ.

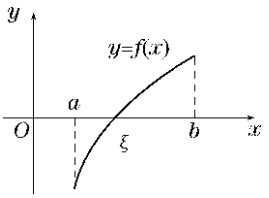


图 1.25

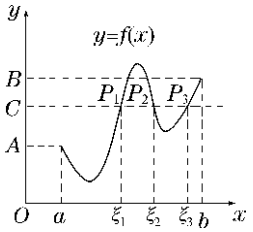


图 1.26

【例 1.38】 证明方程 $x^3-4x^2+1=0$ 在区间(0,1)内至少有一个根.

证明 函数 $f(x)=x^3-4x^2+1$ 在闭区间$[0,1]$上连续,又 $f(0)=1>0$,$f(1)=-2<0$.

根据零点定理,在(0,1)内至少存在一点 ξ,使得 $f(\xi)=0$,即 $\xi^3-4\xi^2+1=0$ $(0<\xi<1)$.

此等式说明方程 $x^3-4x^2+1=0$ 在区间(0,1)内至少有一个根是 ξ.

定理 1.11(介值定理) 设函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,且 $f(a)\neq f(b)$,那么,对于 $f(a)$与 $f(b)$之间的任意一个数 C,在开区间(a,b)内至少存在一点 ξ,使得

$$f(\xi)=C.$$

定理证明从略.

图 1.26 给出了该定理的几何直观图形:连续曲线 $y=f(x)$与水平直线 $y=C$ 至少相交于一点,图中点 P_1,P_2,P_3 都是曲线 $y=f(x)$与直线 $y=C$ 的交点.

推论 在闭区间上连续的函数必取得介于最大值 M 与最小值 m 之间的任何值.

设 $m=f(x_1)$,$M=f(x_2)$,而 $m\neq M$,在闭区间$[x_1,x_2]$(或$[x_2,x_1]$)上利用介值定理,就可以得到上述推论.

习题 1.3

1. 设函数 $f(x)=x^2-2x+5$,求下列条件下函数的增量.

(1) 当 x 由 2 变到 1; (2) 当 x 由 2 变到 $2+\Delta x$;

(3) 当 x 由 x_0 变到 $x_0+\Delta x$.

2. 如果 $f(x)$在 x_0 处连续,那么$|f(x)|$在 x_0 处是否也连续?

3. 设函数 $f(x)=\begin{cases}(1-x)^{\frac{1}{x}}, & x\neq 0,\\ k, & x=0\end{cases}$在点 $x=0$ 处连续,求 k 的值.

4. 使函数 $f(x)=\begin{cases}e^x+b, & x<0,\\ a, & x=0,\\ \dfrac{1}{x}\sin x+2, & x>0\end{cases}$在定义域内连续,常数 a,b 各应取何值?

5. 设某城市出租车白天的收费 y(单位:元)与路程 x(单位:km)之间的关系为:

$$f(x)=\begin{cases}5+1.2x, & 0\leqslant x\leqslant 7,\\ 13.4+2.1(x-7), & x>7.\end{cases}$$

试问 $f(x)$ 是连续函数吗？并求 $\lim\limits_{x\to 7} f(x)$.

6. 求下列函数的间断点并判断其类型.

(1) $y=\dfrac{x^2-1}{x^2-2x-3}$；　　(2) $y=\dfrac{1}{\cos x}$；

(3) $y=\dfrac{1}{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}}$.

7. 设 1 g 冰从 -40℃升到 x℃所需要的热量(单位：J)为：

$$f(x)=\begin{cases}2.1x+84, & -40\leqslant x\leqslant 0,\\ 4.2x+420, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

试问当 $x=0$ 时，函数是否连续？并解释其几何意义.

8. 一个停车场第一个小时(或不到一小时)收费 3 元，以后每小时(或不到整时)收费 2 元，每天最多收费 10 元. 讨论此函数的间断点，并说明其实际意义.

9. 研究函数 $f(x)=\begin{cases}x, & -1\leqslant x\leqslant 1,\\ 2-x, & x<-1 \text{ 或 } x>1\end{cases}$ 的连续性，并画出函数的图形.

10. 验证方程 $x\cdot 2^x=1$ 至少有一个小于 1 的正根.

本章小结

一、本章重难点

1. 函数的概念及其性质(单调性、奇偶性).
2. 基本初等函数的解析表达式、定义域、性质、图像.
3. 无穷小量的概念及运算性质.
4. 极限的计算方法(四则运算法则、两个重要极限).
5. 函数连续性的定义.

二、知识点概览

本章知识点请微信扫描右侧二维码阅览.

三、疑难解析与例题分析

本章疑难解析与例题分析请微信扫描右侧二维码阅览.

本章习题

一、单项选择题

1. 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\sin\dfrac{2}{x}+2^{\frac{\sin x}{x}}\right)$ 的值为　　(　　)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

2. 函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-a}{x-2}, & x\neq 2,\\ b, & x=2\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，a,b 为常数，则 $a-b=$　　(　　)

A. -2　　B. 0　　C. 2　　D. 4

3. 设当 $x\to 0$ 时，函数 $f(x)=\ln(1+kx^2)$ 与 $g(x)=1-\cos x$ 是等价无穷小，则常数 k 的值为（　　）

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. 1　　D. 2

4. 当 $x\to 0$ 时，下列无穷小中与 $f(x)=x\sin^2 x$ 同阶的是（　　）

A. $\cos x^2-1$　　B. $(1+x^2)^3-1$　　C. 3^x-1　　D. $\sqrt{1-x^3}-1$

5. 函数 $f(x)=\sin x$，当 $x\to 0^+$ 时，下列函数中是 $f(x)$ 的高阶无穷小的是（　　）

A. $\tan x$　　B. $\sqrt{1-x}-1$　　C. $x^2\sin\frac{1}{x}$　　D. $e^{\sqrt{x}}-1$

6. 函数 $f(x)=\frac{x-a}{x^2+x+b}$，$x=1$ 为其可去间断点，则常数 a,b 的值分别为（　　）

A. $1,-2$　　B. $-1,2$　　C. $-1,-2$　　D. $1,2$

7. $x=0$ 为函数 $f(x)=\begin{cases}e^x-1, & x<0,\\ 2, & x=0,\\ x\sin\frac{1}{x}, & x>0\end{cases}$ 的（　　）

A. 可去间断点　　B. 跳跃间断点　　C. 无穷间断点　　D. 连续点

8. 曲线 $y=\frac{x^2-6x+8}{x^2+4x}$ 的渐近线共有（　　）

A. 1 条　　B. 2 条　　C. 3 条　　D. 4 条

二、填空题

1. 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+kx}-1}{x}$，则常数 $k=$_____.

2. 设 $\lim\limits_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\frac{2}{x}$，则常数 $a=$_____.

3. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n$，则 $f(\ln 2)=$_____.

4. 要使函数 $f(x)=(1-2x)^{\frac{1}{x}}$ 在点 $x=0$ 处连续，则需补充定义 $f(0)=$_____.

5. 设函数 $f(x)=\begin{cases}(2-x)^{\frac{1}{x-1}}, & x<1,\\ a, & x\geqslant 1\end{cases}$ 在 $x=1$ 处连续，则常数 $a=$_____.

6. 曲线 $y=\frac{x^2+1}{2x}\sin\frac{1}{x}$ 的水平渐近线方程为_____.

三、计算题

1. $\lim\limits_{x\to 0}(1+2\tan x)^{\cot x}$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{x\sin 2x}$.

3. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{12}{x^3-8}\right)$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x\tan x}{\ln(1+x^2)}$.

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x}\right)^{3x}$.

6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{3x\tan x}$.

7. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$.

8. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{1}{1-\cos x}}$.

四、证明题

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,2a]$ $(a>0)$ 上连续，且 $f(0)=f(2a)\neq f(a)$，证明：在开区间 $(0,a)$ 上至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=f(\xi+a)$.

五、综合题

1. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-e^{x^2}+\frac{1}{2}a^2x^2}{x\arctan x}, & x<0,\\ 1, & x=0,\\ \dfrac{e^{ax}-1}{\sin 2x}, & x>0,\end{cases}$ 问常数 a 为何值时，(1) $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的连续点？(2) $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的可去间断点？(3) $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的跳跃间断点？

2. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+x)+2\sin x}{x}, & x\neq 0,\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $\boldsymbol{R}$ 内连续，求 a.

思政案例

中国伟大的数学家——刘徽

刘徽(约公元 225 年—295 年)，汉族，山东临淄人，魏晋期间伟大的数学家，中国古典数学理论的奠基者之一，是中国数学史上一个非常伟大的数学家，他的杰作《九章算术注》和《海岛算经》，是中国最宝贵的数学遗产，刘徽思维敏捷，方法灵活，既提倡推理又主张直观.他是中国最早明确主张用逻辑推理的方式来论证数学命题的人.刘徽的一生是为数学刻苦探求的一生.他虽然地位低下，但人格高尚.他不是沽名钓誉的庸人，而是学而不厌的伟人，他给我们中华民族留下了宝贵的财富.

刘徽的数学著作留传后世的很少，所留之作均久经辗转传抄.

他的主要著作有：《九章算术注》10 卷；《重差》1 卷，至唐代易名为《海岛算经》；《九章重差图》1 卷，可惜后两种都在宋代失传.

《九章算术》约成书于东汉之初，共有 246 个问题的解法.在许多方面，如解联立方程、分数四则运算、正负数运算、几何图形的体积面积计算等，都属于世界先进之列，但因解法比较原始，缺乏必要的证明，而刘徽则对此均做了补充证明.在这些证明中，显示了他在多方面的创造性的贡献.他是世界上最早提出十进小数概念的人，并用十进小数来表示无理数的立方根.在代数方面，他正确地提出了正负数的概念及其加减运算的法则；改进了线性方程组的解法.在几何方面，提出了“割圆术”，即将圆周用内接或外切正多边形穷竭的一种求圆面积和圆周长的方法.他利用割圆术科学地求出了圆周率 $\pi=3.14$ 的结果.他用割圆术，从直径为 2 尺的圆内接正六边形开始割圆，依次得正 12 边形、正 24 边形……，割得越细，正多边形面积和圆面积之差

越小，用他的原话说是“割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣.”他计算了3 072边形面积并验证了这个值.刘徽提出的计算圆周率的科学方法，奠定了此后千余年中国圆周率计算在世界上的领先地位.

刘徽在数学上的贡献极多，在开方不尽的问题中提出“求徽数”的思想，这方法与后来求无理根的近似值的方法一致，它不仅是圆周率精确计算的必要条件，而且促进了十进小数的产生；在线性方程组解法中，他创造了比直除法更简便的互乘相消法，与现今解法基本一致，并在中国数学史上第一次提出了“不定方程问题”；他还建立了等差级数前n项和公式，提出并定义了许多数学概念：如幂（面积）、方程（线性方程组）、正负数等等.刘徽还提出了许多公认正确的判断作为证明的前提.他的大多数推理、证明都合乎逻辑，十分严谨，从而把《九章算术》及他自己提出的解法、公式建立在必然性的基础之上.虽然刘徽没有写出自成体系的著作，但他注《九章算术》所运用的数学知识实际上已经形成了一个独具特色、包括概念和判断、以数学证明为其联系纽带的理论体系.

刘徽在割圆术中提出的“割之弥细，所失弥少，割之又割以至于不可割，则与圆合体而无所失矣”，这可视为中国古代极限观念的佳作.《海岛算经》一书中，刘徽精心选编了九个测量问题，这些题目的创造性、复杂性和富有代表性，都在当时为西方所瞩目.