



“十四五”职业教育国家规划教材

土木工程概论（第四版）
建设工程法规（第四版）
土木工程力学（第三版）
土木工程力学学习指导（第二版）
房屋建筑构造（第四版）
基础工程施工（第二版）
砌体结构工程施工（第二版）
建筑设备（第三版）
建筑工程施工组织（第二版）
建筑工程施工准备（第三版）
建筑工程安全技术与管理（第三版）



“十四五”职业教育江苏省规划教材 江苏省高等学校重点教材

建筑力学
建筑识图与绘图（第三版）
测量技术（第二版）
建筑材料与检测
钢结构与施工（第三版）
建筑设备识图与施工工艺（第二版）
建筑工程定额与计价

BIM技术应用（第二版）
BIM建模与信息应用（第二版）
建筑工程计量与计价（第四版）
建筑工程计量与计价实训（工作手册式）
安装工程计量与计价实训教程（第二版）
钢筋计算与翻样（第三版）
水利工程BIM技术
钢结构焊接技术（第二版）
装配式建筑概论（第三版）

人力资源和社会保障部规划教材

AutoCAD建筑设计与绘图（第三版）
地基与基础工程施工（第二版）
建筑施工组织与项目管理

建筑节能技术（第二版）
道路工程材料与检测

高等职业教育土建类“十五五”新形态融媒体教材

建设工程造价案例分析
工程造价原理（第二版）
工程造价基础
建筑工程定额与计价
市政工程计价
安装工程计量与计价
结构工程识图与钢筋翻样

◆ **土木工程力学**
工程制图基础（第三版）
工程制图基础习题集（第三版）
建设工程招投标与合同管理（第三版）
建筑制图与识图
建筑工程施工组织
智能建造施工技术

责任编辑 朱彦霖
装帧设计 朱 兰



土木工程力学

主 编 蒋凤昌 刘如兵 冯 莹



南京大学出版社

◆ 高等职业教育土建类“十五五”新形态融媒体教材 ◆

土木工程力学

主编 蒋凤昌 刘如兵 冯 莹

南京大学出版社

江苏省职业教育校企合作典型生产实践项目“现代建筑业绿色建造技术生产实践项目”(2023-19)
江苏省职业教育专业教学资源库建设项目“建筑工程技术”(2024-21) 资助项目
江苏高校“青蓝工程”优秀教学团队建设项目“道路与桥梁工程技术教学团队”(2024-14)
江苏省教学名师人才项目(2023-8-GX100)

土木工程力学

主 编 蒋凤昌 刘如兵 冯 莹
副主编 姜荣斌 燕俊松 刘远洋
参 编 朱水勇 奚晟翔 唐金来
孙贵荣 孟向惠 倪伟民
张卫兵 石泉彬 陆 洋
钱 军 刘家正
卡海衣沙尔江·巴合提亚尔
主 审 陈在铁



南京大学出版社

内容简介

本教材依据教育部《高职高专教育近土建类专业力学课程教学基本要求》，紧扣高职高专教育培养高技术应用型人才的目标，结合高等职业教育的特点，参照《工程结构通用规范》(GB 55001—2021)等国家现行工程建设标准及规范编写而成。教材积极贯彻“十五五”职业教育精神，注重融入课程思政元素，强调理论与工程创新应用相结合。

本教材内容丰富、知识面宽、综合性强，重点介绍力学基础知识、基本理论、基本技能及工程应用分析计算，不涉及高深的数学知识。主要内容为物体的受力分析、平面力系的合成与平衡、平面体系的几何组成分析、静定结构的内力计算、平面图形的几何性质、杆件的应力与强度计算、静定结构的变形与刚度计算、压杆稳定、超静定结构的内力分析和影响线。每单元均设置工程应用拓展、课后思考与练习等内容，帮助读者巩固所学知识并掌握其在工程实际中的相关应用。

本教材可作为高职院校建筑、桥梁、市政、道路、水利和设计等土建类专业教材，也可作为成人教育相关专业的力学教材，还可供相关工程技术人员参考使用。

图书在版编目(CIP)数据

土木工程力学 / 蒋凤昌, 刘如兵, 冯莹主编.

南京: 南京大学出版社, 2026. 8. — ISBN 978-7-305-30164-3

I. TU311

中国国家版本馆 CIP 数据核字第 20266YQ747 号

出版发行 南京大学出版社

社 址 南京市汉口路 22 号 邮 编 210093

书 名 土木工程力学

TUMU GONGCHENG LIXUE

主 编 蒋凤昌 刘如兵 冯 莹

责任编辑 朱彦霖 编辑热线 025-83592655

照 排 南京开卷文化传媒有限公司

印 刷 南京京新印刷有限公司

开 本 787 mm×1092 mm 1/16 印张 18 字数 461 千

版 次 2026 年 8 月第 1 版

印 次 2026 年 8 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-305-30164-3

定 价 49.80 元

网 址: <http://www.njupco.com>

官方微博: <http://weibo.com/njupco>

官方微信号: NJUYUNSHU

销售咨询热线: (025)83594756

* 版权所有, 侵权必究

* 凡购买南大版图书, 如有印装质量问题, 请与所购
图书销售部门联系调换

在土木工程的浩瀚星空中,力学犹如一颗璀璨的恒星,以其坚实的理论基础和强大的实践指导能力,为无数建筑工程和基础设施的诞生提供了关键支撑。《土木工程力学》这本教材,正是在这样的时代背景下应运而生,它承载着传承与创新的使命,致力于培养适应新时代需求的土木工程专业人才。

本教材依据教育部《高职高专教育近土建类专业力学课程教学基本要求》,紧扣高职高专教育培养高技术应用型人才的目标,结合高等职业教育的特点,参照《工程结构通用规范》(GB 55001—2021)等国家现行工程建设标准及行业规范编写而成。教材在满足高等院校土建类专业学生掌握土木工程力学基本原理、提升工程应用技能的前提下,还具有以下显著特点:

(1) 紧跟“十五五”职业教育的精神和方向,致力于培养高素质的技能型人才。教材编写紧扣《教育强国建设规划纲要(2024—2035年)》所强调的要求:“加快建设现代职业教育体系,致力于培养大国工匠、能工巧匠和高技能人才”,在内容安排上注重理论与实践的平衡,通过大量的工程案例指引,帮助学生将所学知识转化为实际能力。

(2) 融入课程思政元素,引入港珠澳大桥、国家体育场(鸟巢)、国家游泳馆(水立方)、北京故宫建筑群等国之重器及重大工程建设项目,让学生在领略大国工程的宏伟与精妙的同时,深刻理解力学原理在工程建设中的关键作用,润物细无声地激发学生学习兴趣,增强民族自豪感和责任感。

(3) 理论与工程创新应用相结合,在各单元的结尾,都设有“工程应用拓展”小节,将抽象的力学理论与实际工程中的创新应用紧密相连。通过定性的力学分析,拓展理论与实践的结合,帮助学生更好地理解力学知识,培养创新思维和解决实际问题的能力。



(4) 校企合作开发是本教材的坚实基础。在编写过程中,编写组积极与企业合作,邀请行业专家参与教材的编写和审核。行业专家带来了丰富的实践经验,使教材内容更加贴合行业实际需求。编写组及时将最新的工程技术和理念融入本教材,让学生在学习过程中接触行业前沿知识,为未来的职业发展打下坚实基础。

本教材由泰州职业技术学院蒋凤昌、刘如兵和冯莹任主编,姜荣斌、燕俊松和刘远洋任副主编,江苏永泰建设工程有限公司朱水勇和奚晟翔、锦宸集团有限公司唐金来和孙贵荣、正威科技集团有限公司孟向惠、中国江苏国际经济技术合作集团有限公司倪伟民和张卫兵、泰州职业技术学院石泉彬、陆洋、钱军和刘家正、伊犁职业技术学院卡海衣沙尔江·巴合提亚尔等老师参编,沙洲职业工学院陈在铁主审。编写负责人的分工如下:蒋凤昌负责绪论、单元3和单元7,刘如兵负责单元1,冯莹负责单元2、单元4和单元6,姜荣斌负责单元10,燕俊松负责单元5,刘远洋负责单元8和单元9。

本教材获得江苏省职业教育校企合作典型生产实践项目“现代建筑业绿色建造技术生产实践项目”(2023-19)、江苏省职业教育专业教学资源库建设项目“建筑工程技术”(2024-21)、江苏高校“青蓝工程”优秀教学团队建设项目“道路与桥梁工程技术教学团队”(2024-14)、江苏省教学名师人才项目(2023-8-GX100)的资助,在此对立项单位及部门表示感谢。

由于编者水平有限,教材中难免存在不足之处,恳请广大读者提出宝贵意见。

编 者

2026年7月6日

绪 论	001
0.1 土木工程力学的研究对象、内容和任务	001
0.2 刚体、变形固体及其基本假设	004
0.3 杆件及其变形的基本形式	005

模块一 力学基础与受力分析

单元 1 物体的受力分析	010
1.1 荷载的分类	011
1.2 静力学的基本概念、基本公理	013
1.3 约束和约束反力	019
1.4 物体与物系受力分析	025
1.5 工程应用拓展	028
单元 2 平面力系的合成与平衡	032
2.1 平面汇交力系的合成与平衡	034
2.2 平面力偶系的合成与平衡	039
2.3 平面一般力系的简化	040
2.4 平面一般力系的平衡与应用	044
2.5 平面平行力系的平衡与应用	047
2.6 物体系统的平衡问题求解	050
2.7 考虑摩擦的平衡问题	052



2.8 重心位置的确定	057
2.9 工程应用拓展	064

模块二 结构几何组成与静定结构内力分析

单元3 平面体系的几何组成分析	074
3.1 平面体系自由度和约束	075
3.2 平面几何不变体系的组成规则	078
3.3 平面体系的几何组成分析方法	080
3.4 静定结构与超静定结构的辨别	082
3.5 工程应用拓展	083
单元4 静定结构的内力计算	088
4.1 内力的概念与截面法	091
4.2 轴向拉压杆的内力	092
4.3 静定平面桁架杆件的内力	096
4.4 连接件的内力	102
4.5 扭转轴的内力	103
4.6 单跨静定梁的内力	106
4.7 多跨静定梁的内力	118
4.8 静定平面刚架内力	121
4.9 工程应用拓展	125

模块三 杆件强度、刚度与稳定性分析

单元5 平面图形的几何性质	136
5.1 截面的形心与静矩	137
5.2 轴惯性矩、极惯性矩	140
5.3 组合图形的轴惯性矩、平行移轴公式	142
5.4 形心主轴简介	144

5.5 工程应用拓展	147
单元 6 杆件的应力与强度计算	151
6.1 轴向拉压杆的应力	153
6.2 材料在拉伸和压缩时的力学性能	156
6.3 轴向拉压杆的强度计算	160
6.4 常用连接件的应力与强度计算	164
6.5 扭转圆轴的切应力与强度计算	167
6.6 平面弯曲梁的正应力与强度计算	171
6.7 平面弯曲梁的切应力与强度计算	177
6.8 简单组合变形的应力与强度计算	181
6.9 提高梁承载力的措施	185
6.10 应力集中及其利弊	187
6.11 工程应用拓展	190
单元 7 静定结构的变形与刚度计算	199
7.1 轴向拉压杆的变形	200
7.2 扭转圆轴的变形与刚度条件	203
7.3 平面弯曲梁的变形与刚度条件	206
7.4 单位荷载法计算结构的位移	212
7.5 图乘法	215
7.6 工程应用拓展	218
单元 8 压杆稳定	224
8.1 压杆稳定的概念	226
8.2 压杆的临界力	227
8.3 压杆的临界应力	230
8.4 压杆稳定计算	232
8.5 提高压杆稳定性的措施	234
8.6 工程应用拓展	236



模块四 超静定结构与影响线

单元 9 超静定结构的内力分析	242
9.1 超静定结构的概念	243
9.2 力法基本原理与力法方程	245
9.3 力法的计算步骤与示例	250
9.4 工程应用拓展	254
单元 10 影响线	257
10.1 影响线的概念	258
10.2 用静力法作简支梁的影响线	259
10.3 机动法作静定梁的影响线	264
10.4 利用影响线求量值	266
10.5 简支梁的最不利荷载位置	268
10.6 简支梁的内力包络图简介	271
10.7 工程应用拓展	273
参考文献	279



绪 论



知识目标

- ◆ 准确描述土木工程力学的研究对象、核心研究内容及其根本任务；
- ◆ 清晰阐述刚体与变形固体的概念，并复述材料力学中变形固体的连续性、均匀性、各向同性三大基本假设；
- ◆ 熟练列举杆件的四种基本变形形式及其工程实例。



能力目标

- ◎ 能够运用力学原理，初步识别和分析典型大国工程（如港珠澳大桥、三峡大坝）中的力学应用与受力特征；
- ◎ 能够初步构建工程思维，学会在分析过程中区分主要因素与次要因素，理解从实际工程结构到力学模型的简化过程。



素质目标

- ★ 增强民族自豪感和专业使命感，通过了解国家重大工程建设成就，激发将个人所学服务于国家建设的责任担当；
- ★ 树立科学严谨、实事求是的治学态度，理解力学假设在工程应用中的必要性与适用性；
- ★ 树立工程安全意识，认识到力学分析是保障结构安全、避免工程事故的基石，并在学习过程中逐步培养精益求精的工匠精神。

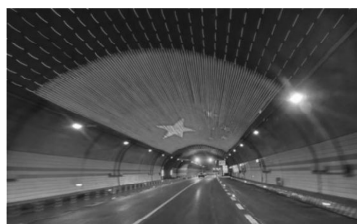
► 0.1 土木工程力学的研究对象、内容和任务 ◀

► 0.1.1 土木工程力学的研究对象

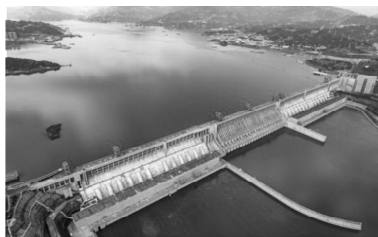
土木工程力学的研究对象包括各种各样的建筑物和构筑物，如图 0-1 所示，涵盖桥梁、隧道、水坝等大型基础设施和大型场馆、医院、工厂、学校、住宅小区等工业民用建筑，从国之重器到老百姓的生活居所，涉及范围非常广泛。



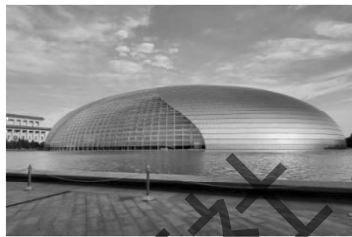
(a) 港珠澳跨海大桥



(b) 二郎山隧道



(c) 三峡大坝



(d) 国家大剧院



(e) 上海陆家嘴建筑群



(f) 北京故宫建筑群

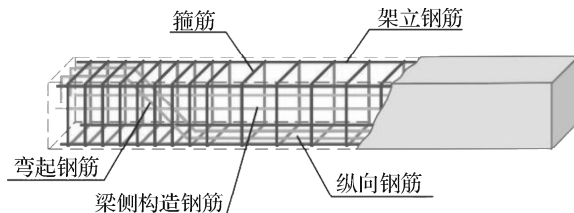
图 0-1

在建筑物和构筑物中,用于承受荷载、传递荷载并起骨架作用的物体或物体系统称为建筑结构,简称结构。组成结构的单个物体称为构件,根据构件的几何尺寸特征通常将结构分为杆系结构、薄壁结构和实体结构三种类型:(1) 一个方向的几何尺寸远大于另外两个方向的尺寸的构件称为杆件,由杆件组成的结构称为杆系结构,如梁、柱、屋架等都属于杆系结构;(2) 一个方向的几何尺寸远小于另外两个方向的尺寸的构件称为薄壁(又称为板或壳),由薄壁组成的结构称为薄壁结构,如屋面、墙面等都属于薄壁结构;(3) 三个方向的几何尺寸为同一个量级的构件称为块,由块组成的结构称为实体结构,如块式基础、挡土墙、堤坝等都属于实体结构。

土木工程力学的主要研究对象聚焦于建筑物中的杆件或杆件结构。例如钢结构工程中的钢柱、钢梁、钢连接件等构件(图 0-2),混凝土结构中的梁、柱、板及其钢筋骨架(图 0-3)。



图 0-2



梁的钢筋骨架

图 0-3

0.1.2 土木工程力学的研究内容

土木工程力学是一门按行业命名的力学学科,主要包含土木工程行业所用力学基础知识,可用于计算建筑结构的强度(抵抗破坏能力)、刚度(抵抗变形能力)和稳定性(抵抗失稳能力),判断建筑结构的设计、施工和运营使用阶段的安全性。本书所介绍的土木工程力学包括理论力学的静力学、材料力学和结构力学的基本内容,具体研究力的基本概念、力系等效简化、力系平衡及其应用、结构的几何组成分析以及强度、刚度、稳定性问题等。

0.1.3 土木工程力学的任务与研究方法

从远古时代起,人类就开始搭设房屋、桥梁等建筑结构。例如,早在 3 500 年以前,我国就已经采用柱、梁、檩、椽的木结构,建造房屋建筑,例如现存的应县木塔,始建于辽清宁二年(1056 年),是世界上现存最高大、最古老纯木结构楼阁式建筑(图 0-4),其佛宫寺释迦塔高 67.31 米,底部直径 30.27 米,总重量为 7 400 多吨,与意大利比萨斜塔、巴黎埃菲尔铁塔并称“世界三大奇塔”。再如由隋朝工匠李春主持建造的赵州桥(图 0-5),跨长 37.02 米,是由石块砌成的拱结构,拱半径 25 米,主拱的左、右两侧各有两个小拱,既利用了石料耐压的特性,又减轻了重量,还能增大泄洪能力。新时代,各种大跨度、高耸、复杂的新型建筑物更是随处可见,土木工程将来还会进一步向深地、深海、深空发展,凡是有人类活动的地方就有建筑物存在,服务于人类的居住、工作、学习、娱乐等生活需求。



图 0-4



图 0-5

所有建筑物在设计、施工、使用和拆除等阶段的全生命周期中,都要考虑各种各样的力的作用。例如,梁在施工中除了承受自身的重力外,还要承受施工人员以及施工机具的重力;墙体在使用过程中不仅要承受上部结构传来的压力,还要承受侧向风荷载和地震作用。因此,人们建造建筑物首先关心安全使用问题,在诸多荷载(力)作用下,结构是否能够保证不断裂、不倒塌、不发生破坏、变形不大、不影响使用;其次关心经济合理问题,如何选择科学合理的结构形式、建筑材料、几何尺寸,保证建筑结构在安全可靠的条件下有效控制建造成本。

为设计既安全可靠、又经济合理的结构提供必要的理论基础、计算方法和实验技术是土木工程力学的根本任务。

土木工程力学是土木工程领域极其重要的一门工程技术基础课,引导学生在接受力学



知识的同时也接受工程教育的启蒙,从非常强调逻辑性、严密性的纯理论思维方式逐渐向考虑主要因素、忽略次要因素的工程思维方式转变,慢慢适应“抓大放小”的工程处理习惯,这个过程也就是力学模型的构建过程。它是进一步学习许多专业课的基础,也可以直接解决许多工程实际问题。土木工程技术人员只有知道结构的受力情况、熟悉力的传递途径、能够预防结构或构件最可能发生的破坏等,才能保证高质量设计建筑结构及其施工方案,才能避免建筑施工中的失误或事故。

土木工程力学的研究综合了传统理论、实验方法和现代计算机分析方法。借助计算机数值计算可以解决一些较为复杂、无解析解的土木工程力学问题,也可以利用计算机整理数据、绘制实验曲线、显示图形等。力学加计算机已成为土木工程设计的主要手段。

学习土木工程力学要理论联系实际,除了认真听课和研读课本基本内容外,尽量结合工程实例、生活经验等加深对基本概念、基本理论、基本方法的理解,善于观察,勤于思考,坚持走“从实践至理论,再用理论指导实践”的学习研究之路。同时,通过独立按时完成相应内容的思考题与习题,进一步消化、巩固与吸收相关知识。

▶ 0.2 刚体、变形固体及其基本假设 ◀

▶▶ 0.2.1 刚体的概念

在力作用下其形状和大小不变的物体称为刚体。刚体中任意两点之间的距离始终保持不变。刚体是实际物体经过简化与抽象的理想模型,只有当实际物体的变形很小可忽略不计且为次要因素时,才将实际物体简化为刚体。例如,在静力学中对物体进行平衡分析时,实际物体作为刚体处理,可以忽略微小变形和应力分布,按物体变形前的原始尺寸进行计算,从而简化问题。

▶▶ 0.2.2 变形固体及其基本假设

构件的尺寸与形状变化是材料力学研究的重要内容,构件的变形成为必须考虑的主要因素,因此,材料力学研究对象是在力作用下尺寸与形状要发生变化的变形固体,简称变形体。变形固体包括钢、铁、塑料、木材、混凝土等。变形分为弹性变形与塑性变形。作用力去除后能恢复原状的变形称为弹性变形;作用力去除后不能恢复原状的变形称为塑性变形,变形残留在构件内部。多数构件在正常工作时只发生弹性变形,其变形量通常小于构件原始尺寸的千分之一,以原始尺寸进行静力平衡计算可保证足够的精度。弹性变形虽然很小,但体现了材料的变形规律以及由此引起构件的变形效应。材料力学问题大多数局限在弹性小变形范围内。

材料力学将变形固体模型化,作出如下假设:

(1) 连续性假设

假定变形固体在变形前后,其内部均毫无空隙地充满整个几何空间。据此假设,变形固体由于受力和变形产生的内力、位移等是连续的,可以用坐标的连续函数表示。

(2) 均匀性假设

认为材料在各处的力学性能完全相同。据此假设,从构件的任意位置取出微小部分(称

为单元体)进行研究,其研究成果可用于整个构件;也可将宏观试件经测试获得的力学性能,应用于该材料制成构件的任意微小部分。

(3) 各向同性假设

认为材料在不同方向上的力学性能完全相同。金属材料、玻璃、工程塑料、混凝土等为典型的各向同性材料;木材等为非各向同性材料,也称为各向异性材料。

连续、均匀和各向同性的变形固体,是实际工程材料在宏观层面简化与抽象的理想模型。实践证明,在此假设下建立的理论正确,得到的计算结果满足工程要求。

▶ 0.3 杆件及其变形的的基本形式 ◀

▶▶ 0.3.1 杆件的概念

杆件是指纵向(长度方向)尺寸比横向(垂直于长度方向)尺寸要大得多的构件,其横截面形心的连线称为轴线,且轴线与横截面垂直。轴线为直线的杆件称为直杆,否则称为曲杆。横截面沿轴线不变的直杆称为等直杆;横截面的大小沿轴线变化的杆件则称为变截面杆。

▶▶ 0.3.2 杆件的基本变形

杆件在不同的外力作用下,会发生不同的变形,主要有轴向拉伸(压缩)、剪切、扭转和弯曲四种基本变形之一,或者几种基本变形的组合。

1. 轴向拉伸或压缩

当直杆受到沿轴线的�外力作用时,杆件发生轴线方向的伸长或缩短,这种变形称为轴向拉伸(图 0-6(a))或压缩(图 0-6(b)),简称拉伸或压缩。例如,图 0-7 所示悬索桥的竖向拉杆在荷载作用下都会发生轴向拉伸变形。

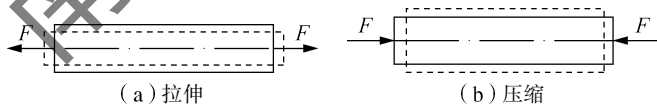


图 0-6



图 0-7



2. 剪切

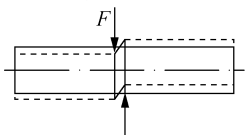


图 0-8

当杆件受到一对大小相等、方向相反、相距很近的横向力(与轴线垂直)作用时,杆件横截面发生沿力作用线相对错动的变形,这种变形称为剪切(图 0-8)。例如,图 0-9 所示车站雨篷弧形钢梁的支座,其钢销轴受到两侧支座耳件的剪切作用而发生剪切变形。



(a) 车站雨篷



(b) 钢支座

图 0-9

3. 扭转

当直杆受到作用面垂直于杆轴线的力偶(仅使物体转动)作用时,杆件发生绕轴线的相对转动,轴线保持直线,这种变形称为扭转(图 0-10)。例如,图 0-11 所示悬挑钢结构玻璃雨篷,其悬挑钢梁根部的混凝土主梁在雨篷钢结构作用下而发生扭转变形。

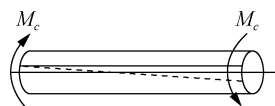


图 0-10



图 0-11

4. 弯曲

当直杆受到横向力或过轴线的纵向面内力偶作用时,杆件的轴线变为曲线,这种变形称为弯曲(图 0-12)。例如,图 0-13 所示大跨度钢结构主梁和次梁,在屋面荷载作用下发生弯曲变形。

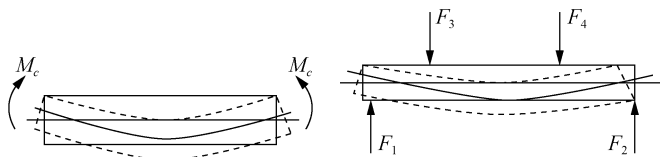


图 0-12



图 0-13

工程上将拉伸的杆件称为拉杆;压缩的杆件称为压杆或柱;扭转为主要变形的杆件称为轴;弯曲为主要变形的杆件称为梁。

单元小结

土木工程力学旨在为设计既安全可靠、又经济合理的结构提供必要的理论基础、计算方法和实验技术,研究内容包括理论力学中的静力学、材料力学和结构力学的基本内容,具体研究力的基本概念、力系等效简化、力系平衡及其应用、结构的几何组成分析以及强度、刚度、稳定性问题等。

结构正常使用时变形很小,在平衡分析中是次要因素,构件常作为刚体,按变形前原始尺寸代入计算;研究刚度问题时,变形变为主要因素,不容忽略。

杆件变形可以为轴向拉伸或压缩、剪切、扭转及弯曲四种基本变形之一,也可以为几种基本变形的组合。基本变形是建筑工程力学研究的基本内容。

思考题

0-1 请思考一下,如思考题 0-1 图所示,我国南海南沙某钻井平台建设工程在施工过程中需考虑哪些荷载的作用?



思考题 0-1 图



思考题 0-2 图

0-2 请思考一下,如思考题 0-2 图所示,我国某卫星发射基地的垂直工厂,其钢结构悬挑梁的受力变形包括哪些类型?

南京大学出版社

模块一

力学基础与应力分析

南京大学出版社





单元 1

物体的受力分析



知识目标

- ◆ 准确复述静力学的基本概念,解释力的三要素并掌握其矢量表示方法;
- ◆ 清晰阐述静力学四大公理的内容及其适用范围;
- ◆ 熟练识别工程中常见的七种约束类型,并能正确绘制其对应的约束反力。



能力目标

- ◎ 能够运用受力分析的基本步骤,独立、正确地绘制单个物体及简单物体系统的受力图;
- ◎ 能够灵活运用二力杆的判定条件与三力平衡汇交定理,简化复杂物体的受力分析过程;
- ◎ 能够结合工程实例(如雨篷结构),初步分析其荷载与约束,建立力学模型,为后续的平衡计算奠定基础。



素质目标

- ★ 建立严谨细致的工程绘图习惯,确保受力图中力的大小、方向、作用点表达清晰准确,杜绝漏画、多画、错画;
- ★ 树立相互作用与平衡的辩证思维;
- ★ 培养工程安全意识,认识到精准的受力分析是判断结构安全、预防工程事故的首要前提。

案例导入

在城市的商业综合体或公共建筑中,门厅外侧的雨篷是兼具功能性与美观性的“第一印象”:它既需为行人遮风挡雨,又要与建筑风格协调统一。如图 1-1 所示的某商业中心门厅雨篷,采用钢结构玻璃雨篷设计,悬挑长度达 3.2 米,主受力构件为一根 H 型钢钢梁(规格 H300×150×6.5×9),根部通过高强度螺栓与主体混凝土柱连接。这座看似简洁的雨篷,背后隐藏着如何让钢梁“站得稳、不变形”的核心力学问题,而解决这一问题的第一步,正是对其受力状态的精准分析。



图 1-1

雨篷的安全隐患往往源于“看不见的力”。某项目曾发生过雨篷钢梁根部螺栓断裂事故:经检测,钢梁在施工阶段因自重与堆载(如安装玻璃时的临时荷载)导致根部弯矩超设计值 30%,螺栓因受剪破坏引发局部垮塌。这一事故揭示:雨篷钢梁并非仅受“垂直向下的荷载”,其受力状态远比直观感受复杂——它需同时承受自重(恒载)、玻璃及装饰层的重量(活载)、风荷载(水平推力),甚至地震作用引起的惯性力。这些荷载通过雨篷面板传递至钢梁,最终集中作用于根部连接节点,形成弯矩、剪力与轴力的组合作用。

从设计到施工,雨篷钢梁的每一个细节都需基于受力分析:如何将复杂的“雨篷—钢梁—主体结构”体系简化为“悬臂梁”计算模型?哪些荷载需纳入分析(如雪荷载、风吸力)?钢梁的截面尺寸与连接方式如何匹配受力需求?这些问题,都需要从“物体的受力分析”入手——明确研究对象、识别荷载类型、绘制受力图、建立平衡方程,最终为后续的强度与变形计算奠定基础。

工程之美,始于安全的根基。雨篷钢梁的“受力密码”,正是通过系统的受力分析逐步破解的。本单元将带领我们从最基础的“物体受力分析”出发,掌握识别荷载、绘制受力图、应用平衡条件的核心技能,为破解更多工程结构的“安全密码”提供钥匙。

► 1.1 荷载的分类 ◀

► 1.1.1 主动力与约束反力

主动作用于物体、使物体产生运动或运动趋势的力称为主动力,主动力是使物体产生运



动趋势的原因。通俗地讲,主动力可以理解为原动力。工程中也称为荷载或载荷,例如重力、风雪压力、水土压力、气流吸力、电磁力等。

限制物体运动(包括移动、转动)的力称为约束反力,简称约束力,例如柱对屋架的支承力,桥墩对桥梁的支承力等。

作用在结构上的主动力、约束反力都是结构的外力。确定结构所受主动力、约束反力的过程称为结构的受力分析。

1.1.2 恒载与活载

根据荷载作用在结构上时间的久暂分为恒载与活载。

作用在结构上的不变荷载称为恒载。在结构建成后,恒载大小和位置不再发生变化,例如,构件的自重和土压力等。构件的自重可以根据构件尺寸和材料的密度进行计算。

施工和建成后使用期间可能作用在结构上的可变荷载称为活载。活载有时存在、有时不存在,其作用位置及范围相对固定(例如风荷载、雪荷载、图书馆的书架、仓库中堆放的货物等),也可能是移动的(例如吊车载荷、桥梁上行驶的车辆、会议室的人群等)。各类常用活载的具体取值,详见《建筑结构荷载规范》(GB 50009)或《工程结构通用规范》(GB 55001)。

1.1.3 集中荷载与分布荷载

根据荷载作用在结构上的范围分为集中荷载和分布荷载。

作用范围为一个点的荷载称为集中荷载。工程中的集中荷载是指作用范围远小于结构尺寸的荷载,例如屋架传给柱的压力、吊车轮对吊车梁的压力、汽车通过轮胎作用在桥面上的力等。

非集中荷载称为分布荷载。均匀分布的荷载为均布荷载,否则为非均布荷载或一般分布荷载。工程中常见的均布荷载有体均布荷载(例如混凝土块自重)、面均布荷载(风压力)、线均布荷载(等直梁沿轴线方向自重)等。

1.1.4 静荷载与动荷载

不随时间变化或随时间变化极其缓慢、从零开始平稳增加到最终值的荷载称为静荷载。例如结构的自重、一般的活载等。

随时间急剧变化的荷载称为动荷载。例如地震力、波浪压力等。在动荷载作用下,结构将产生显著的加速度,必须考虑加速度效应。

1.1.5 永久荷载、可变荷载与偶然荷载

工程设计中,常将荷载分为永久荷载、可变荷载和偶然荷载三种。

在设计基准期内,量值不随时间变化,或其变化可忽略不计的荷载称为永久荷载。其大小、方向、作用位置基本恒定。例如,结构自重(梁、板、柱、墙的混凝土及砌体重量)、土压力(挡土墙、地下室外墙承受的侧向土压)和固定的设备重(如水箱、大型管道支架的自重)。

在设计基准期内,量值随时间变化,且其变化不可忽略的荷载称为可变荷载。例如,楼

面活荷载(人群、家具、办公设备)、屋面雪荷载、风荷载、吊车荷载、车辆荷载(桥梁上的汽车、车队)。

在设计基准期内不一定出现,一旦出现量值很大且持续时间很短的荷载称为偶然荷载。例如,爆炸力(燃气、化工车间)、撞击荷载(车辆撞桥墩、船舶撞码头)和火灾(高温作用)。

▶ 1.2 静力学的基本概念、基本公理 ◀

若欲用手推开一扇门时,手作用在门上位置不同,所用的力通常也会不同。极端工况下,手作用在门铰链附近的门边框上时,用力很大却可能打不开门。揭示其中的道理都需要熟悉力的概念与静力学公理。

1.2.1 静力学的基本概念

1. 力

(1) 力的定义

力是物体间的相互机械作用,通过接触或场两种方式进行。力不可能脱离物体而单独存在,要产生力必须有施力物和受力物两个物体。

力作用在物体上,能使物体产生两种效应:① 外效应,即运动效应,包括移动、转动或移动与转动的组合,例如交通工程施工中(图1-2),钢筋笼被用塔吊起吊、空中移动、翻转、安装至设计位置;② 内效应,即变形效应,包括尺寸与形状改变,例如厂房屋面受到积雪重压而发生弯曲变形(图1-3)。



图 1-2



图 1-3

静力学研究对象是刚体,力使刚体只产生外效应。

(2) 力的三要素

力的三要素分别为大小、方向与作用点。

① 大小指物体间机械作用的强弱。在国际单位制中,力的度量单位为牛顿(N),常用千牛(kN), $1\text{ kN}=1\,000\text{ N}$;在工程单位制中,力的度量单位为千克力(kgf),也称为公斤力, $1\text{ kgf}\approx 9.8\text{ N}$ 。

② 方向指力的方位和指向。例如重力的方向是“铅垂向下”,“铅垂”是力的方位,“向



下”是力的指向；又如水平推力的方向是“水平向前”，“水平”是力的方位，“向前”是力的指向。

③ 作用点指力作用在物体上的部位。实际上当两个物体相互作用时，其接触部位总是具有一定的面积，当接触面积与物体相比很小时，可近似看成是一个点，这个点称为力的作用点。

通过力的作用点并沿力方向的直线称为力的作用线。作用部位可看成一个点的力称为集中力，否则为分布力。

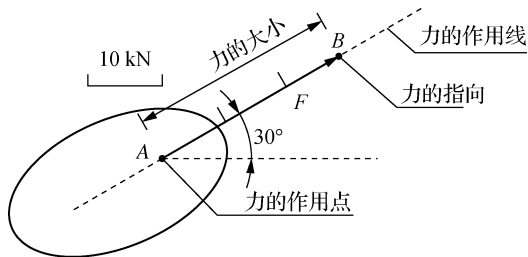


图 1-4

(3) 力矢量的表示

力是矢量，可用一个带箭头的有向线段表示，如图 1-4 所示，是大小为 30 kN、作用在物体上 A 点、与水平线成 30° 角、指向右上方的一个力 F 。

线段的长度按选定的比例表示力的大小，线段的方向表示力的方向，线段的起点或终点表示力的作用点。

2. 力系

作用在物体上的一组力称为力系。使物体产生相同运动效应的力系互称等效力系。用一个简单的力系等效代替复杂的力系称为力系的简化。与一个力系等效的力称为该力系的合力。但需要注意的是，并非所有力系都存在合力。作用在刚体上的分布力（如重力、水压力）常常用与之等效的合力来代替。

所有力的作用线均在同一个平面的力系称为平面力系；否则为空间力系。

平面力系可分为平面汇交力系、平面平行力系以及平面任意力系。

(1) 平面汇交力系，平面内所有力的作用线或其延长线都汇交于一点的力系称为汇交力系，例如图 1-5 所示预制柱吊装时，两段绳索和吊钩之间作用的三个力汇交于一点。

(2) 平面平行力系，平面内所有力的作用线都平行的力系称为平行力系，例如图 1-6 所示钢桁架屋架，钢梁铅垂向下的作用力和支座垂直向上的支承力都是相互平行的。

(3) 平面任意力系，平面内既不都汇交、也不都平行的力系称为任意力系，也称一般力系。

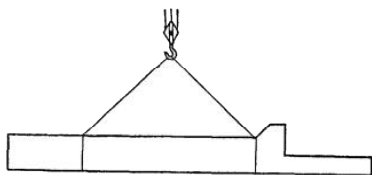


图 1-5

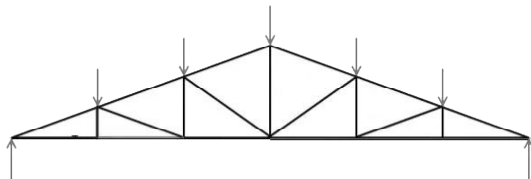


图 1-6

3. 力在坐标轴上的投影

力是矢量，矢量运算要比代数量运算复杂得多，为了能用代数式进行力的计算，在力学中引入力在轴上的投影这一概念。

(1) 力在平面直角坐标轴上的投影

力在坐标轴 x 上的投影等于该力的大小乘以力与坐标轴 x 正向夹角的余弦;力在坐标轴 y 上的投影等于该力的大小乘以力与坐标轴 x 正向夹角的正弦。图 1-7 中力 F 在 x 轴和 y 轴上的投影为:

$$F_x = F \cos \alpha \quad (1-1)$$

$$F_y = F \sin \alpha \quad (1-2)$$

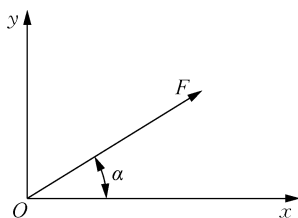


图 1-7

式中 α 为力 F 与 x 轴正向的夹角。当夹角在第一、第四象限时,力 F 在轴 x 投影 F_x 为正;当夹角在第二、第三象限时,力 F 在轴 x 投影 F_x 为负;当夹角在第一、第二象限时,在轴 y 投影 F_y 为正;当夹角在第三、第四象限时,在轴 y 投影 F_y 为负。

在平面直角坐标系中,力 F 在 x 轴、 y 轴上的投影 F_x 、 F_y 与力的大小 F 之间的关系为

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \quad (1-3)$$

力沿作用线滑移不改变力在坐标轴上的投影。力在坐标轴上的投影只与坐标轴的方向有关,与坐标原点位置无关。

(2) 合力投影定理

根据合力定义,力系的合力在坐标轴上的投影等于该力系中所有力对同一轴投影的代数和,即

$$F_{Rx} = F_{1x} + F_{2x} + \cdots + F_{nx} = \sum F_x \quad (1-4)$$

$$F_{Ry} = F_{1y} + F_{2y} + \cdots + F_{ny} = \sum F_y$$

由合力的两个投影可得合力的大小与方向

$$\begin{aligned} F_R &= \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2} \\ \tan \alpha &= \frac{F_{Rx}}{F_R} \\ \tan \beta &= \frac{F_{Ry}}{F_R} \end{aligned} \quad (1-5)$$

式中 α 、 β 分别为合力与 x 轴、 y 轴正方向的夹角。

应当注意:力在坐标轴上的投影是代数量,只有大小和正负;而分力是矢量,有大小、有方向,其作用效果还与作用点或作用线的位置有关,二者不可混淆。只有当力沿平面直角坐标系的两个坐标轴方向正交分解时,分力和投影才会大小相等。

4. 力对点之矩

在日常生活和工程施工中,力对物体的作用,如图 1-8 所示,用扳手拧螺母时,力可使扳手绕螺母中心转动;用榔头拔钉子时,其手柄绕着榔头的支点转动;用手推门时,门绕着其铰链转动。物体转动效果不仅与力 F 的大小有关,而且还与转轴中心点 O 到力作用线的垂直距离 d 有关。

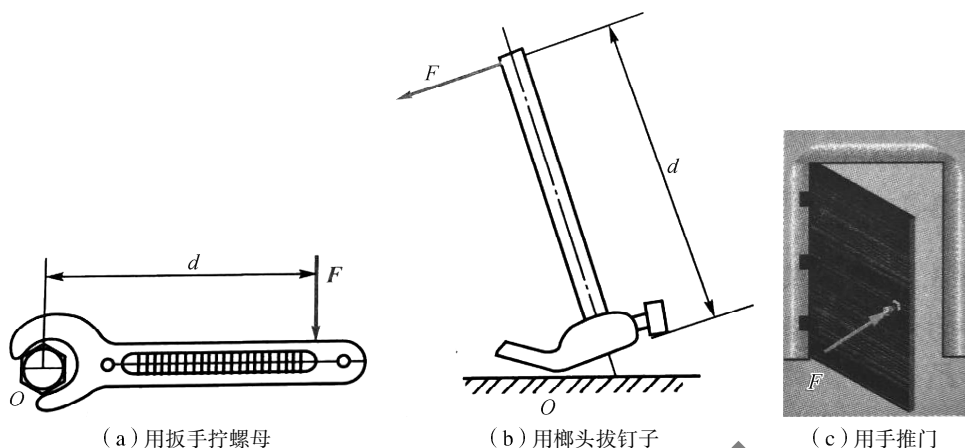


图 1-8

衡量力使物体绕点转动能力的物理量称为力对点之矩,简称力矩。其中点 O 称为矩心,矩心到力作用线的垂直距离 d 称为力臂,如图 1-9 所示。

在平面问题中,力 F 对 O 点之矩 $M_O(F)$ 是代数量,它等于力的大小 F 与力臂 d 的乘积冠以正负号,即

$$M_O(F) = \pm Fd \quad (1-6)$$

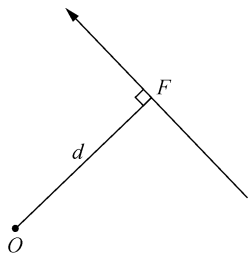


图 1-9

式中,力使物体绕矩心有逆时针转动趋势时为正,反之为负。力矩的单位为牛·米($N \cdot m$)或千牛·米($kN \cdot m$)。

力对点之矩使物体绕矩心产生转动,其本质上是绕通过矩心且垂直于矩心与力的作用线所决定平面的轴转动。衡量力使物体绕轴转动能力的物理量称为力对轴之矩。力 F 对 z 轴之矩 $M_z(F)$ 是代数量,当力作用线平行于轴线或与轴相交时,力对轴之矩为零。

(1) 力对点之矩的性质

① 力对点之矩不仅取决于力的大小,同时与矩心的位置有关。矩心的位置不同,力对点之矩随之改变。

② 力沿着其作用线滑移,不改变力对点之矩。

③ 力的大小等于零或力的作用线通过矩心,则力矩等于零。

④ 相互平衡的两个力对同一点的矩的代数和等于零。

(2) 合力之矩定理

平面力系的合力对点之矩等于该力系中所有力对同一点之矩的代数和,即

$$M_O(F_R) = \sum M_O(F_i) \quad (1-7)$$

在工程实际中,当计算力对点之矩需要的力臂未直接给出时,常常将力进行分解,再利用合力之矩定理求解。力分解的原则是分力的力臂已知或便于求出。例如图 1-10 所示,某工程的挡土墙,土压力 F 可使挡土墙绕 O 点倾覆,已知每米长挡土墙所受压力的合力为 $F=200 \text{ kN}$, F 与水平线夹角 $\alpha=30^\circ$,求 F 使墙倾覆的力矩为多少? 若直接求 F 的力臂则非常麻烦;若将 F 分解为两个分力 F_x 与 F_y ,然后用合力之矩定理计算则较为简便。合力 F

对 O 点的力矩等于其两个分力 F_x 与 F_y 对 O 点的力矩的代数和,即

$$\begin{aligned} M_O(\mathbf{F}) &= M_O(F_x) + M_O(F_y) = F_x \times 2 - F_y \times 2 \\ &= 200 \times \cos 30^\circ \times 2 - 200 \times \sin 30^\circ \times 2 \\ &= 146.4 (\text{kN} \cdot \text{m}) \end{aligned}$$

5. 力偶

在日常生活和工作中,常见到作用在物体上的两个大小相等、方向相反、作用线不重合的平行力的作用,可使得物体转动。例如图 1-11 所示,用双手转动汽车方向盘时作用在盘上的两个力,用丝锥攻螺纹时加在丝锥绞杆上的一对力,用两根手指拧动水龙头所加的力等。这种大小相等、方向相反、不共线的一对平行力称为力偶。

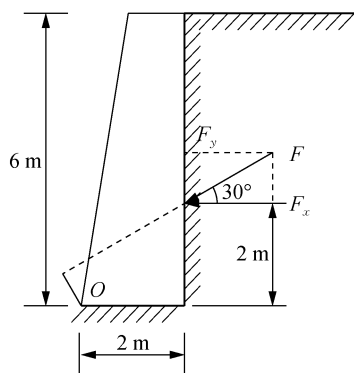


图 1-10

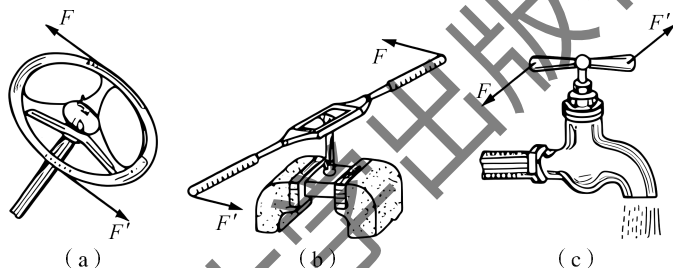


图 1-11

力偶作用在刚体上只产生转动效应。力偶中两平行力作用线之间的垂直距离称为力偶臂。两平行力作用线所决定的平面称为力偶作用面。习惯上用力偶作用面的法线来表示力偶作用面的方位。

力偶对作用面内任意点之矩恒为常数,其值称为力偶矩。在平面问题中,力偶矩是一个代数量,它等于力的大小与力偶臂的乘积冠以正负号

$$m(\mathbf{F}, \mathbf{F}') = m = \pm Fd \quad (1-8)$$

式中,力偶使物体有逆时针转动趋势时为正,反之为负。力偶矩的单位为牛·米 ($\text{N} \cdot \text{m}$)。

力偶的三要素分别为力偶矩的大小、力偶的转向、作用面的方位。三要素相同的力偶互称等效力偶。等效力偶对刚体的转动效应相同。

力偶的性质如下:

- (1) 力偶是特殊的力系,在其作用面内坐标轴上的投影为零。
- (2) 力偶不存在合力。力偶不能与一个力等效,也不能与一个力平衡。力和力偶都是组成力系的基本物理量。
- (3) 只要保持力偶矩不变,作用在刚体上的力偶可任意改变力偶中力的大小和力偶臂的长短,而不改变它对刚体的转动效应;只要保持力偶矩不变,力偶可在刚体内搬移至和它的作用面相平行的平面上,而不改变它对刚体的转动效应。



因此,平面内的力偶可用图 1-12 中 3 种方法表示。

相对于地球处于静止或作匀速直线运动的状态称为平衡状态。建筑物与地基相连,处于静止平衡状态。

作用在刚体上使刚体处于平衡状态的力系称为平衡力系。平衡力系应满足的条件称为平衡条件。

静力学主要研究力系的简化以及作用于刚体上的力系的平衡条件。

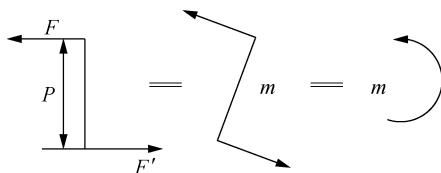


图 1-12

1.2.2 静力学公理

公理 1(二力平衡公理) 作用在同一刚体上的两个力使刚体保持平衡的充分和必要条件是:这两个力大小相等、方向相反,并且作用在同一直线上。

只受两个力作用而平衡的刚体称为二力构件。根据公理 1,这两个力的作用线必定沿着两个作用点的连线,且等值、反向,如图 1-13 所示。

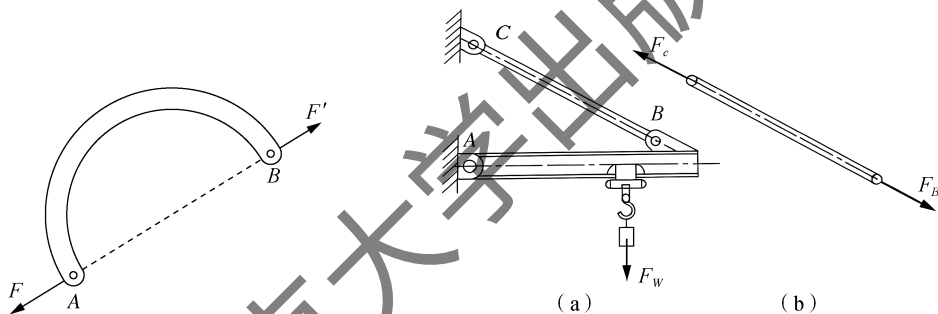


图 1-13

图 1-14

工程中常把可以忽略相对较小自重、只在两点处与结构其他部分接触的承载构件看成二力构件,如图 1-14 所示。简单吊车中的拉杆 BC,如果不考虑它的质量,杆就只在 B 和 C 处分别受到两力作用,且二力等值、反向、共线,而使得 BC 处于平衡状态,此时 BC 则为二力杆。二力构件明确的受力特点常常有助于求解结构平衡问题。

公理 2(加减平衡力系公理) 在力系上加上或减去任意平衡力系,不改变原力系对刚体的作用效应。

力的可传性原理:作用在刚体上的力,可沿其作用线移至刚体内任意一点而不改变该力对刚体的作用效应。如图 1-15 所示。

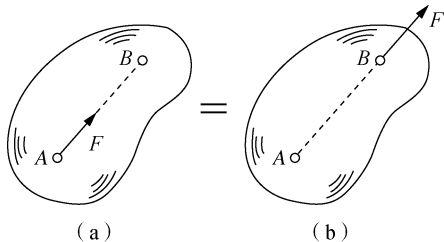


图 1-15

由力的可传性可知,力对刚体的作用效应与力的作用点在作用线上的位置无关,也就是说,对刚体而言,力的作用点已经不再是决定力作用效果的要素了,它已经被力的作用线所取代。因此,对刚体而言,力的三要素是:大小、方向和作用线;作用在刚体上的力是滑移矢量而不是定位矢量。同时必须指出,力的可传性原理只适用于刚体而不适用于变形体。

公理3(力的平行四边形合成法则) 作用在同一点的两个力的合力作用点也在该点,其大小和方向由这两个力为邻边构成的平行四边形的对角线来确定,如图1-16(a)所示。用矢量法表示为:

$$\mathbf{F}_R = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 \quad (1-9)$$

合力 $\mathbf{F}_R$ 与 $\mathbf{F}_1$ 、 $\mathbf{F}_2$ 的共同作用等效, $\mathbf{F}_1$ 与 $\mathbf{F}_2$ 称为 $\mathbf{F}_R$ 的分力。

力的平行四边形法则可简化为力的**三角形法则**,力三角形的两边由两分力 $\mathbf{F}_1$ 、 $\mathbf{F}_2$ 首尾相连,合力 $\mathbf{F}_R$ 的大小与方向由从第一个分力起点指向最后一个分力终点的第三边确定,作用点为两分力交点,如图1-16(b)所示。

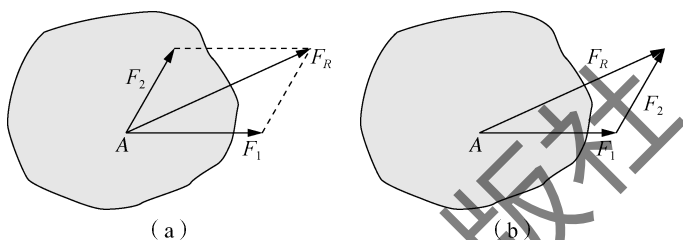


图 1-16

力的平行四边形法则对于作用在刚体或变形体上同一点两个力的合成均适用。对于刚体,力的平行四边形法还适用于作用线或其延长线交于一点的两个力的合成。根据力的可传性原理将两个力移至汇交点后再合成,合力也通过汇交点。

应用平行四边形法则推导,可以获得**三力平衡汇交定理**:刚体受三个力作用而处于平衡,若其中两力相交,则三力必汇交于一点,且共面。

设刚体在 $\mathbf{F}_1$ 、 $\mathbf{F}_2$ 、 $\mathbf{F}_3$ 三力作用下处于平衡状态,且 $\mathbf{F}_1$ 、 $\mathbf{F}_2$ 交于一点,则 $\mathbf{F}_1$ 、 $\mathbf{F}_2$ 的合力 $\mathbf{F}_{1,2}$ 也通过该点且与 $\mathbf{F}_1$ 、 $\mathbf{F}_2$ 共面; $\mathbf{F}_3$ 与 $\mathbf{F}_{1,2}$ 只有共线才能组成二力平衡力系,因此 $\mathbf{F}_1$ 、 $\mathbf{F}_2$ 、 $\mathbf{F}_3$ 三力必汇交于一点,且共面。

公理4(作用力与反作用力公理) 两物体间相互作用的力即作用力与反作用力,总是同时存在、大小相等、方向相反,沿同一直线分别作用在两个相互作用的物体上。

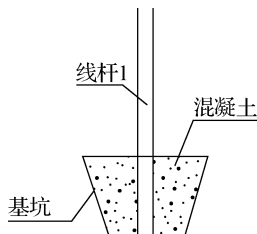
两个平衡力和一对作用力与反作用力均满足等值、反向、共线,但前者作用在同一物体上,后者作用在两个不同的物体上。作用力与反作用力不能构成平衡力系。

1.3 约束和约束反力

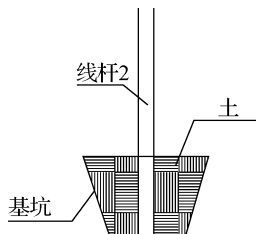
如图1-17(a)所示,将电线杆吊装至基坑中,为了使得电线杆能够在基坑中站立,电线杆就位后,便需要在坑内填充材料,有两种方案:图1-17(b)为混凝土填坑;图1-17(c)为土方填坑。填充材料将对电线杆产生限制作用,帮助其站立在基坑中。可以思考一下,基坑中的填充材料不一样,基坑对电线杆的作用效果一样吗? 何种方案对电线杆的限制更牢固? 为什么?



(a) 电线杆吊装现场



(b) 混凝土填坑



(c) 土方填坑

图 1-17

1.3.1 基本概念

可以在空间自由运动、位移不受任何限制的物体称为自由体。例如运动中的飞机、火箭、人造卫星、足球、乒乓球及飞行中的小鸟等。

周围物体对非自由体位移的限制称为约束。约束总是通过物体之间的直接接触形成，例如，桥墩对桥梁的约束、立柱对屋梁的约束、钢轨对火车的约束等。

提供约束的物体称为约束体，简称约束。受到约束的非自由体也称为受约束体或被约束体。约束对被约束体的作用力即为约束反力或约束力。

在土木工程中，当结构构件在主动力（例如重力、风雪荷载等）作用下产生运动或运动趋势受到约束阻碍时，其表现为约束作用于被约束体的约束反力。因此，约束反力是一种被动力，其大小和方向不能预先确定，只能由约束的性质与主动力的状况被动地确定。约束反力的指向总是与约束所能阻碍的运动方向相反。约束反力的作用点在约束和被约束物体的接触处，其大小由平衡条件等确定。

1.3.2 常见约束

1. 柔性约束

由柔软的绳索、胶带、皮带或链条等构成的约束称为柔性约束。柔性约束对物体的约束反力只能为作用在柔性约束与物体的连接点、沿柔性约束方向、背离受力物体的拉力。如图 1-18 所示，拉索式点支玻璃幕墙，每一根钢拉索两端与支座耳板连接，在预应力作用下张拉成形，在支座耳板处产生柔性约束反力。如图 1-19 所示，大型设备吊装工程中，设备在吊索的柔性约束作用下，能够随着吊臂平稳移动。

2. 光滑接触约束

具有光滑接触面（线、点）的约束称为光滑接触约束。光滑接触约束对物体的约束反力只能为作用在接触处、沿接触面法线、指向受力物体的压力，如图 1-20 所示的力 F_N 。

3. 光滑圆柱铰链约束

两个构件在圆柱形孔处通过圆柱形销钉连接，即构成光滑圆柱铰链约束，简称为铰链或铰。常见的门窗的合页就是这种约束。如图 1-21 所示，构件在销钉处可以相对转动，但不

能相对移动。光滑圆柱铰链约束的约束反力通过销钉的中心,方向待定。一般把它分解为水平、竖向的两个未知力,如图 1-22 所示。



图 1-18



图 1-19

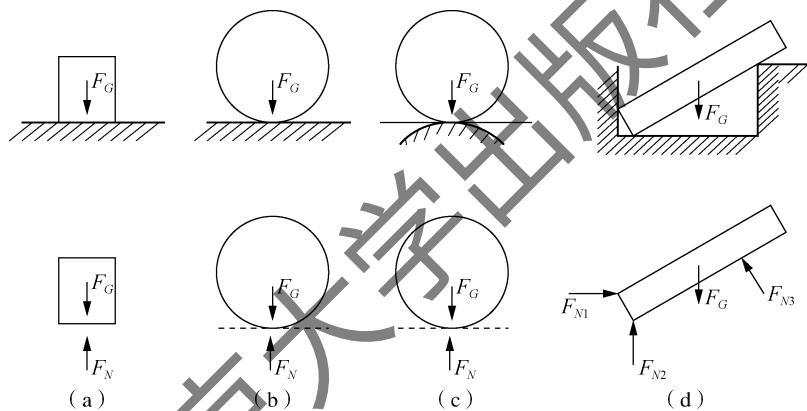


图 1-20

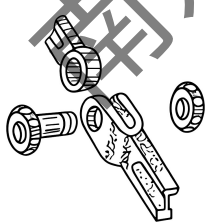


图 1-21

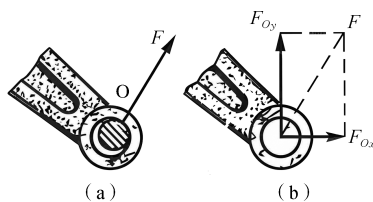


图 1-22

当光滑圆柱铰链约束位于结构中间、连接不同构件时,称为中间铰链,简称中间铰。如图 1-23 所示,建筑工程的门窗开启扇五金件的四连杆机构,相邻两根连杆之间由中间铰链连接,以 C 点为例,可以依据其计算简图分析约束反力。

4. 链杆约束

两端用光滑销钉与其他物体连接而中间不受力的直杆,称为链杆。例如,图 1-24(a)所示的建筑物中放置空调外机的三角架,其中杆 BC 为链杆。由于链杆只能限制物体沿链杆中心线的运动,而不能限制其他方向的运动,所以链杆约束的约束反力沿着链杆中心线,指

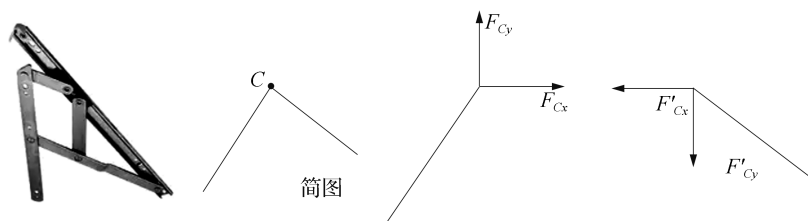


图 1-23

向未定,如图 1-24(b)所示。再例如梁端链杆支座约束(图 1-25)所示,其约束反力亦沿着链杆中心线。

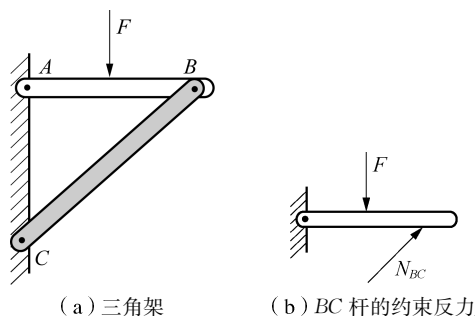


图 1-24

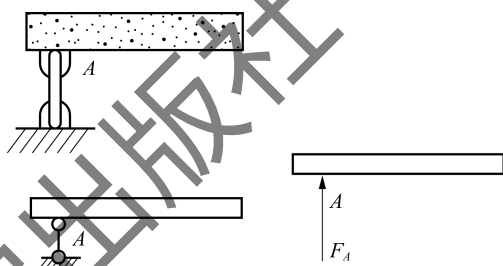


图 1-25

5. 固定铰支座

在铰链连接的两个构件中,其中一个构件是固定在基础上的支座,这种支座称为**固定铰支座**。如图 1-26(a)所示,构件与支座用光滑圆柱铰链连接,构件不能产生沿任何方向的移动,仅可绕销钉转动。其约束反力一定作用于接触点,垂直于销钉轴线,并通过销钉中心,而方向未定。其计算简图可有多种表达形式,如图 1-27(b)~图 1-27(e)所示,其支座反力可有两种表达形式:“合力+夹角”的形式;两个正交分解的分力形式,如图 1-27(f)所示。



(a)



(b)

图 1-26

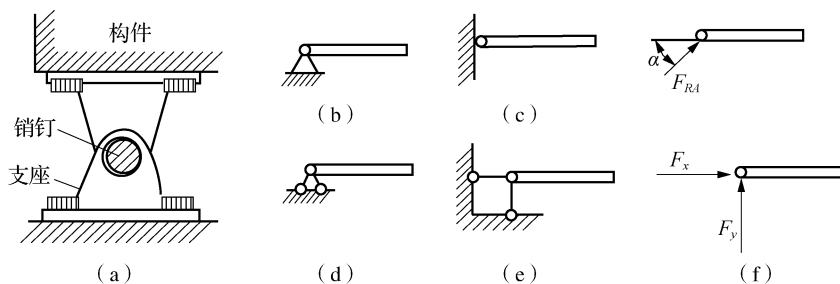


图 1-27

在建筑结构中,上述理想的支座多见于钢结构的支座连接。而在混凝土结构、砖砌体结构和竹木结构中,以及部分钢结构中,通常把不能产生移动,只可能产生微小转动的支座视为固定铰支座。例如,图 1-28 所示混凝土杯口基础内安装混凝土柱,柱底部侧边由木楔块调节固定,限制其移动,若在杯口内填充沥青麻丝,则柱在杯口内可能产生微小转动,因此这种结构可视为固定铰支座。图 1-29 所示为一榀屋架,用预埋在混凝土垫块内的螺栓和支架连在一起,垫块则砌在支座(墙)内,此时,支座能够阻止结构在平面内双向移动,但是允许其产生微小转动,则其也可视为固定铰支座。

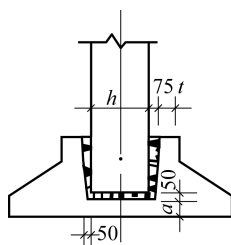


图 1-28

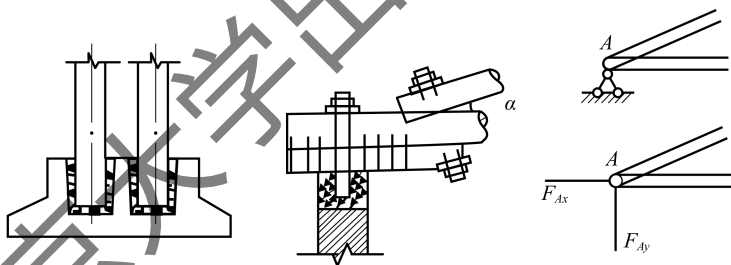


图 1-29

6. 可动铰支座

如果在固定铰支座下面加上辊轴,使上部构件(物体)既能绕支座转动,也能沿某个方向移动,则该支座则变为可动铰支座。如图 1-30 所示,梁的右端、杆件 A 端受到基础约束,在竖直方向的运动和位移受到限制。可动铰支座的计算简图与约束反力如图 1-31 所示。链杆支座可以视为可动铰支座的一种。



图 1-30

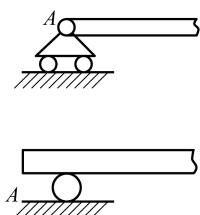


图 1-31

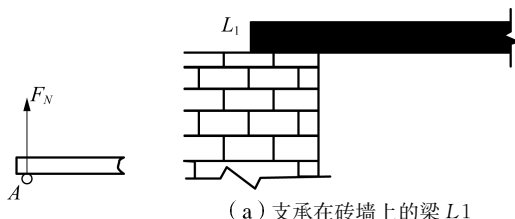


图 1-32

在砌体工程中(图 1-32),楼面梁搁置在砖墙上,砖墙就是梁的支座,当梁和砖墙之间的摩擦力相较于梁承受的其他力非常小时,可以略去摩擦力的影响,则视为砖墙只能限制梁向下移动,而不能限制梁的转动和水平方向移动,此时,就可以将砖墙简化为可动铰支座。

7. 固定端支座

当构件与支承物固定为一体,构件在支座位置既不能沿任何方向移动,也不能转动,这种支座即为固定端支座。这种支座对构件除产生水平反力和竖向反力外,还有一个阻止转动的力偶。

图 1-33 所示电线杆与基础的连接、阳台的挑梁与房屋的连接、混凝土杯口基础内填充混凝土与柱连接等固定端约束既限制物体在该处的线位移,又限制物体在该处的转角位移,皆为固定端支座。其计算简图和约束反力,如图 1-34 所示。

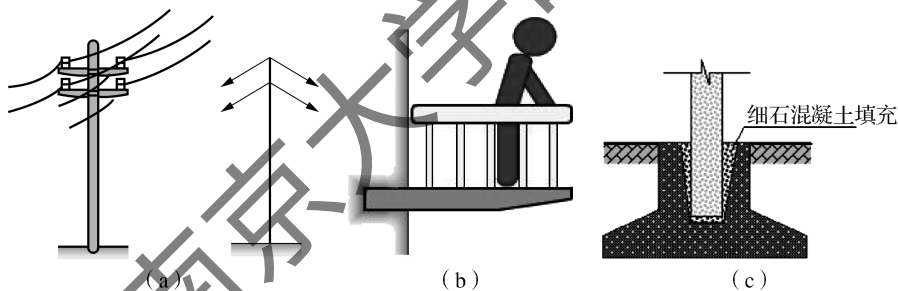


图 1-33

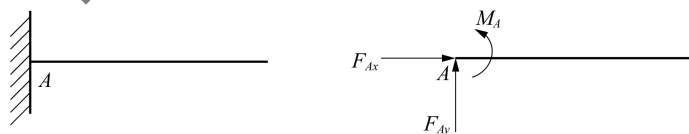


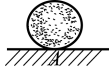
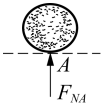
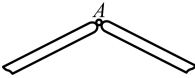
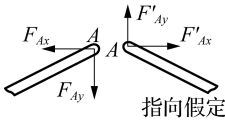
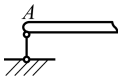
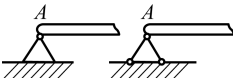
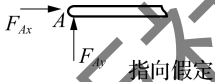
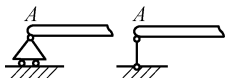
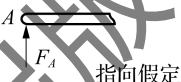
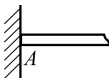
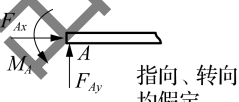
图 1-34 固定端的简图与约束反力

总结约束的类型、计算简图和其约束反力表达,如表 1-1 所示

表 1-1 各种类型约束的特征

约束类型	计算简图	约束反力	未知量数目
柔性约束			1

(续表)

约束类型	计算简图	约束反力	未知量数目
光滑接触约束			1
圆柱铰链约束			2
链杆约束			1
固定铰支座			2
可动铰支座			1
固定端支座			3

▶ 1.4 物体与物系受力分析 ◀

1.4.1 受力分析的基本概念

求解土木工程力学问题时,由于建筑结构通常是由多个物体或构件相互联系组合在一起,往往必须首先根据问题的已知条件和各待求量,从建筑结构(物体组成的物体系统,简称物系)中选择某一构件(单个物体)或局部(物体子系统)或整体(物系)作为研究对象,分析确定作用在研究对象上力的数量、作用点位置,了解力作用线方向、大小等信息,确定哪些力已知、哪些力未知等,这个过程称为受力分析。

为清楚显示研究对象受力状态,常将研究对象从与之接触的周围物体中分离出来,解除其所受的外约束而代之以相应的约束反力。解除外约束的研究对象称为分离体。在分离体上画出直接作用的所有主动力、约束反力的简图称为受力图。

1.4.2 画受力图的基本步骤

- (1) 确定研究对象。研究对象可以是某一物体(构件、零件)、几个物体组成的子系统(构件组合)、整个物体系统(结构整体),需要根据研究目标确定。
- (2) 画出分离体(也称隔离体)。将研究对象从与其联系的周围物体系统中分离出来,



即为分离体。分离体的外约束已解除、不必画出。

(3) 在分离体上画出所有直接作用的主动动力。

(4) 根据解除的外约束性质在分离体上画出所有的约束反力。

1.4.3 画受力图的注意点

(1) 不能漏画、多画和错画。作用于研究对象上的主动力和约束反力应全部画出,不能遗漏;约束反力依据约束的类型绘制,不能错画;研究对象作用于周围物体的力不必画出。

(2) 如果研究对象是物体系统时,在绘制约束反力时,只画出系统外的物体对它的作用力(称为外力),系统内任何相联系的物体之间的相互作用力(称为内力)都不能画出。

(3) 注意作用力与反作用力的关系。作用力的方向一经确定(或假设),反作用力的方向必定和它的方向相反,不能再随意假设。

(4) 正确判断二力杆件,沿着两个力作用点连线绘制大小相等、方向相反的共线力。

(5) 简化受力图。对于平面内受三力作用而平衡的物体(或系统),若已知两个力的作用线交于一点,根据三力平衡汇交定理,可确定第三个力的作用线的方位。

(6) 同一个约束反力同时出现在物体系统的整体受力图和拆开画的分离体的受力图中时,它的命名和指向必须一致。

1.4.4 典型例题

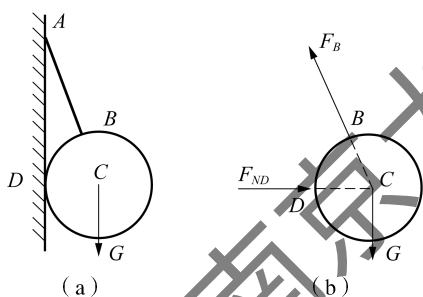


图 1-35

例 1-1 如图 1-35(a)所示,绳 AB 悬挂一重为 G 的球,球在 D 点处与光滑墙面接触。试画出球 C 的受力图。

【解】 (1) 取球 C 为研究对象。

(2) 画出分离体(球 C)。

(3) 画主动力:在球心 C 点标上重力 G 。

(4) 画约束反力:解除点 B 处的绳子约束, B 点沿绳子方向(沿 B 、 C 连线)背离球画上拉力 F_B ;解除 D 点的光滑面约束, D 点沿光滑面法向(沿 D 、 C 连线)、指向球画约束力 F_{ND} 。球的受力图如图 1-35(b)所示。

球 C 受同平面的 3 个不平行的力作用而平衡,则三力作用线必相交,交点应为 C 。

例 1-2 简支梁 AB 如图 1-36(a)所示,受到集中力 F 作用, A 端为固定铰支座, B 为可动铰支座。试画出梁的受力图。

【解】 (1) 取 AB 梁为研究对象。

(2) 画出分离体 AB 。

(3) 在梁上 C 点画主动力 F 。

(4) 画约束反力: A 端为固定铰支座,梁受到的约束反力一般用通过铰链中心 A 并相互垂直的分力 F_{Ax} 和 F_{Ay} 表示; B 为可动铰支座,约束反力为通过铰链中心且垂直于支承面的 F_B 。受力图如图 1-36(b)所示。

对于约束反力的绘制,也可以进一步简化,由于 A 端的两个力可以合成为一个力 R ,梁 AB 符合三力平衡汇交定理,故也可绘制受力图如图 1-36(c)所示。

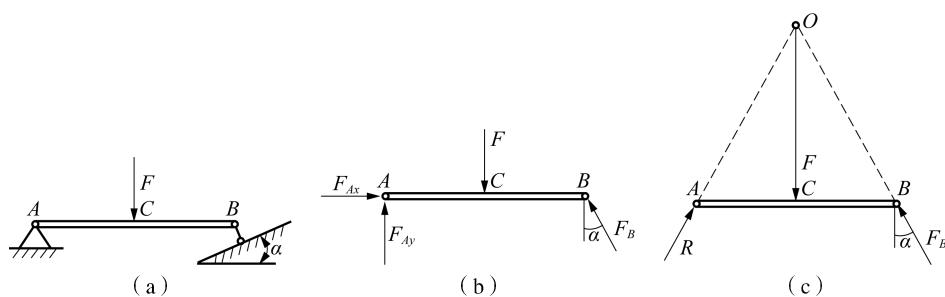


图 1-36

例 1-3 画图 1-37(a)三铰拱 AC、BC 受力图。不考虑自重。

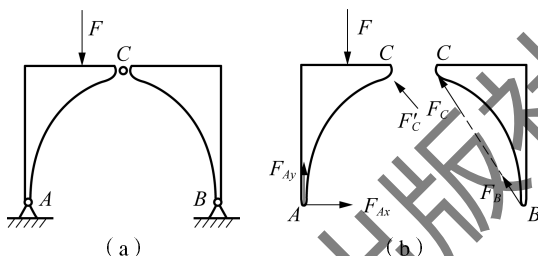


图 1-37

【解】在不考虑自重的情况下，BC 为二力构件， F_B 、 F_C 为一对平衡力，沿 BC 方向； F_C 、 F'_C 为一对作用力、反作用力；A 处为固定铰支座。AC、BC 受力图如图 1-37(b)所示。

例 1-4 图 1-38(a)所示的梯子结构由杆件 AB、杆件 AC 和绳索 DE 组成，B、C 两点位于光滑地面上。H 点受力 F 作用。试分别绘制杆件 AB、AC 和梯子整体的受力图。

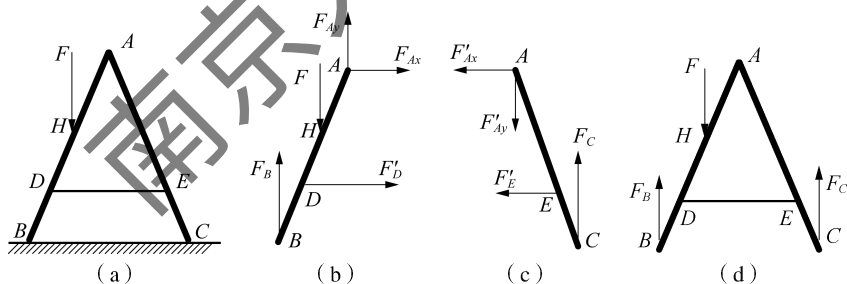


图 1-38

【解】(1) 以 AB 为研究对象；绘制分离体 AB；绘制主动力 F ；约束反力在 A、B 和 D 三处产生：A 处为中间铰链连接，受水平和垂直方向的两个力作用；B 处光滑面约束，约束反力垂直于地面；D 处受柔性约束，约束力沿着 DE 方向，可绘制受力图如图 1-38(b)所示。

(2) 以 AC 为研究对象；绘制分离体 AC；无主动力；约束反力在 A、C 和 E 三处产生：A 处为中间铰链连接，受水平和垂直方向的两个力作用，与图 1-38(b)所对应的作用力和反作用关系；C 处光滑面约束，约束反力垂直于地面；E 处受柔性约束，约束力沿着 ED 方向，可绘制受力图如图 1-38(c)所示。

(3) 以整体为研究对象；画主动力 F ；约束反力仅在 B 和 C 两处产生，其标注与图 1-38(b)和图 1-38(c)的名称及方向一致；最后绘制受力图如图 1-38(d)所示。



1.5 工程应用拓展

雨篷作为建筑入口的关键防护构件,其结构形式需结合建筑功能与力学特性综合设计。国内工程中悬挑结构雨篷和斜拉结构雨篷应用最为广泛,两类结构虽构造差异显著,但均需基于静力学原理进行系统受力分析,以确保其安全稳定。

悬挑结构雨篷是民用建筑中最常见的形式,多采用钢筋混凝土或钢结构悬臂梁设计,如某住宅项目门厅悬挑结构雨篷(图 1-39),悬挑长度 2 米,根部钢梁与混凝土框架梁固定连接。其受力分析需明确研究对象为雨篷悬挑梁及上部荷载,主动力包括恒载(钢梁自重、玻璃板重量)与活载(积雪、行人临时荷载),水平方向需考虑风荷载作用。约束条件方面,根部与混凝土框架梁的连接属于固定端支座,需提供竖向反力、水平反力及抗倾覆力偶,限制雨篷的移动与转动;自由端无约束,仅传递荷载至固定端。

斜拉结构雨篷常用于大跨度商业建筑,以某购物中心玻璃雨篷为例(图 1-40),其悬挑长度达 4.5 米,采用型钢主梁配合不锈钢拉杆,拉杆一端锚固于主体结构立柱,另一端连接主梁悬挑端。受力分析时,主梁为核心研究对象,主动力包括主梁自重、玻璃面板重量、风荷载及地震惯性力。约束条件分为两部分:主梁根部与主体结构为固定铰支座,提供水平与竖向反力;拉杆仅产生沿轴线的拉力,通过拉力平衡主梁悬挑端的部分弯矩,减小根部受力。



图 1-39



图 1-40

两类雨篷结构的受力分析均遵循“确定研究对象→识别主动力→分析约束反力→绘制受力图”的核心流程,体现了静力学原理在工程中的实际应用。不同结构形式通过优化约束与传力路径,适应不同跨度与功能需求,其设计本质都是通过精准的受力分析,使构件受力与材料性能相匹配,为雨篷结构的安全可靠提供保障。

单元小结

本单元围绕“如何系统识别与表达物体所受的作用力”这一核心,构建了物体受力分析的知识框架。

力是物体间的相互作用,其三要素——大小、方向、作用点,决定了作用效果。静力学公理是分析的理论根基:力的平行四边形法则用于力的合成与分解;二力平衡条件是识别二力杆的关键;加减平衡力系公理为力系简化提供依据;作用力与反作用力定律则要求严格区分相互作用力与平衡力。

力系的简化通过合力投影定理和合力矩定理实现,将复杂力系等效为合力或力偶。力偶作为一种无合力、仅产生纯转动效应的特殊力系,需用力偶矩度量其效应。

约束是物体的边界条件,其反力方向与所能限制的运动方向相反。受力图的绘制需明确研究对象,只画外力,正确应用作用力与反作用力关系,并善于利用二力杆和三力平衡汇交定理简化分析。

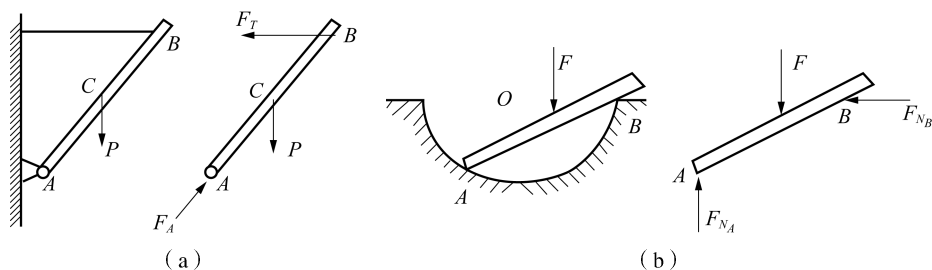
掌握本单元内容,为后续静力平衡计算和结构受力分析奠定了坚实基础。

思考题

- 1-1 力的投影和力的分解是否等效?
- 1-2 为什么力偶在任意坐标轴上的投影为零?
- 1-3 直接用手不能把钉子拔出木块,为什么用钉锤很容易拔出来?
- 1-4 为什么说二力平衡条件、加减平衡力系定理、力的可传性等只能适用于刚体?
- 1-5 什么是二力构件?分析二力构件受力时与构件的形状有无关系?两端用光滑铰链连接的直杆是否都是二力杆件?
- 1-6 二力平衡条件与作用力、反作用力都是二力等值、反向、共线,两者有何区别?

习题

- 1-1 图中不考虑自重情况下物体受力是否正确?若有错误试改正。

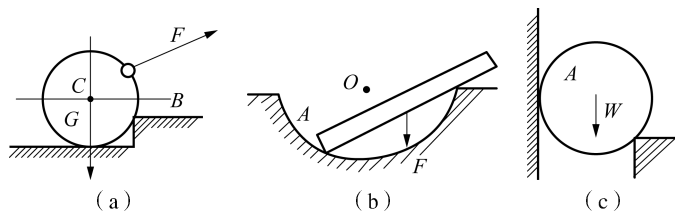


习题 1-1 图

- 1-2 画出图中构件的受力图。未画重力的各物体的自重不计,所有接触处均为光滑

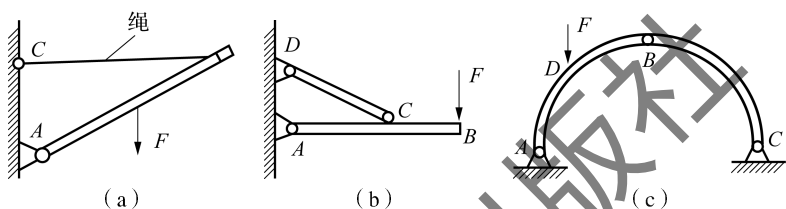


接触。



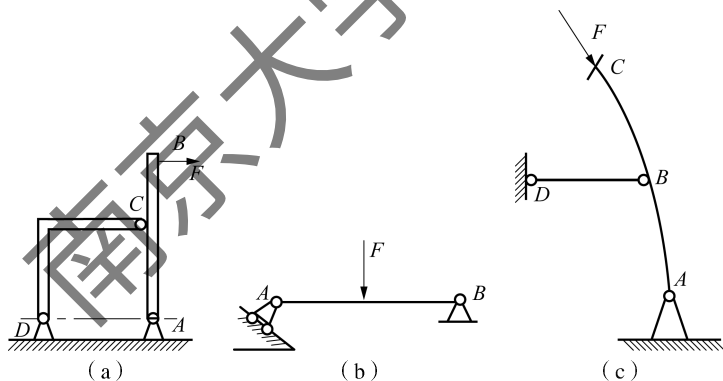
习题 1-2 图

1-3 画出图中构件或整体的受力图。未画重力的各物体的自重不计,应用三力平衡汇交定理。



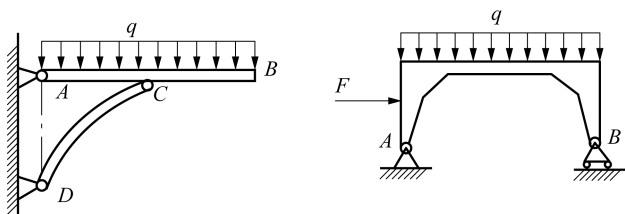
习题 1-3 图

1-4 画出图中构件或整体的受力图。未画重力的各物体的自重不计,应用三力平衡汇交定理。



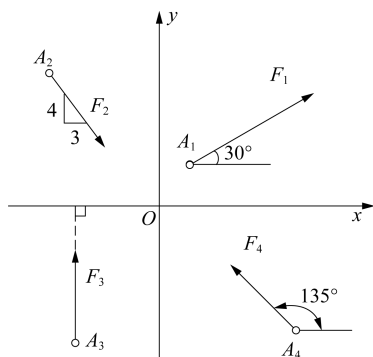
习题 1-4 图

1-5 画出图中构件或整体的受力图。未画重力的各物体的自重不计,所有接触处均为光滑接触。



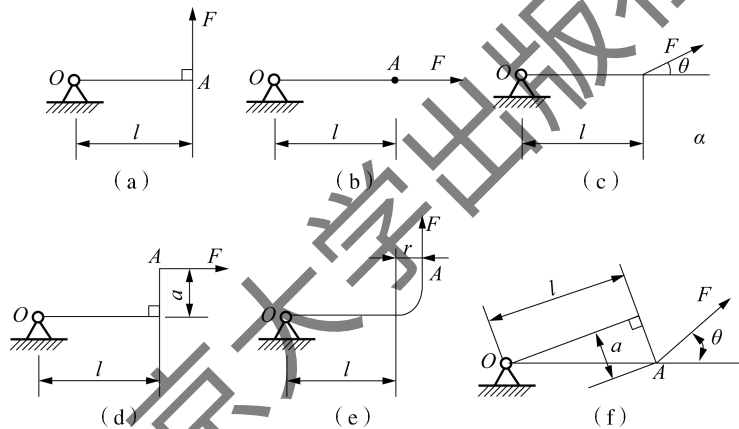
习题 1-5 图

1-6 已知图示各力的大小皆为 300 kN, 试分别求各力在 x 轴和 y 轴上的投影。



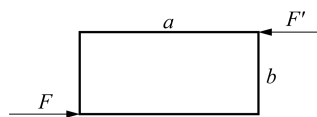
习题 1-6 图

1-7 计算图示力 F 对 O 点之矩。



习题 1-7 图

1-8 图示水平放置的矩形钢板的长 $a = 2\text{ m}$, 宽 $b = 1\text{ m}$, 沿长边施加一对 200 kN 的力刚好转动, 若沿宽边施加一对力刚好转动时力的大小为多少? 如何加一对最小的力使钢板也能转动?



习题 1-8 图



单元 1 习题参考答案



单元 2

平面力系的合成与平衡



知识目标

- ◆ 准确阐述平面汇交力系、力偶系、一般力系、平行力系的合成方法与平衡条件；
- ◆ 清晰表述力的平移定理、合力投影定理、合力矩定理；
- ◆ 熟练掌握平面一般力系平衡方程的基本形式、二力矩形式和三力矩形式及其适用范围；
- ◆ 正确理解静滑动摩擦定律、摩擦角与自锁现象的本质；
- ◆ 掌握重心坐标的计算公式及常见形体的重心位置。



能力目标

- ◎ 能够运用解析法求解平面汇交力系、力偶系及一般力系的平衡问题,正确计算未知力；
- ◎ 能够针对物体系统,合理选择研究对象,正确绘制受力图并建立平衡方程求解内力与外力；
- ◎ 能够分析考虑摩擦时物体的平衡问题,确定平衡范围;能够运用分割法、负面积法求解组合形体的重心；
- ◎ 能够结合工程实例(如塔式起重机、雨篷结构等)建立力学模型,进行受力分析与平衡计算。



素质目标

- ★ 树立“平衡是力系合成的最终结果”的工程思维,认识到受力分析是解决工程问题的基石；
- ★ 通过塔吊倾覆等案例,深刻理解力学失衡对工程安全的危害,培养严谨细致的计算习惯和保障结构安全责任意识；
- ★ 建立“化繁为简”的力学建模思想,感悟静力学原理在工程实践中的广泛应用与价值。

案例导入

“擎天柱”——塔式起重机(如图2-1所示)是现代建筑施工中关键的垂直运输设施,承担着80%以上的建材垂直运输任务,其吊臂跨度可达70米,最大起重量超20吨。据住房和城乡建设部统计:塔吊事故占工地重大事故的30%,近五年因倾覆造成的伤亡人数年均超百人。事故原因包括:设备老化、维护保养不到位、操作不当等因素,也有因配重不足、超载作业等引起的力学失衡,本质是平面力系合成与平衡的破坏。

塔式起重机本身结构巨大,却能在吊运重物时保持稳定,不会倾覆。这背后蕴藏着怎样的力学原理?要弄清楚这一力学原理,就要分析塔式起重机在工作时,承受着哪些关键的力?这些力是如何相互作用,最终达成平衡,从而确保塔式起重机稳定工作的?

塔式起重机主体结构模型如图2-2所示,在静力学分析中,将根据力的平衡分析需求,可将塔式起重机整体结构简化为一个刚体,其主要作用力有塔式起重机自重 W_1 、塔式起重机起吊重物的重量 W 、左侧平衡锤重 W_2 ,以及基础的支承力 F_a 、 F_b 构成了一个平面力系如图2-3所示,塔式起重机要满足安全使用的工作要求,即考虑此力系的合成与平衡问题。



图 2-1

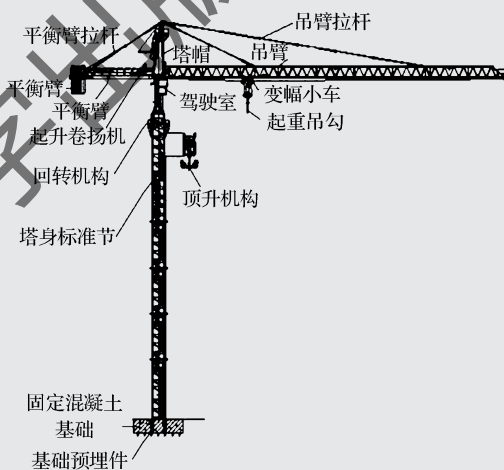


图 2-2

除塔式起重机整体平衡外,关键部件(如塔式起重机平衡臂、吊臂、塔帽与拉杆等)的平衡同样重要,如:塔式起重机吊臂,作为直接承载吊运重物的关键部件,吊臂受力情况也较复杂,对其进行力系简化与平衡分析时,将其看作刚体,其主要作用力有塔式起重机吊臂自重为 m_2g 、起吊重物的重量 W 、钢缆拉力分别为 F_2 、 F_3 ,塔式起重机塔身给吊臂的支撑力为 F_x 、 F_y ,构成了一个平面力系如图2-4所示,吊臂也要满足安全使用的工作要求,即考虑此力系的合成与平衡问题。

塔式起重机的稳定奥秘是平面力系“平衡密码”的完美体现。从塔式起重机整体到关键构件的受力分析表明,平面力系合成与平衡原理是保障结构安全的基础。本单元将系统学习平面力系的合成、简化与平衡分析方法,为解决实际工程中的受力问题提供理论工具。

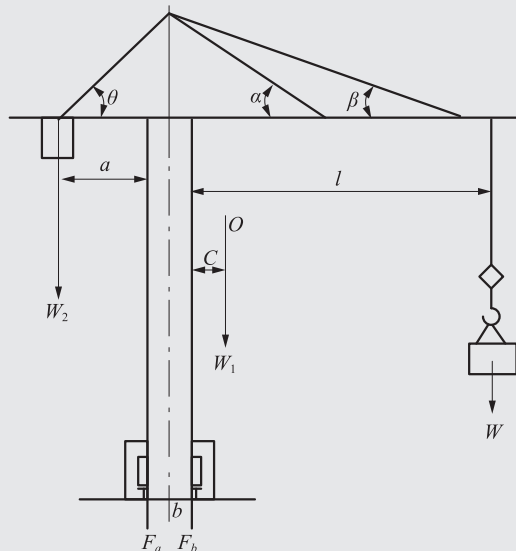


图 2-3

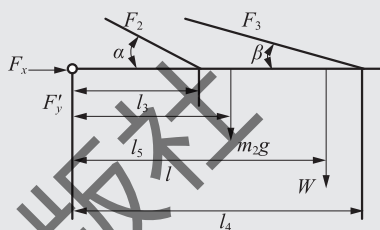


图 2-4

2.1 平面汇交力系的合成与平衡

在平面力系中,各力作用线均汇交于一点的力系,称为平面汇交力系。

2.1.1 平面汇交力系的合成

平面汇交力系的合成通常有两种方法,一是几何法,另一种方法是解析法。

1. 平面汇交力系合成的几何法

平面汇交力系的合力可由该力系各力的力矢首尾连接构成的力多边形的封闭边来决定,方向由第一个力矢的始端指向最后一个力矢的末端。如图 2-5 所示。

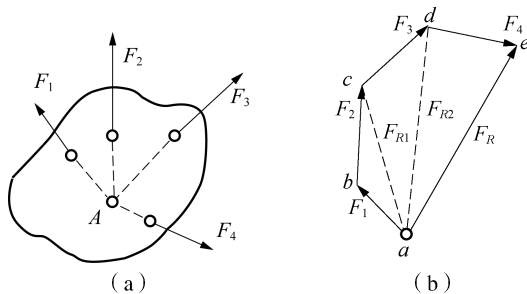


图 2-5

平面汇交力系合成的矢量表达式:

$$\mathbf{F}_R = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \cdots + \mathbf{F}_n = \sum \mathbf{F} \quad (2-1)$$

即平面汇交力系合成的结果是一个合力,它等于力系中各力的矢量和,其作用线通过力系的汇交点。

例 2-1 如图 2-6(a)所示,支架 ABC, A、B 处为铰支座, AC 和 BC 杆在 C 处用销钉连接,在销上作用 $P=20 \text{ kN}$, 不计杆自重。求: AC 和 BC 杆所受的力。

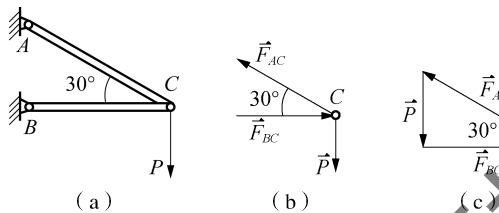


图 2-6

- 【解】** (1) 取研究对象销钉 C
 (2) 受力分析,如图 2-6(b)所示
 (3) 作自行封闭的力多边形 如图 2-6(c)所示
 (4) 算出: $F_{BC}=34.6 \text{ kN}$; $F_{AC}=40 \text{ kN}$

平面汇交力系的合成采用几何法比较简单,但对作图要求十分精确,否则将会引起较大误差,因此目前基本很少用,工程中通用的方法是解析法。

2. 平面汇交力系合成的解析法

求平面汇交力系合力的解析法,是用各力在直角坐标轴上的投影计算合力的大小,确定合力的方向。

平面汇交力系合成的结果是通过汇交点的一个合力,该合力在 x 轴、 y 轴上的投影等于该汇交力系在同一坐标轴上的投影的代数和(如图 2-7 所示),即

$$\begin{aligned} F_{Rx} &= F_{1x} + F_{2x} + \cdots + F_{nx} = \sum F_x \\ F_{Ry} &= F_{1y} + F_{2y} + \cdots + F_{ny} = \sum F_y \end{aligned} \quad (2-2)$$

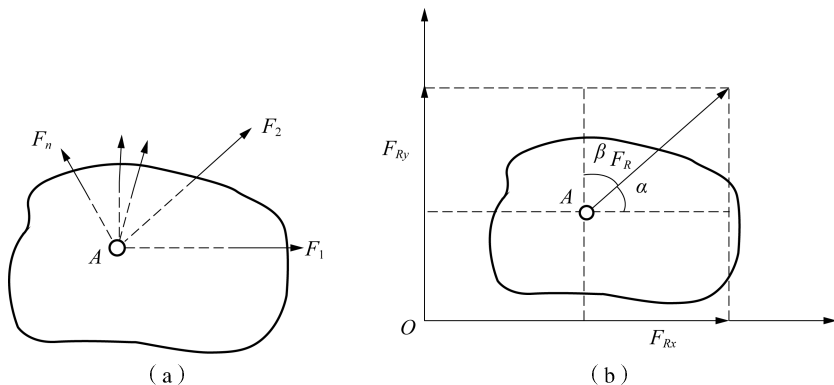


图 2-7



合力的大小为:

$$F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2} \quad (2-3)$$

合力与 x 轴、 y 轴正方向的夹角 α 、 β 分别为

$$\alpha = \arccos\left(\frac{F_{Rx}}{F_R}\right) \quad (2-4)$$

$$\beta = \arccos\left(\frac{F_{Ry}}{F_R}\right)$$

例 2-2 如图 2-8(a) 为一平面汇交力系, 已知 $F_1 = 200 \text{ N}$, $F_2 = 300 \text{ N}$, $F_3 = 100 \text{ N}$, $F_4 = 250 \text{ N}$, 各力方向如图所示, 试求该平面汇交力系的合力。

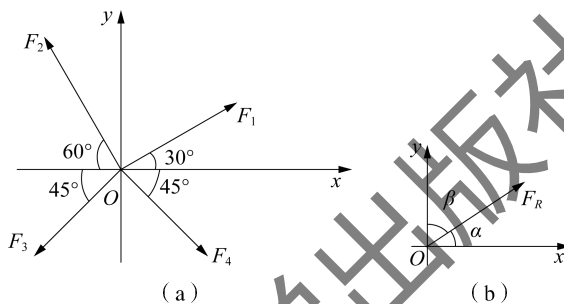


图 2-8

【解】 以力的汇交点 O 为坐标原点建立坐标系。

(1) 计算合力的投影:

$$\begin{aligned} F_{Rx} &= F_1 \cos 30^\circ - F_2 \cos 60^\circ - F_3 \cos 45^\circ + F_4 \cos 45^\circ \\ &= 200 \times 0.866 - 300 \times 0.5 - 100 \times 0.707 + 250 \times 0.707 \\ &= 129.3 \text{ N} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{Ry} &= F_1 \sin 30^\circ + F_2 \sin 60^\circ - F_3 \sin 45^\circ - F_4 \sin 45^\circ \\ &= 200 \times 0.5 + 300 \times 0.866 - 100 \times 0.707 - 250 \times 0.707 \\ &= 112.3 \text{ N} \end{aligned}$$

(2) 确定合力的大小和方向, 如图 2-8(b):

$$\text{大小: } F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2} = \sqrt{129.3^2 + 112.3^2} = 171 \text{ N}$$

$$\text{方向: } \alpha = \arccos\left(\frac{F_{Rx}}{F_R}\right) = \arccos\left(\frac{129.3}{171}\right) = 33.38^\circ$$

2.1.2 平面汇交力系的平衡

平面汇交力系的合成简化的结果是一个合力。当这一合力等于零时, 刚体处于平衡状态, 所以平面汇交力系平衡的充分必要条件是: 该力系的合力等于零。即

$$\sum \mathbf{F}_R = 0 \quad (2-5)$$

1. 平面汇交力系平衡的几何条件

平面汇交力系平衡的几何条件是力多边形自行封闭,即该力系中各力的矢量和等于零。

$$\sum \mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \cdots + \mathbf{F}_n = \mathbf{0} \quad (2-6)$$

运用平面汇交力系平衡的几何条件解题的步骤是:(1) 选取研究对象;(2) 画受力图;(3) 作封闭的力多边形;(4) 确定未知力的大小和方向。

2. 平面汇交力系平衡的解析条件

根据合力投影定理,平面汇交力系平衡的充分必要解析条件是该力系中各力在 x 轴、 y 轴上投影的代数和均等于零,即

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{cases} \quad (2-7)$$

式(2-7)称为平面汇交力系的解析平衡方程,简称平衡方程。从公式(2-7)可以看出,平面汇交力系平衡方程最多只能求解两个独立的未知量。

例 2-3 如图 2-9(a)所示,平面刚架在 C 点受水平力 F 作用, $F=40 \text{ kN}$, 不计刚架自重。求支座 A 、 B 的反力。

【解】 (1) 选取平面刚架为研究对象,画受力图,如图 2-9(b)所示。

(2) 选取坐标轴,列平衡方程并求解,如图 2-9(b)所示。

$$\sum F_x = 0, F_A \cos \alpha + F = 0, F_A \times \frac{2}{\sqrt{5}} + 40 = 0, F_A = -44.72 \text{ kN} \quad (\swarrow)$$

$$\sum F_y = 0, F_A \sin \alpha + F_B = 0, -44.72 \times \frac{1}{\sqrt{5}} + F_B = 0, F_B = 20 \text{ kN} \quad (\uparrow)$$

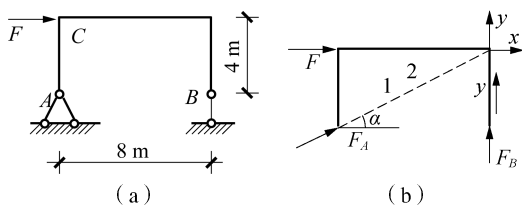


图 2-9

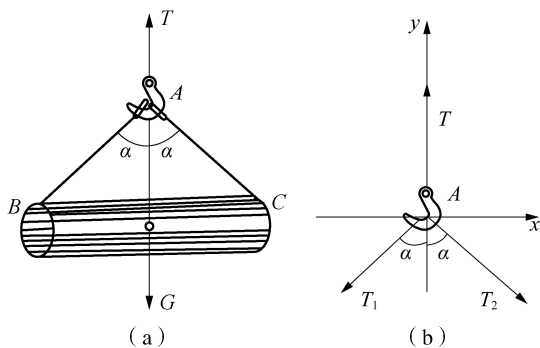


图 2-10

例 2-4 如图 2-10(a)所示,已知重为 G 的钢管被吊索 AB 、 AC 吊在空中,不计吊钩和吊索的自重,当重力 G 和夹角 α 已知时,求吊索 AB 、 AC 所受的力。

【解】 (1) 先从整体分析,可得 $T=G$;

(2) 选吊钩为研究对象,画受力图如图 2-10(b)所示,

(3) 选取坐标轴,列平衡方程并求解。



$$\sum F_x = 0, -T_1 \sin \alpha + T_2 \sin \alpha = 0$$

$$\sum F_y = 0, T - T_1 \cos \alpha - T_2 \cos \alpha = 0$$

$$\text{解得 } T_1 = T_2 = \frac{T}{2 \cos \alpha} = \frac{G}{2 \cos \alpha}$$

求得结果均为正值,说明力 T_1 和 T_2 都是拉力。

例 2-5 建筑工地使用的井架把杆起重装置如图 2-11(a)所示。重物通过卷扬机由绕过滑轮 B 的钢索起吊。把杆 A 端铰接在井架上, B 端系以钢索与井架连接。设重物重 $W=2 \text{ kN}$, 不计把杆的重量, 滑轮大小和重量均不计, 其轴承是光滑的。试求钢索 BC 的拉力和把杆 AB 所受的力。

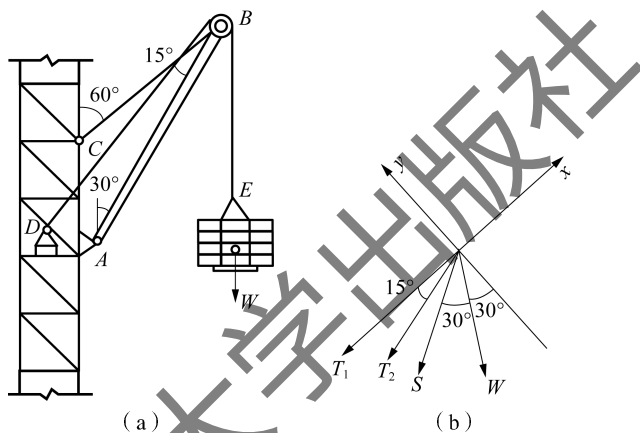


图 2-11

【解】 取滑轮 B 为研究对象。作用在滑轮上的力有: 钢索 BE 的拉力 W , 钢索 BC 的拉力 T_1 , 钢索 BD 的拉力 T_2 , 把杆 AB (二力杆) 对滑轮的约束反力 S 。假定 S 的指向如图, 即设把杆受拉力。因滑轮的大小不计, 所以这四个力可视为平面汇交力系。滑轮的受力图如图 2-11 所示。

为了避免解联立方程, 取坐标系如图 2-11(b) 所示, 其中 y 轴垂直于未知力 T_1 。列出平衡方程为

$$\sum F_y = 0, -T_2 \sin 15^\circ - S \cos 60^\circ - W \cos 30^\circ = 0$$

又滑轮的轴承是光滑的, 所以 $T_2 = W = 2 \text{ kN}$ 。

$$S = \frac{-2 \sin 15^\circ - 2 \cos 30^\circ}{\cos 60^\circ} = -4.5 \text{ kN}$$

所得 S 为负值, 表明 S 的实际指向与假定的相反, 即 AB 把杆受压力。

$$\sum F_x = 0, -T_1 - T_2 \cos 15^\circ - S \sin 60^\circ - W \sin 30^\circ = 0$$

$$T_1 = -2 \cos 15^\circ - (-4.5) \sin 60^\circ - 2 \sin 30^\circ = 0.965 \text{ kN}$$

在解题中未知力的指向可任意假定, 其正确性由计算结果中的正负号来决定。但必须注意, 如果求出未知力为负值, 则在运算过程中用到该力时, 应将该力的数值连同负号一起代入算式。

2.2 平面力偶系的合成与平衡

2.2.1 平面力偶系的合成

同时作用在物体上的两个或两个以上的力偶,称为力偶系。作用在同一平面内的力偶系称为平面力偶系。

力偶只能使物体转动。同样,在平面力偶系的作用下,物体也只能转动而不能移动,其转动效应必等于力偶系中各个力偶转动效应的总和。可见,平面力偶系的合成结果为一合力偶,其合力偶矩等于平面力偶系中的各力偶力偶矩的代数和。即

$$M = M_1 + M_2 + M_3 + \cdots + M_n = \sum M \quad (2-8)$$

合力偶矩的符号决定了其转向,正号表示逆时针转向。

例 2-6 某物体受三个共面力偶的作用,如图 2-12 所示,已知 $F_1 = 20 \text{ kN}$, $d_1 = 1.5 \text{ m}$, $F_2 = 30 \text{ kN}$, $d_2 = 2 \text{ m}$, $M_3 = -40 \text{ kN} \cdot \text{m}$, 试求其合力偶。

【解】 计算各力偶矩

$$M_1 = -F_1 \cdot d_1 = -20 \times 1.5 = -30 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_2 = F_2 \cdot d_2 = 30 \times 2 = 60 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$\text{其合力偶为: } M = M_1 + M_2 + M_3 = -30 + 60 - 40 = -10 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

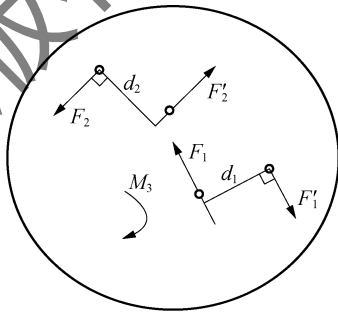


图 2-12

2.2.2 平面力偶系的平衡

平面力偶系合成的结果为一个合力偶,当合力偶矩等于零时,力偶系中力偶对物体的转动效应相互抵消,物体处于平衡状态。因此,平面力偶系平衡的充分必要条件是该力偶系中所有力偶的力偶矩代数和等于零。即

$$\sum M = 0 \quad (2-9)$$

上式又称为平面力偶系的平衡方程。平面力偶系只有一个独立的平衡方程,即可求解一个未知量。

例 2-7 如图 2-13 所示,简支梁 AB 受一力偶的作用,已知力偶, $M = 20 \text{ kN} \cdot \text{m}$, 梁长 $L = 4 \text{ m}$, 梁自重不计,求 A、B 支座处反力。

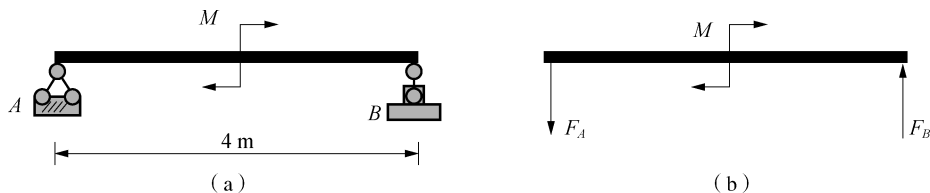


图 2-13



【解】 (1) 取梁 AB 为研究对象。

(2) 由于平面力偶系的平衡条件可知,梁在力偶 M 和 A、B 两处支座反力作用下平衡,如图 2-13(b)所示。

$$\sum M = 0, F_B l - M = 0, F_B = \frac{M}{l} = \frac{20}{4} \text{ kN} = 5 \text{ kN}, F_A = F_B = 5 \text{ kN}$$

因为 F_A 、 F_B 为正值,故与支座反力的实际方向与假设的方向相同。

2.3 平面一般力系的简化

各力的作用线既不汇交于一点又不相互平行的力系,称为平面一般力系。

力系向一点简化是一种较为简便并具有普遍性的力系简化方法。此方法的理论基础是力的平移定理。

2.3.1 力的平移定理

力可以沿其作用线在物体上移动,而不改变它对物体的作用效果。如果将一个力在其作用面内平行移动,即改变力的三要素中的一个要素,则会改变它对物体的作用效果。如图 2-14(a)所示,设一力 F 作用在轮缘上的 A 点,此力可使轮子转动,如果将它平移到轮心 O 点,如图 2-14(b)所示,则它就不能使轮子转动,由此可见,力的作用线是不能随便平移的。但是,如果将作用于 A 点的力平移到 O 点的同时,再在轮上附加一个适当的力偶,如图 2-14(c)所示,就可以使轮子的转动效应和图 2-14(a)是等效的。这个例子说明,要想把力平行移动,需要附加一个力偶才能和平移前等效。

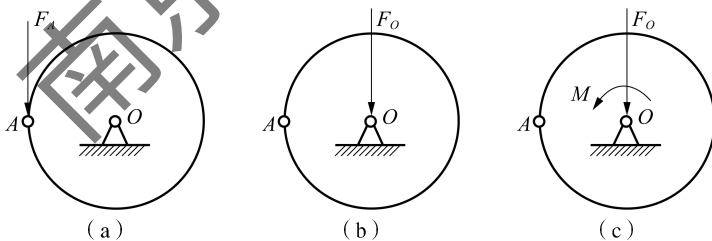


图 2-14

如图 2-15(a)所示,刚体 A 处作用一个力 F ,欲将该力平移到刚体上任一指定点 O 而又不改变刚体的运动效果,则应根据加减平衡力系公理,可在 O 点加上一对与力 F 等值、平行的平衡力 F' 与 F'' ,如图 2-15(b)所示。而力 F 和 F'' 组成一个附加力偶,其力偶矩等于原力对 O 点的矩,即

$$M = \sum M_O(F) = Fd \quad (2-10)$$

则,原来作用于 A 点的力 F 与现在作用于 O 点的力 F' 和附加力偶 (F, F'') 的联合作用等效,如图 2-15(c)所示。

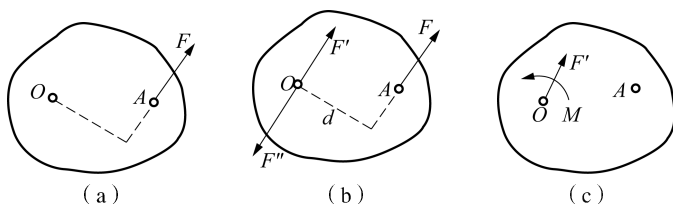


图 2-15

由此可知,作用于刚体上的力 F ,可平移到此刚体上任一点,但同时必须附加一个力偶,其力偶矩等于原力对新作用点的矩,这就是力的平移定理。

力的平移定理的逆定理:作用在刚体平面上的一个力 F 和一个力偶 M 可以合成一个该平面内与力 F 平行、大小相等、方向相同的合力 F_R ,合力 F_R 作用线与力 F 的作用线之间的垂直距离 d 等于力偶矩的大小 M 与力大小 F 的比值。

$$d = \frac{|M|}{F} \quad (2-11)$$

由合力 F_R 对力 F 作用线上任一点之矩(例如 O 点)的转向与力偶转向相同确定合力 F_R 在力 F 的左侧或右侧,如图 2-16 所示。

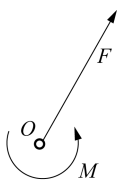


图 2-16

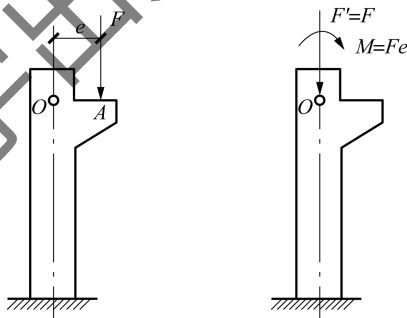
(a) 立柱上 A 点受力 F (b) 将力 F 平移到 O 点

图 2-17

例 2-8 如图 2-17(a)所示,牛腿柱的 A 点受到起重机梁传来的集中力 $F=150 \text{ kN}$ 。求将该力 F 平移到柱轴上 O 点时应附加的力偶矩,其中 $e=0.4 \text{ m}$ 。

【解】 根据力的平移定理,力 F 由 A 点平移到 O 点,必须附加一力偶,如图 2-17(b)所示,它的力偶矩 M 等于力 F 对 O 点的矩,即:

$$M = M_O(F) = -Fe = -150 \times 0.4 = -60 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

负号表示该附加力偶的转向是顺时针的。

2.3.2 平面一般力系的简化

1. 平面一般力系向平面内一点简化

设在物体上作用有平面一般力系 $F_1, F_2, \dots, F_n$, 如图 2-18(a)所示。将该力系简化,首先在物体上力系的作用面内任选一点 O 为简化中心。根据力的平移定理,将各力全部平移到 O 点,同时附加相应的力偶,可得到作用于点 O 的平面汇交力系 $F'_1, F'_2, \dots, F'_n$ 以及力偶



矩分别为 $M_1, M_2, \dots, M_n$ 的附加力偶系, 如图 2-18(b) 所示。平面汇交力系中, 各力的大小和方向分别与原力系中对应的各力相同。

$$\mathbf{F}'_1 = \mathbf{F}_1, \mathbf{F}'_2 = \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}'_n = \mathbf{F}_n$$

而各附加力偶的力偶矩分别等于原力系中各力对简化中心 O 的矩。

$$M_1 = M_O(\mathbf{F}_1), M_2 = M_O(\mathbf{F}_2), \dots, M_n = M_O(\mathbf{F}_n)$$

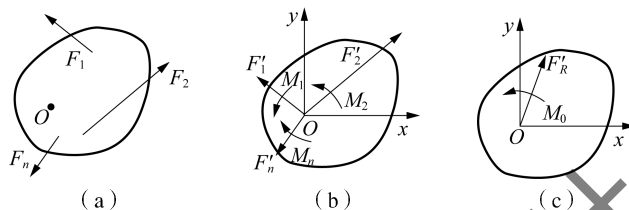


图 2-18

由此可见, 平面一般力系的简化问题便成为平面汇交力系与平面力偶系的合成问题。

将平面汇交力系合成, 得到作用在 O 点的一个力, 这个力的大小和方向等于作用在 O 点的各力的矢量和, 也就是等于原力系中各力的矢量和, 用 $\mathbf{F}'_R$ 表示, 则有:

$$\mathbf{F}'_R = \mathbf{F}'_1 + \mathbf{F}'_2 + \dots + \mathbf{F}'_n = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_n \quad (2-12)$$

原力系中各力的矢量和 $\mathbf{F}'_R$ 称为该力系的主矢量, 简称主矢。

平面力偶系可合成为一合力偶, 其力偶矩等于各附加力偶矩的代数和, 又等于原力系中各力对简化中心 O 之矩的代数和, 用 M_0 表示, 则有:

$$M_0 = M_1 + M_2 + \dots + M_n = M_O(\mathbf{F}_1) + M_O(\mathbf{F}_2) + \dots + M_O(\mathbf{F}_n) = \sum M_O(\mathbf{F}) \quad (2-13)$$

式中, M_O 为原力系 $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_n$ 对 O 点的主矩。

于是可得结论: 平面一般力系向作用面内任意一点简化的结果, 是一个力和一个力偶。这个力作用在简化中心, 它的矢量称为原力系的主矢, 这个力偶的力偶矩称为原力系对简化中心的主矩, 如图 2-18(c) 所示。

主矢是力系中各力的矢量和, 完全取决于各力的大小和方向, 所以它与简化中心的位置无关。而主矩等于力系中各力对简化中心之矩的代数和, 当取不同的简化中心时, 各力的力臂和转向均将改变, 所以一般情况下主矩与简化中心的位置有关。因此, 在说到主矩时, 必须指出是对哪一点的主矩。

求主矢 $\mathbf{F}'_R$ 的大小和方向可采用解析法。过 O 点取直角坐标系 xOy , 如图 2-18(c) 所示, 主矢 $\mathbf{F}'_R$ 在 x 轴和 y 轴上的投影为:

$$\begin{aligned} F'_{Rx} &= F'_{1x} + F'_{2x} + \dots + F'_{nx} = F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx} = \sum F_x \\ F'_{Ry} &= F'_{1y} + F'_{2y} + \dots + F'_{ny} = F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{ny} = \sum F_y \end{aligned}$$

式中, F'_{ix}, F'_{iy} 和 F_{ix}, F_{iy} 分别是力 $\mathbf{F}'_i$ 和 $\mathbf{F}_i$ 在坐标轴 x 轴和 y 轴上的投影。由于 $\mathbf{F}'_i$ 和 $\mathbf{F}_i$ 大小相等、方向相同, 所以它们在同一轴上的投影相等。于是可得主矢 $\mathbf{F}'_R$ 的大小为:

$$F'_R = \sqrt{(F'_{Rx})^2 + (F'_{Ry})^2} = \sqrt{(\sum F_x)^2 + (\sum F_y)^2} \quad (2-14)$$

主矢作用线与坐标轴 x 夹的锐角:

$$\alpha = \arctan \frac{|F'_{Ry}|}{|F'_{Rx}|} = \arctan \frac{|\sum F_y|}{|\sum F_x|} \quad (2-15)$$

F'_R 的指向由 $\sum F_x$ 和 $\sum F_y$ 的正负号确定。

从式(2-14)和式(2-15)可知,求主矢的大小和方向时,只要直接求出原力系中各力在两个坐标轴上的投影即可,而不必将力平移后再求投影。

2. 平面一般力系简化的最后结果

平面一般力系向 O 点简化,一般可得一力 F'_R (主矢)和一力偶 M_O (主矩),还可以根据不同情形,进一步简化得到最简结果。根据主矢和主矩是否为零,可能出现以下几种情形:

(1) 平衡力系。此时, $F'_R = 0, M_O = 0$ 。

(2) 合力偶。此时, $F'_R = 0, M_O \neq 0$, 简化结果与简化中心无关。合力偶矩等于原力系对简化中心之矩的代数和。

(3) 合力。此时,可能 $F'_R \neq 0, M_O = 0$, 合力即为通过简化中心的主矢;也可能 $F'_R \neq 0, M_O \neq 0$, 由力平移定理的逆定理,可将 F'_R 和 M_O 进一步简化为合力 F_R 。

综上所述,平面一般力系简化的最后结果即合成结果或者是一个力,或者是一个力偶,或者平衡力系。

例 2-9 求图 2-19(a)所示作用在刚体上的荷载向 O 点简化的结果,并求最简结果。

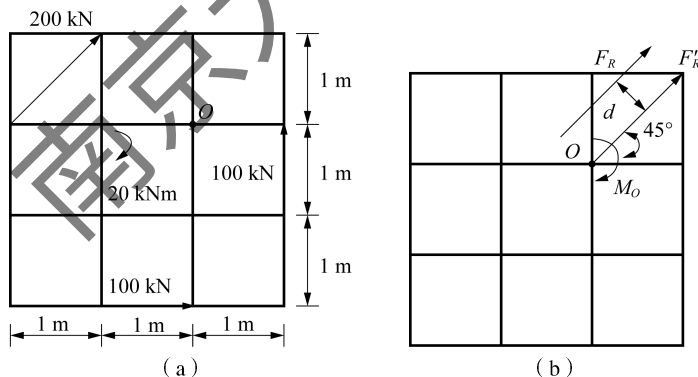


图 2-19

【解】 (1) $F'_{Rx} = \sum F_x = 200 \times \cos 45^\circ + 100 = 241 \text{ kN}$

$$F'_{Ry} = \sum F_y = 200 \sin 45^\circ + 100 = 241 \text{ kN}$$

$$F'_R = \sqrt{F'^2_{Rx} + F'^2_{Ry}} = \sqrt{241^2 + 241^2} = 341 \text{ kN}$$

$$F'_{Rx}, F'_{Ry} \text{ 均为正, } \alpha = \arccos \frac{F'_{Rx}}{F'_R} = \arccos 0.707 = 45^\circ$$

$$M_O = \sum M_O(F) = -200 \times \sqrt{2} - 20 + 100 \times 1 + 100 \times 2 = -2.84 \text{ kN} \cdot \text{m}$$



主矢量 F'_R 、主矩 M_O 如图 2-19(b) 所示。

(2) 由于主矢量、主矩均不为 0, 需要进一步简化。

最简结果为与主矢量平行、大小相等、方向相同的一个合力 F_R , 作用位置如图 2-19(b) 所示, 其中:

$$d = \frac{|M_O|}{F'_R} = \frac{2.84}{341} = 0.0083 \text{ m}$$

2.4 平面一般力系的平衡与应用

2.4.1 平面一般力系的平衡条件和平衡方程

平面一般力系向作用面内任一点简化可得到一主矢 F'_R 和主矩 M_O 。当主矢 F'_R 和主矩 M_O 都等于零时, 该力系处于平衡状态; 反之, 若力系平衡, 则其主矢 F'_R 和主矩 M_O 必定为零。由此可见, 平面一般力系平衡的必要和充分条件是力系的 F'_R 和主矩 M_O 都等于零, 即:

$$\begin{cases} F'_R = 0 \\ M_O = 0 \end{cases} \quad (2-16)$$

上述条件可用解析式表示。将式(2-13)和式(2-14)代入式(2-16), 可得

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_O(\mathbf{F}) = 0 \end{cases} \quad (2-17)$$

因此, 平面一般力系平衡的充分必要的解析条件是: 该力系中所有各力在两个坐标轴上的投影的代数和都等于零, 以及各力对任意一点力矩的代数和也等于零。

公式(2-17)称为平面一般力系平衡方程的基本形式, 其中前两个式子称为投影方程, 后一式子称为力矩方程。

2.4.2 平衡方程的其他形式

平面一般力系的平衡方程除了公式(2-17)所示的基本形式外, 还可以表示为二力矩形式和三力矩形式。

(1) 二力矩形式的平衡方程

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum M_A(\mathbf{F}) = 0 \\ \sum M_B(\mathbf{F}) = 0 \end{cases} \quad (2-18)$$

其中, x 轴不得垂直于 A 、 B 两点的连线。

(2) 三力矩形式的平衡方程

$$\begin{cases} \sum M_A(\mathbf{F}) = 0 \\ \sum M_B(\mathbf{F}) = 0 \\ \sum M_C(\mathbf{F}) = 0 \end{cases} \quad (2-19)$$

其中, A、B、C 三点不得共线。

平面一般力系有三种形式的平衡方程, 每种形式都只有三个独立的平衡方程, 因此最多只能求解三个未知量。其解题步骤如下:

(1) 选取研究对象。根据题意分析已知量和未知量, 选择适当的研究对象。

(2) 画受力图。必须对研究对象进行认真的受力分析, 正确地画出作用于研究对象上的所有主动力和约束反力。

(3) 列平衡方程求解未知量。选用适当形式的平衡方程, 最好是一个方程只包含一个未知量, 这样可避免解联立方程, 从而简化计算。为此, 要选择适当的坐标系和矩心。在应用投影方程时, 选取的投影轴应尽量与多个未知力相垂直; 应用力矩方程时, 矩心应选择多个未知力的交点上, 这样可使方程中的未知量减少, 使计算简化。

(4) 校核。校核时将已求出的未知力作为已知力, 列出第四个非独立的平衡方程, 若其代数和为零, 则计算结果正确。

例 2-10 计算图 2-20(a) 所示悬臂梁的支座反力、反力偶矩。

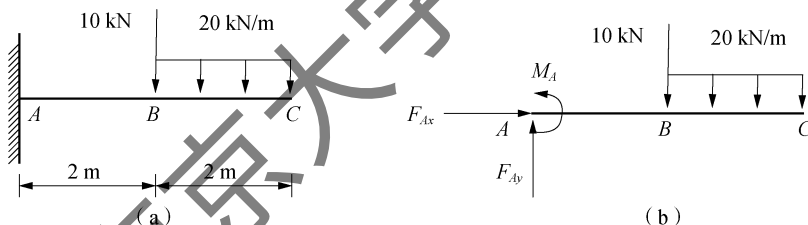


图 2-20

【解】 悬臂梁 ABC 受力如图 2-20(b) 所示。

$$\sum F_x = 0, F_{Ax} = 0$$

$$\sum F_y = 0, F_{Ay} - 20 \times 2 - 10 = 0, F_{Ay} = 50 \text{ kN}$$

$$\sum M_A(\mathbf{F}) = 0, M_A - 20 \times 2 \times 3 - 10 \times 2 = 0, M_A = 140 \text{ kNm}$$

例 2-11 外伸梁如图 2-21(a) 所示, 在 C 处受集中力 $\mathbf{F}$ 作用, 设 $F = 30 \text{ kN}$, 试求支座 A、B 的约束反力。

【解】 外伸梁 ABC 受力如图 2-21(b) 所示。

$$\sum M_A(\mathbf{F}) = 0, F_{By} \times 3 - F \sin 45^\circ \times 4 = 0, F_{By} = 28.28 \text{ kN} \quad (\uparrow)$$

$$\sum F_x = 0, F_{Ax} - F \cos 45^\circ = 0, F_{Ax} = 21.21 \text{ kN} \quad (\rightarrow)$$

$$\sum M_C(\mathbf{F}) = 0, -F_{Ay} \times 4 - F_{By} \times 1 = 0, F_{Ay} = -7.07 \text{ kN} \quad (\downarrow)$$

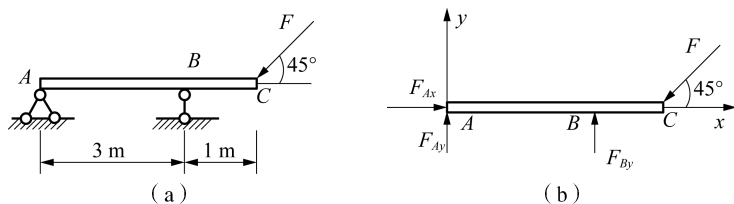


图 2-21

例 2-12 杆件 AD 、 BC 之间通过中间铰 C 连接, A 、 B 处为固定铰支座, 形成一个三角形托架, 其尺寸及承受载荷如图 2-22(a) 所示, 不计杆件自重, 已知 $F=10\text{ kN}$, 求 A 处的约束反力以及杆 BC 所受的力。

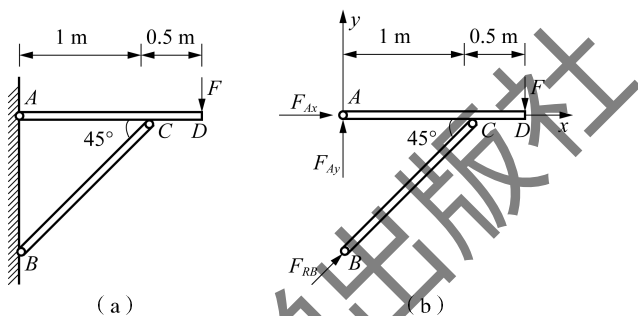


图 2-22

【解】 以整个三角形托架为研究对象。不计自重时 BC 为二力杆, 因此, 铰 B 的约束反力 F_{RB} 沿杆件 BC 的方向, 假设从 B 点指向 C 点。铰 A 的约束反力方向不定, 用两个未知力 F_{Ax} 和 F_{Ay} 表示。在三角托架上作用有三个未知力 F_{Ax} 、 F_{Ay} 、 F_{RB} 组成平面一般力系。画出三角托架的受力图并选取坐标轴如图 2-22(b) 所示。

$$\sum M_A(F) = 0, F_{RB} \cos 45^\circ \times 1 - F \times 1.5 = F_{RB} \cos 45^\circ \times 1 - 10 \times 1.5 = 0,$$

$$F_{RB} = 21.2\text{ kN} \quad (\nearrow)$$

$$\sum F_x = 0, F_{Ax} + F_{RB} \cos 45^\circ = F_{Ax} + 21.2 \times \cos 45^\circ = 0,$$

$$F_{Ax} = -15\text{ kN} \quad (\leftarrow)$$

$$\sum F_y = 0, F_{Ay} - F + F_{RB} \sin 45^\circ = F_{Ay} - 10 + 21.2 \times \sin 45^\circ = 0,$$

$$F_{Ay} = -5\text{ kN} \quad (\downarrow)$$

计算结果为负时, 表示实际方向与受力图上假设的方向相反。

例 2-13 起重机在图 2-23(a) 所示的位置保持平衡。已知吊杆 AB 长 10 m , 吊杆重 $W=10\text{ kN}$, 重心在吊杆 AB 的中点, 起吊物重 $G=30\text{ kN}$, $\alpha=45^\circ$, $\beta=30^\circ$, 试计算钢丝绳所受的拉力和铰链 A 所受的反力。

【解】 取吊杆 AB 为研究对象。作用在吊 AB 上的已知力有重物的重力 G 及吊杆的重力 W , 未知力有钢丝绳的拉力 F_T 和铰 A 的约束反力 F_{Ax} 、 F_{Ay} 。起重机上各力组成了平衡的平面一般力系。吊杆的受力图及选取的坐标轴如图 2-23(b) 所示。

$$\sum M_A(\mathbf{F}) = 0, F_T \times 10 \times \sin 30^\circ - W \times 5 \times \cos 45^\circ - G \times 10 \times \cos 45^\circ = 0$$

$$F_T \times 10 \times \sin 30^\circ - 10 \times 5 \times \cos 45^\circ - 30 \times 10 \times \cos 45^\circ = 0$$

$$F_T = 49.50 \text{ kN} (\leftarrow)$$

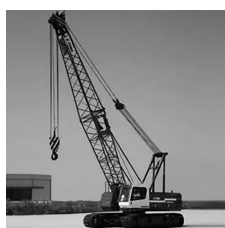
$$\sum F_x = 0, F_{Ax} - F_T \cos 15^\circ = F_{Ax} - 49.50 \times \cos 15^\circ = 0$$

$$F_{Ax} = 47.81 \text{ kN} (\rightarrow)$$

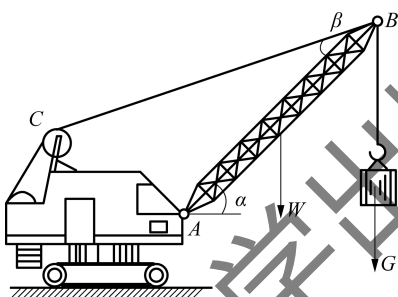
$$\sum F_y = 0, F_{Ay} - F_T \sin 15^\circ - W - G = 0$$

$$F_{Ay} = 52.82 \text{ kN} (\uparrow)$$

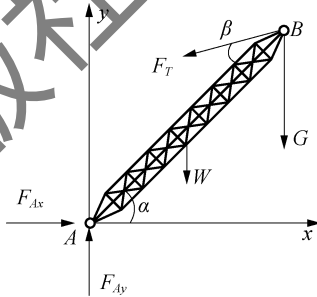
计算结果中不带负号,说明各约束反力的假设指向与实际指向一致。



(a)



(b)



(c)

图 2-23

2.5 平面平行力系的平衡与应用

平面力系中各力的作用线互相平行时,称为平面平行力系。

平面平行力系是平面一般力系的特殊情况,因此,它的平衡方程可由平面一般力系的平衡方程导出。如果取 x 轴与平行力系各力的作用线垂直, y 轴与各力平行,如图 2-24 所示,则不论力系是否平衡,各力在 x 轴上的投影恒等于 0。

$$\begin{cases} \sum F_y = 0 \\ \sum M_O(\mathbf{F}) = 0 \end{cases} \quad (2-20)$$

因为各力与 y 轴平行,所以 $\sum F_y = 0$ 表明各力的代数和等于零。这样,平面平行力系平衡的充分必要条件是力系中所有各力的代数和等于零,力系中各力对任一点的矩的代数和等于零。

同理,由平面一般力系平衡方程的二力矩式形式,可导出平面平行力系平衡方程的二力矩式。

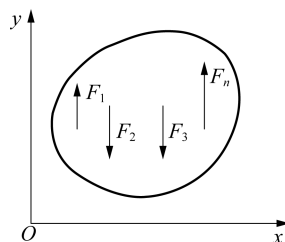


图 2-24



$$\begin{cases} \sum M_A(\mathbf{F}) = 0 \\ \sum M_B(\mathbf{F}) = 0 \end{cases} \quad (2-21)$$

其中, A 、 B 两点的连线不与各力的作用线平行。

平面平行力系有两个独立的平衡方程, 最多可以求解两个未知量。

例 2-14 一桥梁桁架受荷载 F_1 和 F_2 作用, 桁架各杆的自重不计, 尺寸如图 2-25 所示。已知 $F_1=80 \text{ kN}$, $F_2=50 \text{ kN}$, 试求支座 A 、 B 的约束反力。

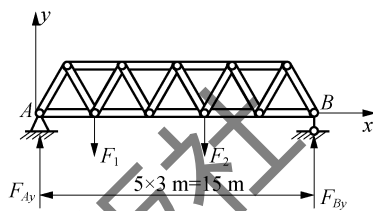


图 2-25

【解】 以整个桁架为研究对象, 支座 A 的约束反力应与各力作用线平行, 因此作用在桁架上的已知力 F_1 、 F_2 和未知力 F_{Ay} 、 F_{By} 组成了平衡的平面平行力系。列平衡方程求解约束反力 F_{Ay} 和 F_{By} 。

$$\sum M_A(\mathbf{F}) = 0, F_{By} \times 15 - F_1 \times 3 - F_2 \times 9 = 0$$

$$F_{By} \times 15 - 80 \times 3 - 50 \times 9 = 0$$

$$F_{By} = 46 \text{ kN} \quad (\uparrow)$$

$$\sum F_y = 0, F_{Ay} + F_{By} - F_1 - F_2 = 0$$

$$F_{Ay} + 46 - 80 - 50 = 0$$

$$F_{Ay} = 84 \text{ kN} \quad (\uparrow)$$

例 2-15 一汽车式起重机, 车重 $Q=26 \text{ kN}$, 起重机伸臂重 $G=4.5 \text{ kN}$, 起重机旋转及固定部分重 $W=31 \text{ kN}$ 。各部分尺寸如图 2-26 所示, 单位为 m 。设伸臂在起重机对称面内, 且放在最低位置, 求此时车不致翻倒的最大起重量 F_P 。

【解】 取汽车整体为研究对象, 汽车受力图如图 2-26 所示。若汽车式起重机最大起重量 F_P 过大, 使得汽车式起重机的翻倒力矩 $>$ 稳定力矩, 则汽车式起重机可能会绕 B 点翻倒; 若要汽车式起重机不翻倒, 翻倒力矩 $\leq$ 稳定力矩。

汽车起重机翻倒的临界情况是前轮压力 $F_{NA} = 0$, 因此, 不翻倒条件是 $F_{NA} \geq 0$ 。先按前轮压力 $F_{NA} = 0$, 列出平衡方程进行求解。

汽车在满载时可能绕点 B 翻倒, 取临界情况 $F_{NA} = 0$, 则:

$$\sum M_B(\mathbf{F}) = 0, Q \times 2 - G \times 2.5 - F_P \times 5.5 = 0$$

$$26 \times 2 - 4.5 \times 2 - F_P \times 5.5 = 0$$

$$F_P = 7.82 \text{ kN}$$

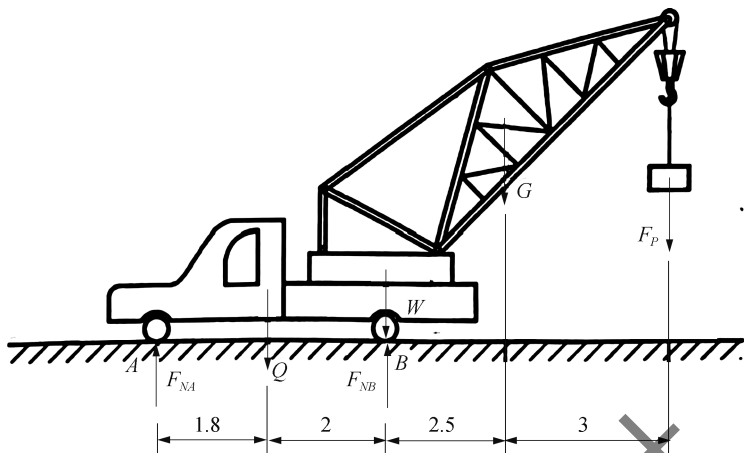


图 2-26

故最大起重量: $F_{P, \text{Max}} = 7.82 \text{ kN}$

例 2-16 塔式起重机如图 2-27 所示。机架重 $G_1 = 700 \text{ kN}$, 作用线通过塔架的中心。最大起重量 $G_2 = 200 \text{ kN}$, 最大悬臂长为 12 m , 轨道 AB 的间距为 4 m 。平衡锤重 G_3 到机身中心线距离为 6 m 。试问: 保证起重机在满载和空载时都不翻倒, 求平衡锤重 G_3 的范围?

【解】 取塔式起重机为研究对象, 塔式起重机受力图如图 2-27 所示。

塔式起重机在满载和空载情况下, 将有可能沿不同的轨道翻到。塔式起重机满载, 平衡锤重过轻, 将可能绕 B 轨道向右翻到; 塔式起重机空载时, 平衡锤重过重, 将可能绕 A 轨道向左翻到。

(1) 塔式起重机满载时, 起重量 $G_2 = 200 \text{ kN}$, 可能绕 B 点翻倒, 在平衡的临界情况下, 塔式起重机左轮 A 将悬空, $F_A = 0$, 平衡锤重 G_3 此时最小, 可得:

$$\begin{aligned}\sum M_B(F) &= 0, G_{3\min} \times (6 + 2) + G_1 \times 2 - G_2 \times (12 - 2) = 0 \\ G_{3\min} \times (6 + 2) + 700 \times 2 - 200 \times (12 - 2) &= 0 \\ G_{3\min} &= 75 \text{ kN}\end{aligned}$$

(2) 塔式起重机空载时, 起重量 $G_2 = 0 \text{ kN}$, 可能绕 A 点翻倒, 在平衡的临界情况下, 塔式起重机右轮 B 将悬空, $F_B = 0$, 平衡锤重 G_3 此时最大, 可得:

$$\begin{aligned}\sum M_A(F) &= 0, G_{3\max} \times (6 - 2) - G_1 \times 2 = 0 \\ G_{3\max} \times (6 - 2) - 700 \times 2 &= 0 \\ G_{3\max} &= 350 \text{ kN}\end{aligned}$$

故平衡锤重 G_3 的范围为 $75 \text{ kN} \leq G_3 \leq 350 \text{ kN}$ 。

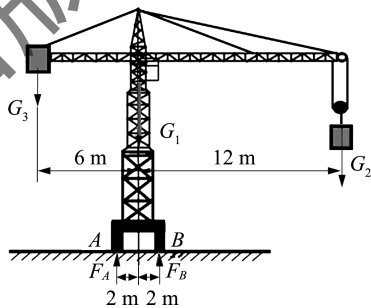


图 2-27



2.6 物体系统的平衡问题求解

在前面讨论的都是单个物体的平衡问题,但在实际工程中,工程结构物一般都是由若干个体通过不同的约束按一定方式连接而成的系统,这种系统称为物体系统,简称物体系或物系。如图 2-27(a)所示的三铰拱,由左拱 AC 和右拱 BC 通过铰 C 连接,并支承在支座 A、B 上而组成的一个物体系统。

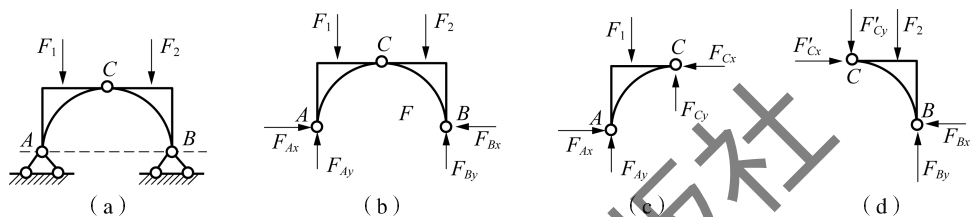


图 2-28

研究物体系统的平衡问题,不仅需要求解支座反力,而且还要求出系统内物体与物体之间的相互作用力。通常将系统以外的物体对这个系统的作用力称为外力,系统内各物体之间的相互作用力称为系统的内力。如图 2-28(b)所示,荷载 F_1 、 F_2 及支座 A、B 的反力就是三铰拱的外力,而铰 C 处左、右两半拱之间的相互作用的力就是三铰拱的内力。由于内力总是成对出现的,且每对内力中的两个力均等值、共线、反向并分别作用于所选的两个物体上,在以整体为研究对象时,每对内力均可抵消。所以,内力不应出现在整体的受力和平衡方程中。

应当注意的是外力和内力的概念是相对的,取决于所选取的研究对象。如果不是取整个三铰拱而是分别取左半拱或右半拱为研究对象,则铰 C 对左半拱(2-28(c))或右半拱(2-28(d))作用的力就成为外力了。由此可见,如需求出系统内某两物体间的相互作用力,则应将系统自两物体的连接处拆开以使系统成为两部分,并任取其一为研究对象,于是两物体间的相互作用力就成为作用于所选研究对象上的外力,理应出现在它的受力和相应的平衡方程中。

研究物体系统的平衡时,组成系统的每个部分也都是平衡的。因此,在解决物体系统的平衡问题时,既可选取整个物体系统,也可以选取其中某部分物体为研究对象,均可以列出 3 个平衡方程。若由 n 个物体组成的物体系统,则共有 $3n$ 个独立的平衡方程,可求解 $3n$ 个未知数。如系统中有的物体受平面汇交力系或平面平行力系作用时,则系统的平衡方程数目相应减少,而所能求的未知量的个数也相应减少。

下面举例说明求解物体系统平衡问题的方法,分析受力图,根据可能出现的不同情况选择不同的解题路径。

(1) 在合理顺序选取研究对象情况下,受力图上未知量的个数均不大于独立的平衡方程数,依次全部求解。

例 2-17 计算图 2-29(a)所示静定组合梁的支座反力、反力偶矩。

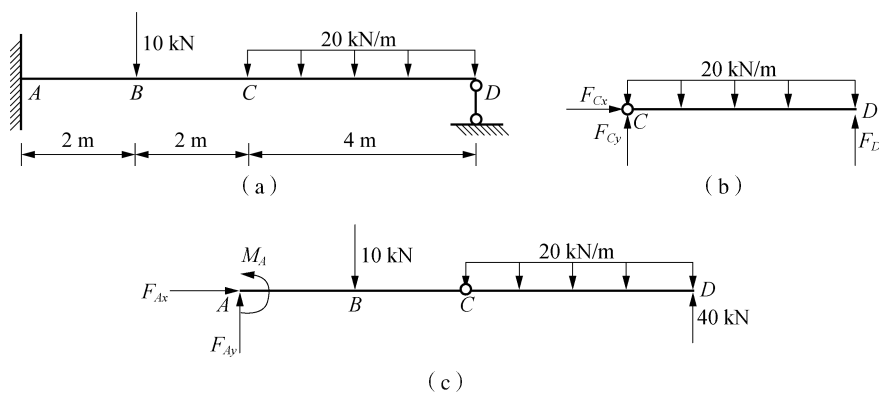


图 2-29

【解】 组合梁 ABC 部分可以单独作为机构使用,称为基本部分, CD 部分依赖 ABC 部分,称为附属部分。先以附属 CD 杆为研究对象,受力如图 2-29(b)所示

$$\sum M_C(F) = 0, F_D \times 4 - 20 \times 4 \times 2 = 0, F_D = 40 \text{ kN}$$

再以整体为研究对象,受力如图 2-29(c)所示

$$\sum F_y = 0, F_{Ay} - 10 - 20 \times 4 + 40 = 0, F_{Ay} = 50 \text{ kN}$$

$$\sum F_x = 0, F_{Ax} = 0$$

$$\sum M_A(F) = 0, M_A + 40 \times 8 - 10 \times 2 - 20 \times 4 \times 6 = 0$$

$$M_A = 180 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

(2) 整体、局部及单个物体受力图上的未知量个数 n 均大于独立的平衡方程数,但有的受力图上有 $n-1$ 未知力汇交于一点或彼此相互平行,应对该分离体先行部分求解,然后根据作用力与反作用力关系或不同受力图上的同一个力的特点,将已求得力作为已知量,从而使原来不可求解的分离体转化为能够求解的分离体,逐步解出所有的未知量。

例 2-18 静定刚架的载荷及尺寸如图 2-30(a)所示。求支座反力和中间铰处的反力。

【解】 画整体及 AC 受力图如图 2-30(b)、(c)示。整体及 AC 受力图中均有 4 个未知量,但整体有 3 个未知力汇交于一点,因此,先对整体分析,求解部分未知量:

$$\sum M_A(F) = 0, F_{By} \times 4 - 50 \times 2 - 20 \times 2 \times 3 = 0, F_{By} = 55 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0, F_{Ay} + 55 - 20 \times 2 = 0, F_{Ay} = -15 \text{ kN}$$

再对 AC 分析求解:

$$\sum F_y = 0, F_{Cy} - 15 = 0, F_{Cy} = 15 \text{ kN}$$

$$\sum M_A(F) = 0, 15 \times 2 - F_{Cx} \times 2 - 50 \times 2 = 0, F_{Cx} = -35 \text{ kN}$$

$$\sum F_x = 0, F_{Ax} + 50 - 35 = 0, F_{Ax} = -15 \text{ kN}$$

最后对整体求解:



$$\sum F_x = 0, F_{Bx} + 50 - 15 = 0, F_{Bx} = -35 \text{ kN}$$

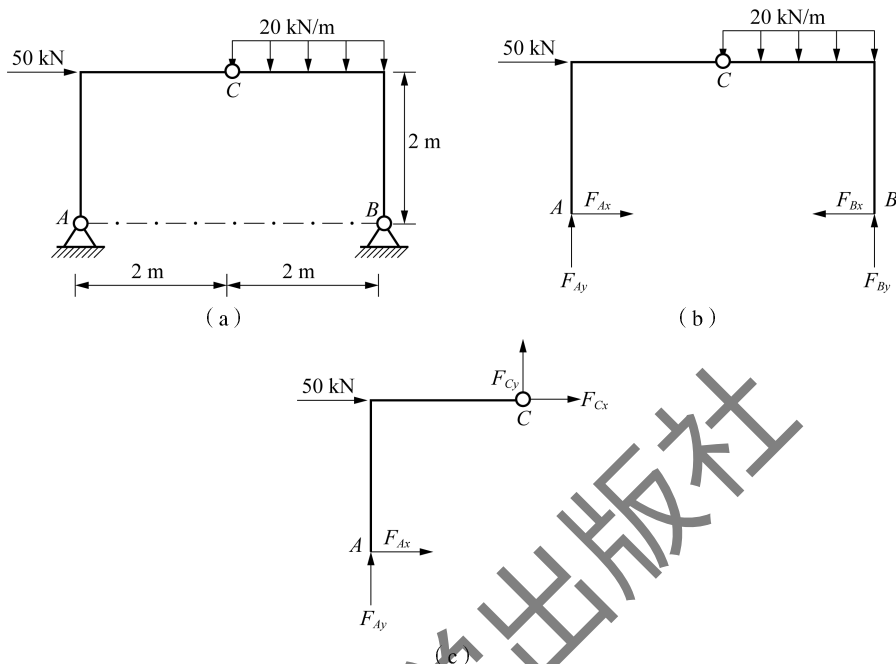


图 2-30

(3) 所有受力图上未知力的数目 n 均大于独立的平衡方程数目时,也不存在受力图上有 $n-1$ 未知力汇交于一点或彼此相互平行,此时应选取两个包含相同的未知量的分离体为研究对象分别列出平衡方程然后联立求解。

在求解物体系统的平衡问题时,要特别注意内力和外力的转化。有些力对于整个系统来讲是内力,但对于某几个物体组成的局部或某单个物体则可能是外力。因内力总是成对出现,画研究对象的受力图时,只画内力不画外力。

2.7 考虑摩擦的平衡问题

前面讨论物体的平衡问题时,均假设物体间的接触面是光滑的,没有考虑物体间的摩擦。事实上,摩擦在自然界中是普遍存在的,在许多问题中,摩擦力对物体的平衡与运动起着主要作用,如制动器靠摩擦刹车、皮带靠摩擦传递运动;另一方面,由于摩擦的存在,给各种机械带来多余的阻力,从而消耗了能量,使机件发热和磨损、降低精度和效率、缩短寿命。因此,研究摩擦的性质及计算很有必要。根据物体间的相对运动情况,可把摩擦分为滑动摩擦和滚动摩擦。而滑动摩擦又分为静滑动摩擦和动滑动摩擦。本节仅对滑动摩擦作重点介绍。

2.7.1 静滑动摩擦

当两物体在接触面上有相对滑动趋势但仍保持相对静止时,接触面上就存在阻碍相对

滑动的力,这种阻力称为静滑动摩擦力,简称静摩擦力。

如图 2-31 所示,在水平面上放一重为 G 的物体 A ,在其上加一水平推力 P 。当 P 力不太大时,物体仍处于静止状态,这是因为沿接触面存在一个阻碍物体滑动的切向力 F ,这个力就是静摩擦力。根据物体处于平衡状态可知,静摩擦力的方向与两物体间的相对滑动趋势的方向相反,静摩擦力 F 的大小等于水平推力 P 的大小。当水平推力 P 变化时,只要物体处于静止,静摩擦力 F 的大小就始终等于水平推力 P 的大小,并随水平推力的变化而变化,如图 2-31(a)所示。但静摩擦力并不能无限制地增加,当 P 的大小增大到某一临界值时,物体处于将要滑动而未动的临界状态,此时,静摩擦力达到最大值,如图 2-31(b)所示。若水平推力继续增大,静摩擦力却不再增加,物体开始滑动,即失去平衡,如图 2-31(c)所示。

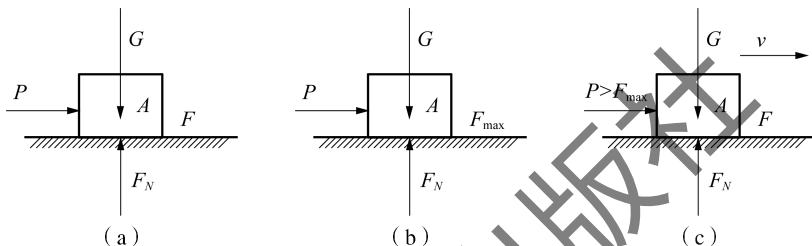


图 2-31

当物体处于将动而未动的临界状态时,其所受的静摩擦力的最大值称为最大静摩擦力,记为 $F_{\max}$ 。所以静摩擦力的取值范围为

$$0 \leq F \leq F_{\max} \quad (2-22)$$

总之,当物体处于静止状态时,其所受的静摩擦力是一个不确定的值。该值的大小等于引起相对滑动的外力,并随此外力的变化而变化;方向始终与此外力的方向相反。但最大静摩擦力是一个确定的值。其值为

$$F_{\max} = f F_N \quad (2-23)$$

式(2-23)称为静滑动摩擦定律,表明最大静摩擦力的大小与法向反力的大小成正比,方向与两物体间的相对滑动趋势的方向相反。 F_N 为法向反力的大小, f 称为静摩擦系数,它的大小与两物体接触面的材料、表面的光滑程度、温度、湿度等因素有关,可由实验测定。

2.7.2 动滑动摩擦

当两物体在接触表面间有相对滑动时,接触面上存在的阻碍相对滑动的阻力称为动滑动摩擦力,简称为动摩擦力。

动摩擦力的方向与两物体间的相对滑动的方向相反,动摩擦力的大小 F' 也与法向反力 F_N 的大小成正比,即

$$F' = f' F_N \quad (2-24)$$

式(2-24)称为动滑动摩擦定律, f' 称为动摩擦系数,它的大小除与两物体接触面的材料、表面的光滑程度、温度、湿度等因素有关,还与两物体间的相对运动速度有关,随速度的增加而减小,一般情况可认为是常数,其值可由实验测定。



2.7.3 摩擦角

如图 2-32 所示,在考虑摩擦时,支撑面对物体施加的约束包括法向反力 F_N 和切向反力(摩擦力) F , 二者的合力 F_R 称为全反力。全反力与法向的夹角用字母 φ 表示, φ 角随着摩擦力 F 的增加而增大,当摩擦力 F 达到最大值,即为最大静摩擦力时, φ 角也达到最大值 φ_m , φ_m 称为摩擦角。

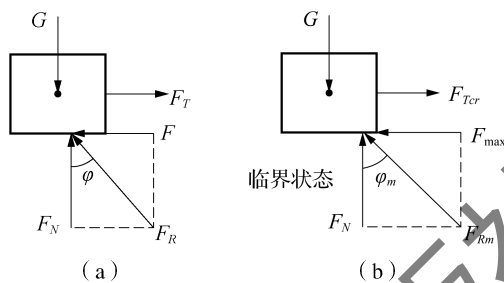


图 2-32

由图 2-32 可知:

$$\tan \varphi_m = \frac{F_{\max}}{F_N} = \frac{f F_N}{F_N} = f \quad (2-25)$$

式(2-25)表明,摩擦角的正切值等于物体间的静摩擦系数,即摩擦角的大小取决于物体接触面间的材料、表面状况等因素。摩擦角与摩擦系数一样,也是表明物体间摩擦性质的物理量。

2.7.4 自锁现象

如图 2-33 所示的螺杆,螺纹可以看成是绕在一圆柱上的斜面,螺纹升角 α 就是斜面的倾角。螺母相当于斜面上的滑块,受力如图 2-33(d)所示,加在螺母上的力 F 相当于滑块上的主动力,斜面的全反力为 F_R 。当滑块平衡时, F 和 F_R 必然共线,而 F_R 与法向间的夹角不能超过摩擦角,即 $\varphi \leq \varphi_m$, 因此,平衡时,也必然满足 $\alpha \leq \varphi_m$ 。显然,这一条件与主动力的的大小无关。

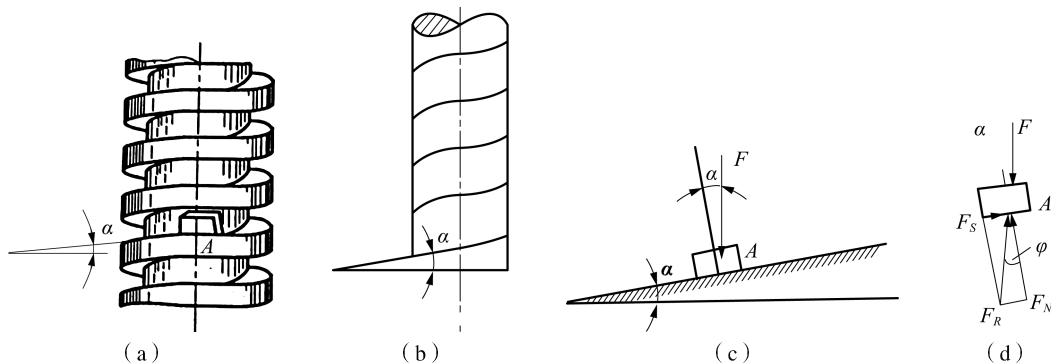


图 2-33

同样,当物体同时受多个主动力作用时,只要主动力的合力作用线与法向间的夹角满足上述条件,物体就处于静平衡。即作用于物体上的主动力的合力,不论其大小如何,只要其作用线与接触面法线间的夹角小于摩擦角,物体便处于静止状态,这种现象叫作自锁。

例如,在建筑工地堆放砂、石子时,能够堆起的最大坡角就是松散物质间的摩擦角,用该角可以测算出一定面积的场地能堆放的松散物质的数量;在现浇钢筋混凝土梁的施工过程中,模板需要立柱支撑,并在立柱和模板之间打入楔块以便调节柱高,要使楔块不滑出,其顶角就要小于它与上、下两物体间的摩擦角之和。但在另一些问题中要避免自锁现象的发生,例如,自卸货车的车斗能翻转的角度必须大于摩擦角,以保证货车车斗内的货物倾泻干净;水闸闸门启闭时应避免发生自锁,以防止闸门卡住。

2.7.5 考虑摩擦的平衡问题

由于静摩擦力在非临界状态的取值有一定的范围,因此,在解决含有摩擦的平衡问题时,首先要考虑物体处于什么样的平衡状态,对应的问题大致可分为下列三种情况。

(1) 非临界状态的静平衡问题。这类问题的静摩擦力还未达到最大值,是未知的约束反力,其值由平衡方程确定。

(2) 临界状态的静平衡问题。当物体处于临界状态的静平衡时,静摩擦力达到最大值,属已知力的范畴,其值根据摩擦定律可求。

(3) 平衡范围问题。由于静摩擦力的值在一定的范围内,因此对应的某些主动力和约束反力的值也在一定的范围内。求解这类问题时,可先求出两个相反方向的静平衡临界状态的未知力,然后对结果进行分析,从而得出其平衡范围。

例 2-19 如图 2-34 所示,重量 $G=100\text{ N}$ 的物体靠在墙面上,受到与一个墙面垂直的力 F 作用,物体与墙面之间的静摩擦系数 $f_s=0.38$ 、动摩擦系数 $f'=0.3$,求当 F 分别等于 250 N 、 350 N 时墙面与物体之间的摩擦力。

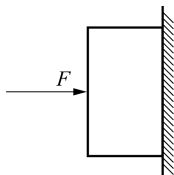


图 2-34

【解】 保持物体静止不下滑需要接触面间提供等于物体重力即 100 N 的静摩擦力。物体受到墙面法向压力 F_N 等于力 F 。

(1) 当 $F=250\text{ N}$ 时,墙面与物体之间能够提供的最大静摩擦力为:

$$F_{s\max}=f_s F_N=0.38 \times 250=95\text{ N} < 100\text{ N}$$

则物体滑动,此时的摩擦力为动摩擦力,其值为:

$$F=f' F_N=0.3 \times 250=75\text{ N}$$

(2) 当 $F=350\text{ N}$ 时,墙面与物体之间能够提供的最大静摩擦力为:

$$F_{s\max}=f_s F_N=0.38 \times 350=133\text{ N} > 100\text{ N}$$

则物体静止,此时的摩擦力为静摩擦力,根据平衡条件,其值为 100 N 。

例 2-20 如图 2-35(a)所示的均质木梯长为 $2a$,重为 G ,其一端放在地面上,另一端放在铅垂墙面上,接触面间的摩擦角为 φ_m ,求木梯平衡时倾角的取值范围。

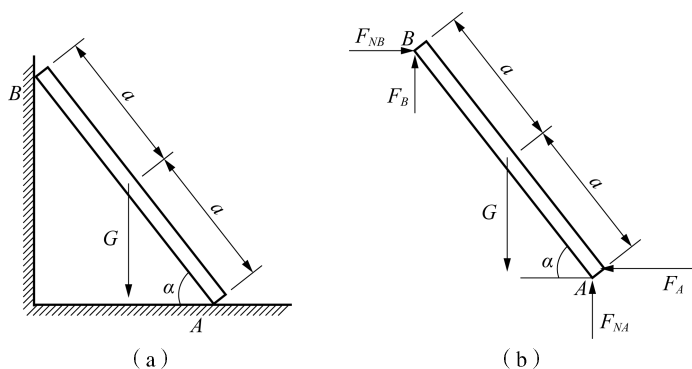


图 2-35

【解】以木梯为研究对象,画受力图。取木梯平衡的临界状态, A、B 处的静摩擦力如图 2-35(b)所示。列平衡方程。

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 & F_{NB} - F_A = 0 \\ \sum F_y = 0 & F_{NA} + F_B - G = 0 \\ \sum M_B(F) = 0 & F_{NA} \times 2a \times \cos \alpha - F_A \times 2a \times \sin \alpha - G \times a \times \cos \alpha = 0 \end{cases}$$

由 $F_{s\max} = f_s F_N$, 可知 $F_A = F_{NA} \times \tan \varphi_m$, $F_B = F_{NB} \times \tan \varphi_m$

联立上述方程,解得 $\tan \alpha = \frac{1 - \tan^2 \varphi_m}{2 \tan \varphi_m} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - 2\varphi_m\right)$, 即 $\alpha = \frac{\pi}{2} - 2\varphi_m$

则木梯倾角的取值范围为 $\frac{\pi}{2} - 2\varphi_m \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ 。

例 2-21 一混凝土挡水坝高 5 m, 坝前水深 4.5 m。取单位长度 1 m 的坝段进行分析, 坝前受按三角形规律分布的水压力作用, 如图 2-36 所示, 已知水压力的合力 $F_R = 101.25 \text{ kN}$, 作用线通过 B 点。混凝土的单位体积 $\gamma = 24 \text{ kN/m}^3$ 。

(1) 若要求坝不会绕 x 轴翻转, 则坝宽 b 至少应为多少?

(2) 若坝底与基础的动摩擦因数 $f = 0.3$, 该坝是否会滑动? 如不允许滑动, 则坝宽度 b 最小又应为多少?

【解】坝体自重 $G = 5 \times 1 \times b \times 24 = 120b \text{ kN}$

(1) 坝不会绕 x 轴翻转的条件是坝体自重对 x 轴之矩大于或等于水压力对 x 轴之矩, 即:

$$120b \times \frac{b}{2} \geq 101.25 \times 1.5$$

求得: $b \geq 1.591 \text{ m}$, 则坝宽 b 至少应为 1.6 m

(2) 先验算坝体是否滑动, 即最大静摩擦力是否大于水平水压力。

此时自重 $G = 120 \times 1.60 = 192 \text{ kN}$

接触面间能够提供的最大静摩擦力为

$$F_{s\max} = f_s F_N = 0.3 \times 192 = 57.6 \text{ kN} < 101.25 \text{ kN}$$

则坝体滑动。

如要求不滑动,则应将底宽加大,使得接触面间能够提供的最大静摩擦力大于等于水平推力,即:

$$120b \times 0.3 \geq 101.25$$

求得: $b \geq 2.813 \text{ m}$, 则坝宽度 b 最小应为 2.82 m 。

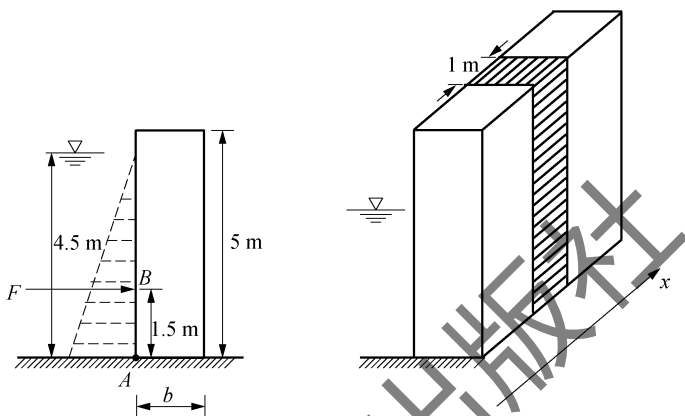


图 2-36

2.8 重心位置的确定

2.8.1 平行力系的中心

平行力系是工程实际中较常见的一种力系,如风对建筑物的压力、物体受到的地球引力、水对堤坝的压力等。在研究这类问题时需要确定力系的合力及其作用点的位置。

在力学中,平行力系合力的作用点称为平行力系的中心。可以证明,平行力系的中心位置只与力系中各力的大小和作用点的位置有关,与各力的方向无关。因此,当保持各力的大小和作用点不变时,各力绕其作用点向相同的方向转过相同的角度,力系的中心位置不变。

2.8.2 重心

确定物体的重心位置,在工程实际中有很重要的意义。例如,古代的宝塔和近代的高层建筑,越往下面积越大,这可增加建筑物的稳定性和合理性;塔吊的重心位置若超出某一范围会产生翻倒。物体所受的重力实际上就是一个平行力系,通过大量实践我们知道,对于一个均质物体来讲,无论此物体如何放置,这个平行力系合力的作用线总是通过一个确定的点,此点称为物体的重心。

在工程实际中,重心具有重要的意义。不论是物体的平衡还是运动变化,都与重心的位置密切相关。如重心的位置会影响物体的平衡和稳定,这对于飞机和船舶尤为重要;高速转动的转子,如果转轴不通过重心,将会引起强烈地振动,甚至引起破坏。相反,对有些转动零

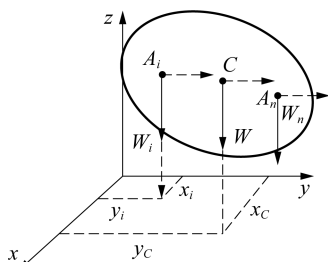


图 2-37

件,则要使它的重心偏离转动轴线一定的距离,使其产生某种可以利用的效果,如振动打桩机等。

设有一物体,重为 W ,如图 2-37 所示。物体任一小部分的重力为 W_i , 物体的重力即是每个微小部分重力的合力,求重心位置就是求合力作用点的位置。

设微小部分 A_i 的坐标为 x_i, y_i, z_i , 利用合力矩定理,有

$$\begin{aligned} x_c \cdot W &= \sum x_i W_i \\ -y_c \cdot W &= -\sum y_i W_i \end{aligned}$$

由上式可求出 x_c, y_c 。为求 z_c , 利用平行力系中心位置与各力方向无关的特性,将物体连同坐标系绕 x 轴旋转 90° , 使 y 轴向下,重力作用线与 y 轴平行,可用同样的办法得到

$$-z_i \cdot W = -\sum z_i \cdot W$$

于是得到求物体重心位置的普遍公式

$$\begin{cases} x_c = \frac{\sum x_i W_i}{W} \\ y_c = \frac{\sum y_i W_i}{W} \\ z_c = \frac{\sum z_i W_i}{W} \end{cases} \quad (2-26)$$

如果物体是均质的,物体的重心即为物体的几何中心——形心。上式即可化为

$$\begin{cases} x_c = \frac{\int_V x dV}{V} \\ y_c = \frac{\int_V y dV}{V} \\ z_c = \frac{\int_V z dV}{V} \end{cases} \quad (2-27)$$

如果物体是均质且等厚度的板,则计算形心位置的公式化为

$$\begin{cases} x_c = \frac{\int_A x dA}{A} \\ y_c = \frac{\int_A y dA}{A} \\ z_c = \frac{\int_A z dA}{A} \end{cases} \quad (2-28)$$

对于等截面均质细长杆,计算其形心的公式为

$$\begin{cases} x_c = \frac{\int_l x dl}{l} \\ y_c = \frac{\int_l y dl}{l} \\ z_c = \frac{\int_l z dl}{l} \end{cases} \quad (2-29)$$

2.8.3 确定重心位置的方法

1. 简单几何形状物体重心

(1) 对称法:对均质物体如在几何体上具有对称面、对称轴和对称中心,则此物体的重心必在此对称平面、对称轴与对称中心上面。

如均质物体有对称面,或对称轴,或对称中心,该物体的重心必相应地在这个对称面,或对称轴,或对称中心上。图 2-38 所示的是工程中常用构件的截面形状,其中的矩形(a)、圆形(b)和工字型(c)截面都具有对称中心,而 T 形(d)和槽形(e)截面具有一个对称轴,其形心必然在它们的对称轴上。另外正圆锥体或正圆锥面、正棱柱体或正棱柱面的重心都在其轴线上,椭球体或椭圆面的重心在其几何中心上,平行四边形的重心在其对角线的交点上等。

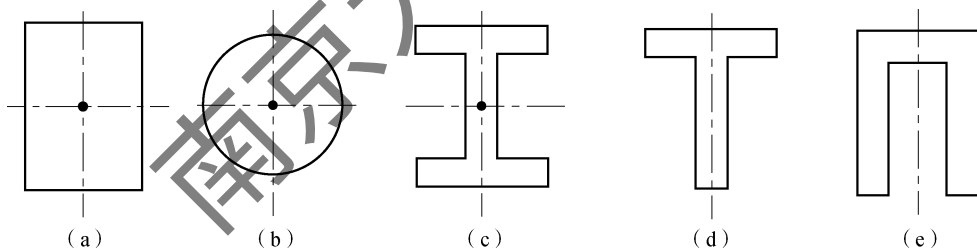


图 2-38

简单形状物体的重心可从工程手册上查到。表 2-1 列出了常见的几种简单形状物体的重心。工程中常用的型钢(如工字钢、角钢、槽钢等)的截面的形心,也可以从型钢表中查到。

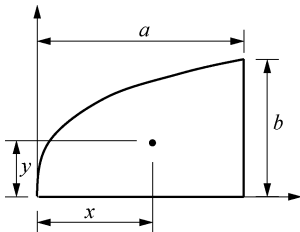
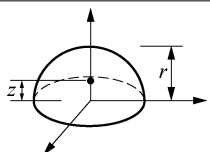
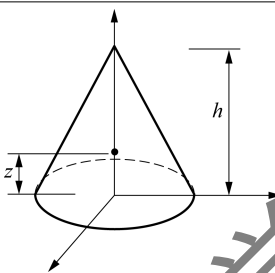
(2) 积分法:在利用公式(2-27)、(2-28)、(2-29)计算形心,为了使所得结果正确无误,应使构成微小体积、微小面积及微小长度部分的数目增为无限多,而使微小体积、微小面积及微小长度趋近于零,取其极限。式中 dV 、 dA 、 dl 分别为微单元的体积、微单元的面积及微小长度, x 、 y 、 z 为微元体或微元面重心的坐标。利用公式(2-27)、(2-28)、(2-29)可以求出几何图形形心 C 的坐标,这种方法称为积分法,是求形心的基本方法。



表 2-1 简单形体重心坐标公式

图 形	示意图	重心位置
三角形		在中线的交点 $y_C = \frac{1}{3}h$
梯形		$y_C = \frac{h(2a+b)}{3(a+b)}$
圆弧		$x_C = \frac{r \sin \alpha}{\alpha}$ 对于半圆弧 $\alpha = \frac{\pi}{2}$, 则 $x_C = \frac{2r}{\pi}$
弓形		$x_C = \frac{2}{3} \frac{r^3 \sin^3 \alpha}{S}$ [面积 $S = \frac{r^2 (2\alpha - \sin 2\alpha)}{2}$]
扇形		$x_C = \frac{2}{3} \frac{r \sin \alpha}{\alpha}$ 对于半圆 $\alpha = \frac{\pi}{2}$, 则 $x_C = \frac{4r}{3\pi}$
部分圆环		$x_C = \frac{2}{3} \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2} \frac{\sin \alpha}{\alpha}$

(续表)

图 形	示意图	重心位置
抛物线面		$x_c = \frac{3}{5}a$ $y_c = \frac{3}{8}b$
半圆球		$z_c = \frac{3}{8}r$
正圆锥体		$z_c = \frac{1}{4}h$

2. 组合形体的重心

(1) 分割法

有些均质物体可以看成由若干个简单形状的物体组合而成,它们的重心位置的确定可采用分割法。分割法就是将一个复杂的组合体分割为若干个简单形状的物体,而每个简单形状的物体的重心可以通过对称性获得,或者可以通过查表甚至简单计算得到。

分割法的理论基础是高等数学中的分块积分。此时计算重心位置的公式化为

$$\begin{cases} x_c = \frac{\sum x_i A_i}{\sum A_i} \\ y_c = \frac{\sum y_i A_i}{\sum A_i} \end{cases} \quad (2-30)$$

对于工程中的组合图形,可以把其看成是用若干个简单图形所组成的,设组合图形被分割成几个简单图形,各简单图形的面积分别为 $A_1, A_2, A_3 \cdots A_n$, 它们的重心坐标为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \cdots (x_n, y_n)$, 运用公式(2-30)即可得到组合图形的形心(或重心坐标)的计算公式:

$$\begin{cases} x_c = \frac{A_1 x_1 + A_2 x_2 + \cdots + A_n x_n}{A_1 + A_2 + \cdots + A_n} = \frac{\sum A_i x_i}{\sum A} \\ y_c = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2 + \cdots + A_n y_n}{A_1 + A_2 + \cdots + A_n} = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A} \end{cases} \quad (2-31)$$



下面举例说明上述公式的具体应用。

例 2-22 试确定如图 2-39 所示的 $110 \times 70 \times 10$ 的不等边角钢截面形心的位置,角钢的圆角可近似地当作直角坐标。

【解】 将该图形分割成矩形 I 与矩形 II。

选取角钢两边为 x 、 y 轴,标注矩形面积及重心位置

$$A_1 = 110 \times 10 = 1\,100 \text{ mm}^2 \quad x_1 = 5 \text{ mm}, y_1 = 55 \text{ mm}$$

$$A_2 = 60 \times 10 = 600 \text{ mm}^2 \quad x_2 = 40 \text{ mm}, y_2 = 5 \text{ mm}$$

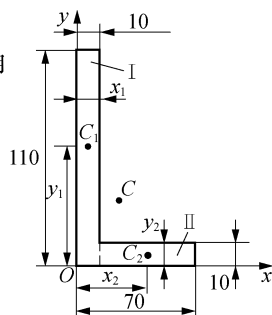


图 2-39

由公式(2-31)可知:

$$\begin{cases} x_c = \frac{\sum A_i x_i}{\sum A} = \frac{A_1 x_1 + A_2 x_2}{A_1 + A_2} = \frac{1\,100 \times 5 + 600 \times 40}{1\,100 + 600} = 17.4 \text{ mm} \\ y_c = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A} = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2}{A_1 + A_2} = \frac{1\,100 \times 55 + 600 \times 5}{1\,100 + 600} = 37.4 \text{ mm} \end{cases}$$

即不等边角钢截面形心的位置为(17.4, 37.4)

(2) 负面积法

物体有空缺部分时,有时候将空缺部分看作组合体的一部分会使求解过程更为简单,只是在计算工程中须把空缺部分用负面积或负体积补充,这就是所谓的负面积或负体积法。这种方法本质上也是分割法。

如上例,把不等边角钢看作一块 110×70 的板切割了一块面积为 100×60 的板,用分割法计算形心坐标时,后一块板的面积代入负值即可。

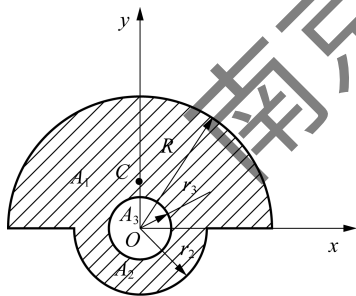


图 2-40

例 2-23 试求图 2-40 所示图形的形心。已知 $R = 100 \text{ mm}$, $r_2 = 30 \text{ mm}$, $r_3 = 17 \text{ mm}$ 。

【解】 由于图形有对称轴,形心必在对称轴上,建立坐标系 xOy 如图所示,只需求出 y_c , 将图形看成由三部分组成,各自的面积及形心坐标分别为

(1) 半径为 R 的半圆面:

$$y_1 = \frac{4R}{3\pi} = \frac{4 \times 100 \text{ mm}}{3\pi} = 42.4 \text{ mm}$$

(2) 半径为 r_2 的半圆面:

$$A_2 = \frac{\pi r_2^2}{2} = \frac{\pi \times 30^2}{2} = 1\,414 \text{ mm}^2$$

$$y_2 = -\frac{4r_2}{3\pi} = -\frac{4 \times 30}{3\pi} = -12.7 \text{ mm}$$

(3) 被挖掉的半径为 r_3 圆面:

$$A_3 = -\pi r_3^2 = -\pi \times 17^2 = -908 \text{ mm}^2, y_2 = 0$$

应用式(2-31)可得

$$\begin{aligned}
 y_c &= \frac{\sum A_i \cdot y_i}{A} = \frac{A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2 + A_3 \cdot y_3}{A_1 + A_2 + A_3} \\
 &= \frac{15\,708 \times 42.4 + 1\,414 \times (-12.7) - 908 \times 0}{15\,708 + 1\,414 - 908} \\
 &= 40 \text{ mm}
 \end{aligned}$$

故形心坐标(0,40)。

例 2-24 图 2-41 所示有方孔的均质圆板,圆板半径为 R ,方孔边长为 a ,其中心在 $0.5R$ 处。求该圆板的中心位置。

【解】 将该图形分割为一半径为 R 的圆板和一边长为 a 的正方形板,取坐标系如图。由于图形对称于 x 轴,所以其重心必在该轴上,即 $y_c = 0$ 。

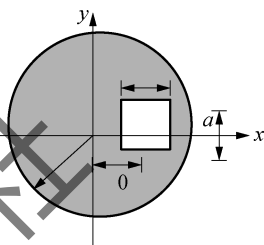


图 2-41

$$A_1 = \pi R^2, x_1 = 0$$

$$A_2 = -a^2, x_2 = 0.5R$$

$$\text{重心为: } x_c = \frac{x_1 \cdot A_1 + x_2 \cdot A_2}{A_1 + A_2} = \frac{0 \times \pi R^2 - 0.5R \times a^2}{\pi R^2 - a^2} = -\frac{Ra^2}{2(\pi R^2 - a^2)}$$

(3) 实验法

对于形状很复杂或非均质物体,用计算方法确定其重心的位置非常困难,这是常采用实验方法,如悬挂法、称重法。

① 悬挂法

如图 2-42(a)所示求一薄板的重心,可先将板悬挂于任一点 A 。根据二力平衡条件,重心必在过悬挂点的铅直线上,于是可在板上画出此线(图中虚线)。然后再将板悬挂于另一点 B ,同样可画出另一直线。两直线相交于 C 点,这个 C 点就是重心,如图 2-42(b)所示。

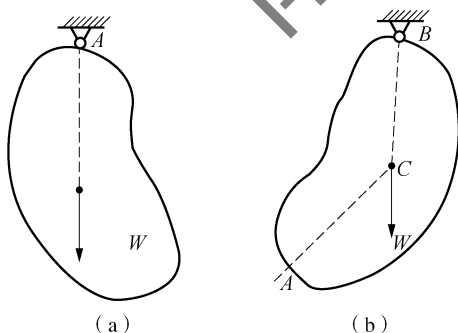


图 2-42

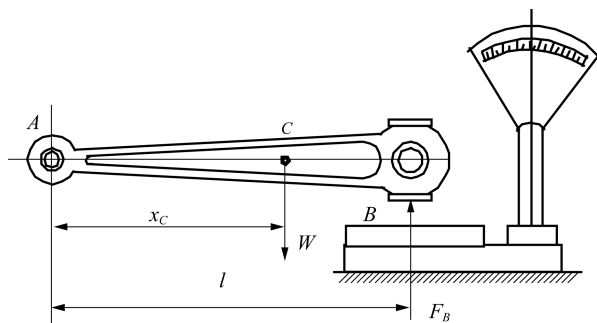


图 2-43

② 称重法

如图 2-43 所示,为确定具有对称轴的内燃机连杆的重心坐标 x_c ,先称出连杆的质量,再算出其重量 W ,然后将其一端支承于 A 点,另一端放在磅秤 B 上。测得两支点的水平距



离 l 及 B 处约束力 F_B 。由平衡方程

$$\sum M_A(\mathbf{F}) = 0, -W \cdot x_C + F_B \cdot l = 0$$
$$x_C = \frac{F_B \cdot l}{W}$$

2.9 工程应用拓展

现代的装配化施工,是一场对“力之平衡”的精密掌控。无论是港珠澳大桥项目中 3 000 吨巨型“海豚”钢塔的吊装,还是高速公路建设中百米预制梁在陆地上的安全运输,如图 2-44 所示,其成功的基石均源于对平面力系合成与平衡原理的深刻理解与严格应用。这些工程实践清晰地表明,将复杂的结构抽象为简单的力学模型,并运用平衡方程求解,是连接理论设计与实际安全的根本路径。



(a)



(b)

图 2-44

常规陆地预制梁的吊装,是平面平行力系原理最直观的体现。如图 2-45 所示,当一片重型混凝土梁通过两个吊点被提升时,它可被简化为一个受竖向力作用的刚体模型。梁体自身的重量作为主动力竖直向下,作用于其重心;而两根吊索则提供竖直向上的约束拉力。

确保梁体平稳起吊的核心,在于满足平面力系的平衡条件:所有竖向力的代数和必须为零,即两根吊索的拉力之和必须等于梁体的总重量;同时,所有力对任一点的力矩代数和也必须为零,这一力矩平衡条件决定了吊点的最优位置——必须使梁体的重心位于两个吊点之间。若重心偏离此区域,起吊瞬间将产生巨大的倾覆力矩,导致构件旋转甚至坠落。通过这一静力平衡分析,工程师可以精确计算出每个吊点所受的力,从而为吊索、卸扣和吊具的选型提供可靠依据,确保整个起吊过程的安全与稳定。



图 2-45

从预制梁吊装过程的静力平衡分析可知,将平面力系合成与平衡原理应用于工程实践,是确保施工安全的起点。这一分析过程清晰地展示了如何将实际工程问题中的确定吊点位置、计算吊索拉力、防止构件倾覆,转化为可通过平衡方程求解的力学模型。这体现了“简化建模、受力分析、建立平衡方程”的核心思路,且具有普遍应用价值。

单元小结

本单元围绕“如何实现平面力系的合成与平衡”这一核心,系统构建了平面力系的分析理论与计算方法,为工程结构的受力分析与设计奠定了重要基础。

力系的合成与平衡遵循静力学基本定律。平面汇交力系可合成为一个合力 F_R , 其大小和方向由力多边形的封闭边或解析法中的投影代数和确定,平衡时力多边形自行封闭或两

投影和为零 $\left(\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{cases} \right)$ 。平面力偶系的合成结果为一合力偶,其矩等于各力偶矩的代数

和 $(M = M_1 + M_2 + M_3 + \cdots + M_n = \sum M)$, 平衡条件为合力偶矩为零 $(\sum M = 0)$ 。

平面一般力系是工程中最普遍的力系形式,其简化的理论依据是力的平移定理:将力平移至任一点需附加一力偶,矩等于原力对点之矩。向一点简化后得到主矢 F'_R 和主矩 M_O ,进

一步简化可得合力、合力偶或平衡。平衡方程有基本形式 $\left(\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_O(F) = 0 \end{cases} \right)$ 、二力矩形式



$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum M_A(\mathbf{F}) = 0 \\ \sum M_B(\mathbf{F}) = 0 \end{cases}$ 和三力矩形式 $\begin{cases} \sum M_A(\mathbf{F}) = 0 \\ \sum M_B(\mathbf{F}) = 0 \\ \sum M_C(\mathbf{F}) = 0 \end{cases}$, 可根据问题灵活选用。平面平行力

系作为一般力系的特例,平衡方程可简化为两个独立方程。

物体系统的平衡问题需合理选取研究对象,正确区分内力和外力,善于利用“二力杆”和“三力平衡汇交定理”简化受力分析。考虑摩擦时,静摩擦力具有范围性,最大静摩擦力 $F_{\max} = fF_N$ 由摩擦定律确定,摩擦角与自锁现象揭示了平衡的临界条件。重心是物体重力合力的作用点,匀质物体的重心 $\left(x_C = \frac{\sum x_i \cdot W_i}{W}, y_C = \frac{\sum y_i \cdot W_i}{W}, z_C = \frac{\sum z_i \cdot W_i}{W}\right)$ 与形心重合,组合形体可用分割法或负面积法求解重心位置。

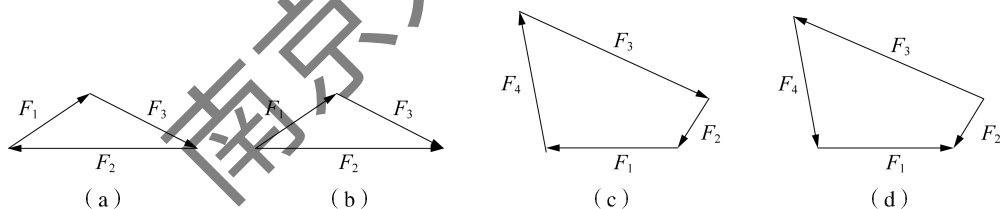
掌握平面力系的合成与平衡原理,不仅能对塔吊、雨篷等工程结构进行受力分析和安全校核,更培养了“化繁为简、精准平衡”的工程思维,为后续强度、刚度及稳定性计算提供了根本保障。

思考题

2-1 何谓平面力系? 它分为哪几种,并请举例说明。

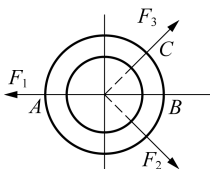
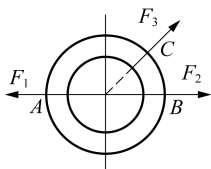
2-2 用解析法求解平面汇交力系的平衡问题时,两投影轴是否一定要互相垂直?

2-3 如思考题 2-1 图所示的平面汇交力系的力多边形中,判断哪个力系是平衡的,哪个力系有合力,并指出合力。

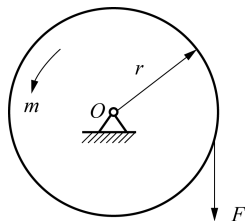


思考题 2-1 图

2-4 如思考题 2-2 图所示,作用于钢环上的三个力都汇交于一点,且各力都不等于零,在这两种情况下钢环能否平衡?



思考题 2-2 图



思考题 2-3 图

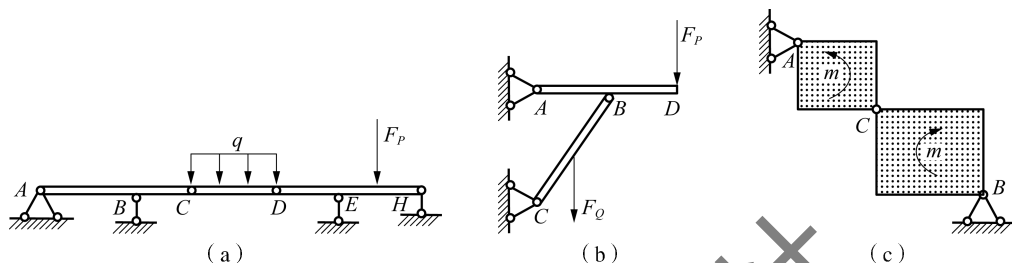
2-5 力偶不能用力平衡,为什么思考题 2-3 图中的轮子又能平衡呢?

2-6 平面一般力系中,力向已知点平行移动时,其附加力偶矩怎样确定?

2-7 平面一般力系向简化中心简化时,可能产生几种结果?

2-8 平面一般力系的平衡方程有几种形式?应用时有什么限制条件?

2-9 如思考题2-4图所示的物体系统处于平衡状态,如要计算各支座的约束反力,应怎样选取研究对象?



思考题2-4图

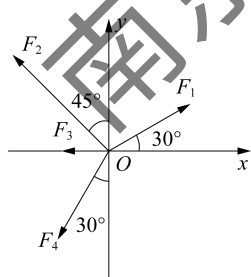
2-10 计算截面的重心时,如果选取的坐标轴不同,重心的坐标是否改变?重心的位置是否变化?

2-11 物体的重心是否一定在物体上?试举例说明。

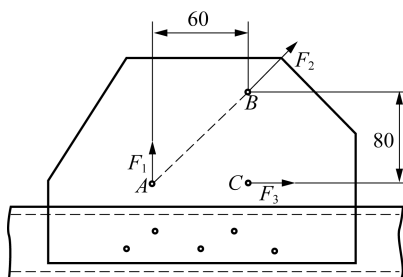
习题

2-1 如图所示,已知 $F_1=400\text{ kN}$, $F_2=1\text{ 000 kN}$, $F_3=100\text{ kN}$, $F_4=500\text{ kN}$ 。试用解析法:(1)选取适当的坐标系计算力在坐标轴上的投影。(2)求该力系的合力。

2-2 如图所示,桁架铆接节点在铆孔A、B、C处受力作用,已知: $F_1=1\text{ 000 N}$, $F_2=500\text{ N}$, $F_3=500\text{ N}$,求该力系的合力 F_R 。



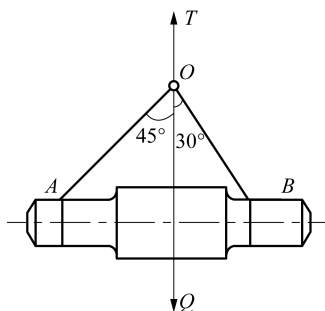
习题2-1图



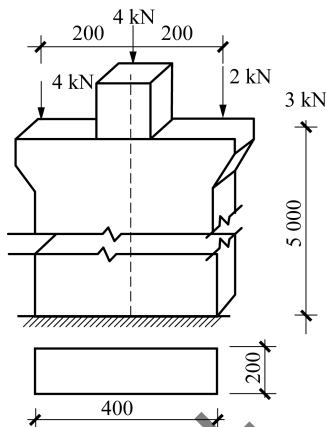
习题2-2图

2-3 如图所示,用起重机吊起大型机械主轴,已知轴的重量 $Q=40\text{ kN}$,求两侧钢丝所受的拉力。

2-4 如图所示,求将各力向底截面形心点简化的结果(柱自重不计),柱上尺寸以 mm 计算。



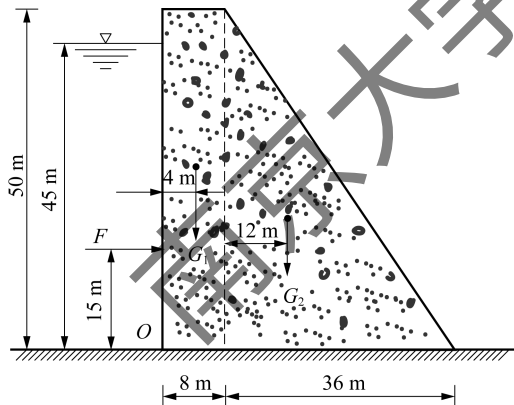
习题 2-3 图



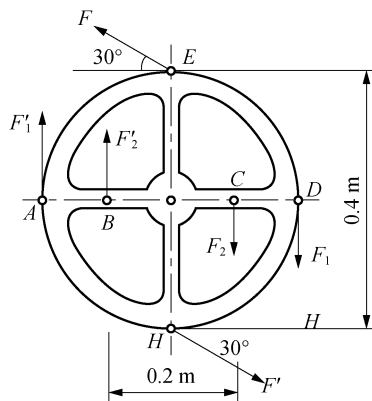
习题 2-4 图

2-5 重力坝受力情形如图所示,设坝的自重分别是 $G_1=9\ 600\text{ kN}$, $G_2=21\ 600\text{ kN}$,上游水压力 $F=10\ 120\text{ kN}$,将力系向坝底 O 点简化,并求其最后的简化结果。

2-6 如图所示,水平圆轮的直径 AD 上作用有垂直于 AD 且大小均为 20 kN 的四个力,这四个力与作用于 E 、 H 的力 F 、 F' 平衡。已知 F 、 F' 大小相等,方向相反,试求 F 与 F' 的大小。

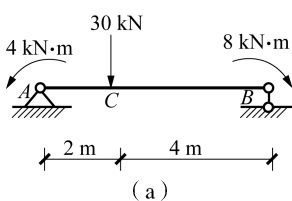


习题 2-5 图

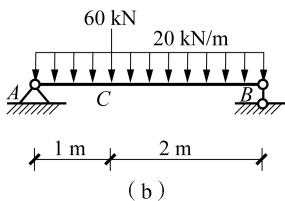


习题 2-6 图

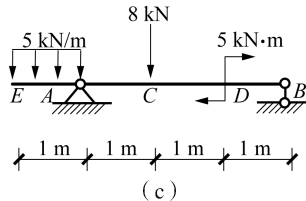
2-7 求如图所示的各梁的支座反力。



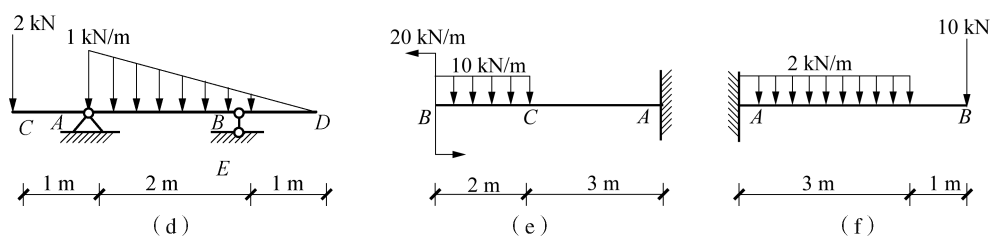
(a)



(b)

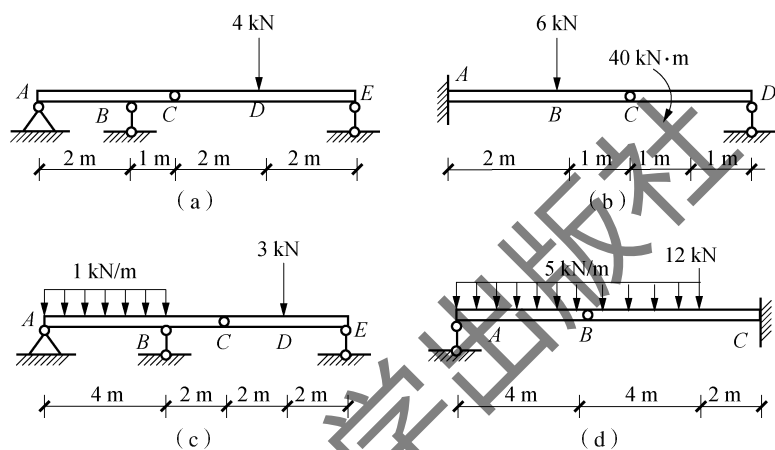


(c)



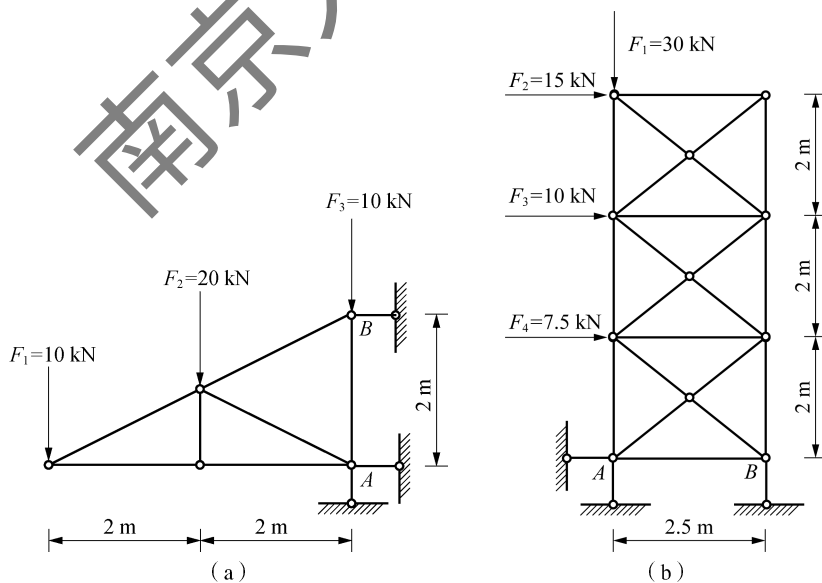
习题 2-7 图

2-8 求如图所示的各组合梁的支座反力。



习题 2-8 图

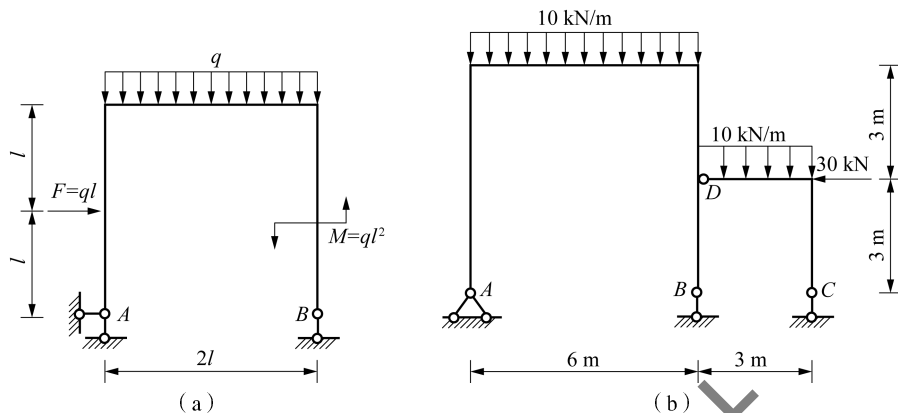
2-9 求如图所示的桁架 A、B 支座的反力。



习题 2-9 图

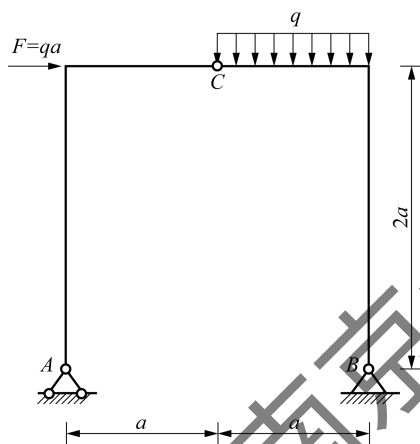


2-10 求如图所示的刚架的支座反力。

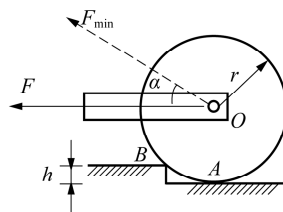


习题 2-10 图

2-11 连续刚架如图所示,已知 $q, F=qa$, 试求支座 A、B 的约束力及 C 铰所受的力。



习题 2-11 图

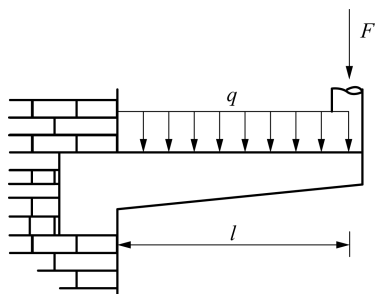


习题 2-12 图

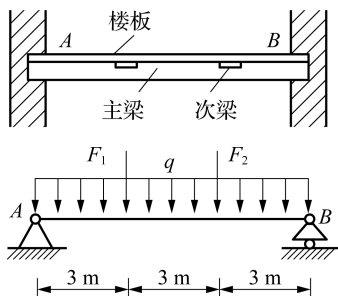
2-12 如图所示,压路机的碾子重 20 kN,半径 $r=40$ cm,用一个通过其中心的水平力 F 使此碾子越过高 $h=8$ cm 的台阶,试求此水平力的大小。如果要使作用的力为最小,问应沿哪个方向用力,并求此最小力之值。

2-13 如图所示,阳台的左端砌入砖墙内,阳台自重可近似地视为均布荷载,其集度为 q 。在阳台的外伸端,作用有从柱传来的力 F ,柱的轴线到墙的距离为 l 。试求阳台固定端的约束反力。

2-14 如图所示,主梁 AB 两端支承在墙内,可简化为简支梁。主梁自重和楼板传来的均布荷载合计为 $q=20$ kN/m,由次梁传来的集中荷载 $F_1=250$ kN, $F_2=100$ kN。试求 A、B 支座的约束反力。

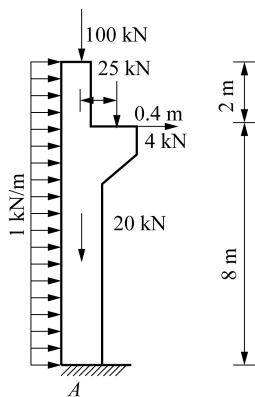


习题 2-13 图

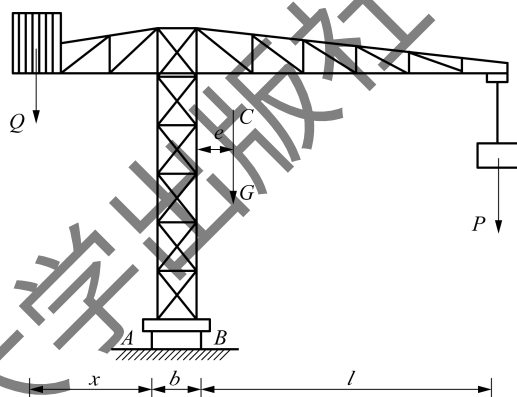


习题 2-14 图

2-15 一牛腿柱的受力如图所示,求该牛腿柱的支座反力。



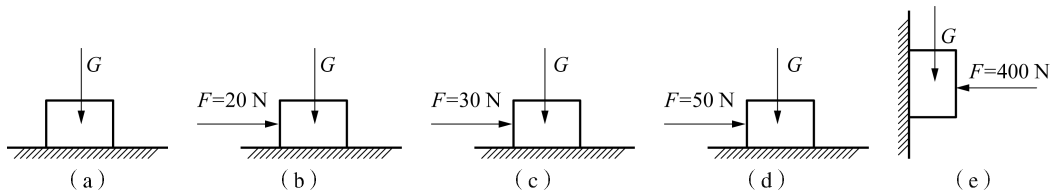
习题 2-15 图



习题 2-16 图

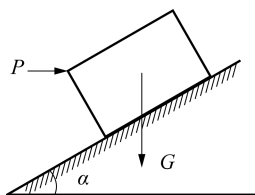
2-16 如图所示,塔式起重机自重 $G=500\text{ kN}$ (不包括平衡锤重 Q) 作用于点 C 。塔式起重机右边的吊车最大起重 $P=250\text{ kN}$, 离 B 轨最远距离 $l=10\text{ m}$ 。为了防止起重机左右倾倒,需在塔式起重机左边加一平衡锤,要使吊车在满载或空载时,起重机在任何位置都不致倾倒,求平衡锤的最小重量 Q 和平衡锤到左轨 A 的最大距离。吊车自重不计, $e=1.5\text{ m}$, $b=3\text{ m}$ 。

2-17 物重 $G=100\text{ N}$, 与平面间的摩擦系数为 0.3 , 在如图所示的各种情况中,物体是否平衡? 实际的摩擦力是多少?

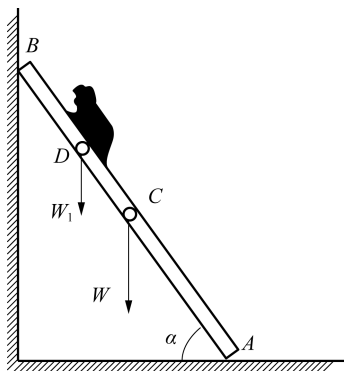


习题 2-17 图

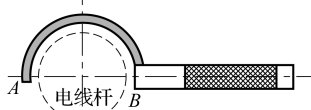
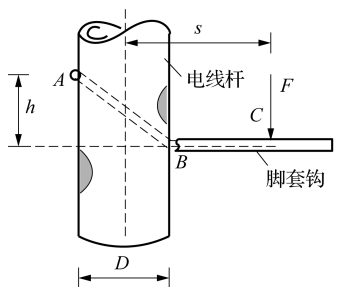
2-18 如图所示,物体重为 G , 放在倾角为 α 的斜面上,它与斜面间的摩擦系数为 f , 当物体处于平衡时,试求水平力 P 的大小。



习题 2-18 图



习题 2-19 图

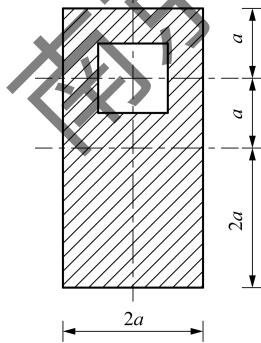


习题 2-20 图

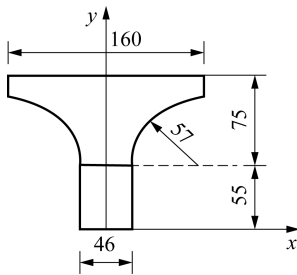
2-19 如图所示,梯子重 W 、长为 L ,上端靠在光滑的墙上,底端与水平面间的摩擦系数为 f_s ,求:(1) 已知梯子倾角 α ,为使梯子保持静止,问重为 W_1 的人的活动范围多大?(2) 倾角 α 多大时,不论人在什么位置梯子都保持静止。

2-20 如图所示,架线工人用脚套钩攀登直径 $D=50\text{ cm}$ 的电线杆,脚套钩仅在 A 、 B 两点与电线杆接触,两点垂直方向相距 $h=40\text{ cm}$ 。已知脚套钩与电线杆之间的摩擦系数 $f=0.24$,工人体重 $F=600\text{ kN}$,踩脚点 C 至电线杆中心的距离为 $s=85\text{ cm}$ 。试问该工人能否用此脚套钩安全攀登而不至滑落?

2-21 如图所示,均质薄板由一块 $2a \times 4a$ 的长方形薄板挖出一块边长为 a 的方孔构成。求该薄板的重心位置。



习题 2-21 图



习题 2-22 图

2-22 如图所示,求双曲拱桥的主拱圈截面的重心位置(单位:cm)。



单元 2 习题参考答案

模块二

结构几何组成与静定结构内力分析

南京大学出版社



单元 3

平面体系的几何组成分析



知识目标

- ◆ 准确阐述自由度、刚片、约束(必要约束与多余约束)的基本概念,并能熟练计算平面体系的自由度,以此作为判断体系几何可变性的必要条件;
- ◆ 清晰复述无多余约束几何不变体系的两刚片规则、三刚片规则及二元体规则,理解其核心是“三角形稳定性”;
- ◆ 正确辨别静定结构与超静定结构。



能力目标

- ◎ 能够独立运用基本组成规则(两刚片、三刚片、二元体规则),对常见的平面杆件体系(如桁架、刚架)进行几何组成分析;
- ◎ 能够通过自由度计算与几何组成分析结果相互验证,提升判断与校核能力;
- ◎ 能够结合工程案例,分析因体系几何可变性导致的工程事故原因,并提出确保施工过程中结构几何不变的改进措施。



素质目标

- ★ 建立“结构首要条件是几何不变”的工程安全底线思维,深刻认识到几何组成分析是判别结构能否承载受力的第一道关卡;
- ★ 培养严谨的逻辑推理能力,在分析体系组成时做到“有据可依、有序拆解”,避免主观臆断;
- ★ 树立工程实践中的风险意识,理解在施工、临时支撑等“机构→结构”的转换过程中,精准的几何组成分析对于预防坍塌事故、保障生命财产安全的决定性意义。

案例导入

在土木工程中,建筑物或构筑物的形状各异,但是都有一个共同特点,就是其结构的主体必须是几何不变体,不允许其上部结构相对于基础存在刚体运动的可能性。在不计材料变形的前提下,如果体系的位形不可以改变,那么称之为几何不变体系;如果体系的位形可以改变,则称之为几何可变体系。

在工程结构的施工过程中,常常存在临时的几何可变体系,作为现场施工人员,就是要采取适当的施工方案,在兼顾施工质量、速度、安全和造价等要求的前提下,将几何可变体系变为几何不变体系。河南省鸭河口电厂干燥棚(图3-1)工程施工方案,就是巧妙地利用预制装配式“机构→结构”理念,实现几何可变体系转变为几何不变体系的经典案例。



图3-1 电厂干燥棚图

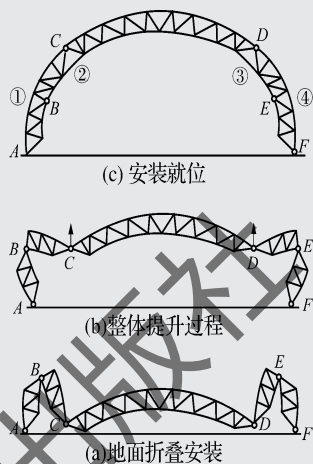


图3-2 施工过程示意图

该工程结构形式设计为正放四角锥三心圆柱面双层网壳,跨度108米,长度90米,矢高38.766米。结构跨度大,矢高高,施工难度较高。工程网壳施工中采用柱面网壳结构“折叠展开式”整体提升施工技术,即采用预制装配式部件“机构→结构”整体提升方法,其施工方案的关键过程如图3-2所示。大部分构件为预制装配式部件,其安装工作都在贴近地面处完成,既有效保证安装质量、加快施工速度、保障施工人员安全,又节省大量脚手架。

施工阶段通过合理释放结构约束、采用分段铰接构造,将整体体系转化为几何可变的机构,便于安装施工。安装就位后,再增加约束,将临时机构体系转化为可以承力的几何不变结构。具体实施方案是通过拆装少量的构件,也就是通过减少和增加一些约束,从而实现“结构→机构”和“机构→结构”的转换。

▶ 3.1 平面体系自由度和约束 ◀

3.1.1 自由度和约束的基本概念

判别一个体系是否为几何可变,实际上就是判别该体系是否存在刚体运动自由度。这种刚体运动自由度简称为体系的自由度。所谓体系的自由度,是指完全确定体系位置所需要的独立坐标的数目。



在空间坐标系中,一个动点有 3 个自由度,即要确定空间一动点的位置需要 3 个独立坐标;一个刚体在空间有 6 个自由度,即要确定空间一刚体的位置需要 6 个独立坐标。在平面内,一个动点有 2 个自由度,例如图 3-3(a)中用 x 和 y 两个独立坐标就可以完全确定平面内一动点 A 的位置。图 3-3(b)所示一几何形状不变的平面体,简称为刚片,先用 x 、 y 两个独立坐标可以确定该刚片上一点的位置,然后用独立坐标 φ 确定刚片上任意直线 AB 的倾角,这样就完全确定了刚片在平面内的位置。所以,一个刚片在平面内有 3 个自由度。

平面体系并非自由系,各部分之间以及杆件与基础之间总存在一定的联系。这种联系对体系各部分之间的位置关系形成几何学上的限制。这种对非自由系各部分的位置关系所施加的几何学上的限制称为几何约束,以下简称为约束。

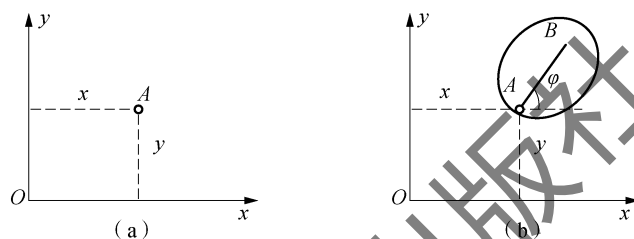


图 3-3

体系杆件之间以及杆件与基础之间的联结方式常见的有链杆联结、铰联结和刚性联结等。图 3-4(a)所示 A 、 B 两点间由一链杆联结,原先 A 、 B 两个独立动点有 4 个自由度,通过链杆联结后成为 AB 杆在平面内只有图示 3 个自由度;图 3-4(b)所示刚片 I、II 间由一链杆 BC 联结,原先两个独立刚片有 6 个自由度,通过链杆联结后可以由图示 5 个独立坐标 x 、 y 、 φ 、 α 、 β 确定其位置,自由度减为 5 个。由此可知,一根链杆相当于 1 个约束,可以减少 1 个自由度。

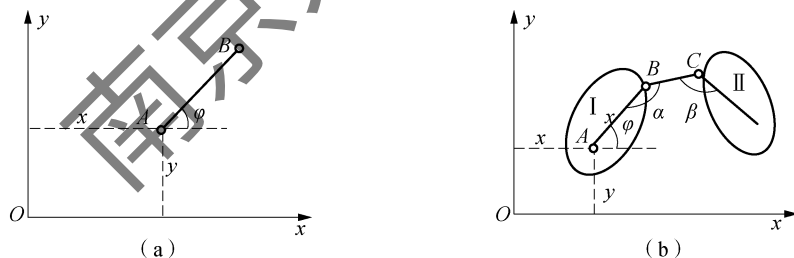


图 3-4

接下来探讨刚片之间用铰联结的情况。图 3-5(a)所示两个刚片在 B 点用铰联结,联结之前两个刚片共有 6 个独立自由度,联结之后的自由度减为图示的 4 个。由此可知,一个铰相当于 2 个约束,可以减少 2 个自由度。图 3-5(b)所示为三个刚片之间用一个铰联结的情况,联结之后的自由度数为 5,共计减少了 4 个自由度。一般称联结两个刚片的铰为单铰,联结两个以上刚片的铰为复铰。图 3-5(b)所示复铰的约束作用相当于两个单铰。由此类推,从减少自由度的观点来看,联结 n 个刚片的复铰可以当作 $n-1$ 个单铰,将减少 $2(n-1)$ 个自由度。

图 3-6(a)所示为平面内两个刚片 I 和 II 在 A 点刚性联结成一个整体。由于刚性联结使 I、II 合成为一个刚片,因此一个刚节点相当于 3 个约束,可以减少 3 个自由度。由此类

推,联结 n 个刚片的复刚节点可以当作 $n-1$ 个上述的单刚节点,将减少 $3(n-1)$ 个自由度,如图 3-6(b)所示。

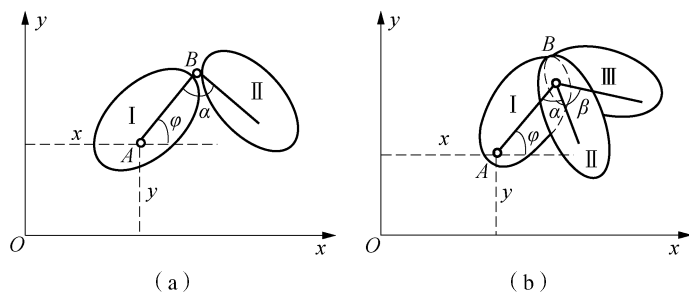


图 3-5

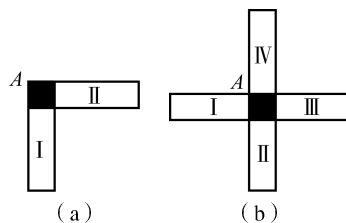


图 3-6

3.1.2 平面体系的计算自由度 W

应当注意的是,并非所有的约束都能减少体系的自由度。或者说,体系中约束的作用可能相互重复。例如图 3-7 中,平面内一动点 A 原有两个自由度。若用两根不共线的链杆将其与基础相联,则 A 点被完全固定,体系的运动自由度为零。此时若再增加一根链杆,体系的实际自由度仍为零,这说明所增加链杆约束的作用与体系中已有约束的作用是重复的。一般把使体系成为几何不变而必需的约束,称为必要约束;把必要约束之外的约束称为多余约束。每一个必要约束都使体系减少一个自由度;而多余约束的存在并不减少体系的自由度。值得一提的是,必要约束与多余约束经常是相对而言的。图 3-7 所示体系中 AB 、 AC 和 AD 三根链杆中的任意两根均可认为是必要约束,剩余的一根则为多余约束。

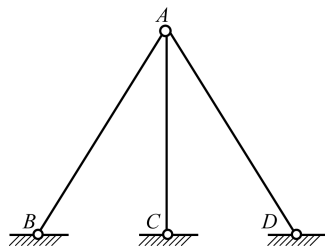


图 3-7

体系的自由度数就等于其各组成部分互不联结时总的自由度数减去体系中的必要约束数。当上述差值为零时则构成几何不变体系。即体系各组成部分总自由度数与必要约束数之差为零,是体系几何不变的充分条件。但对于许多复杂体系来说,必要约束并非都易直观判定,因此就需要引入有关计算自由度的概念。体系的计算自由度定义为:体系各组成部分总的自由度数减去体系中总的约束数,可记为 W 。其计算公式可定义为

$$W = 3g - 2j - l - z$$

式中 g 为刚片数, j 为单铰数, l 为上部结构链杆数, z 为支座链杆数。

体系的计算自由度 W 十分容易算得,它可能大于零也可能等于或小于零。当所有约束全部是必要约束时,体系的自由度就等于体系的计算自由度,当体系中的约束包含有多余约束时,体系的自由度就大于体系的计算自由度。由此可见,几何不变的必要条件是:体系的计算自由度 $W \leq 0$ 。若 $W > 0$,则体系一定是几何可变的。所以,确定计算自由度 W 的数目就成为体系几何可变性判定的手段之一。

例 3-1 试求图 3-8(a)所示平面体系的计算自由度。

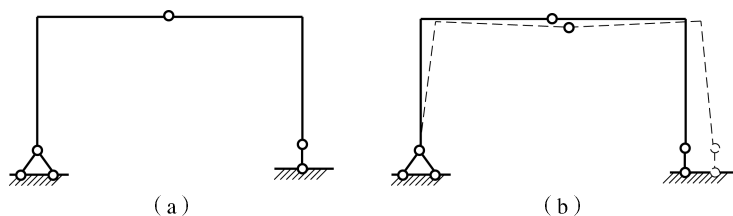


图 3-8

【解】 该体系刚片数 $g=2$ ，单铰数 $j=1$ ，支座链杆数 $z=3$ ，因而有

$$\begin{aligned} W &= 3g - 2j - l - z \\ &= 3 \times 2 - 2 \times 1 - 0 - 3 = 1 \end{aligned}$$

因 $W>0$ 说明该体系不满足几何不变的必要条件，则体系是几何可变的。图 3-8(b) 所示为体系可能发生的刚体位移形态。

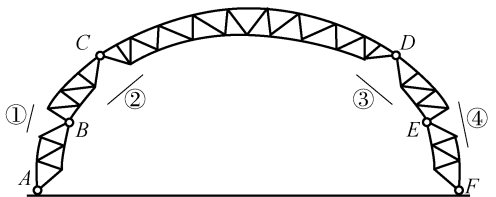


图 3-9

例 3-2 取图 3-2(c) 所示机构作为平面体系研究，图 3-9 为 1 至 4 号链杆未安装前的状态。试分别求 4 根链杆安装前和安装后该平面体系的计算自由度。

【解】 链杆安装前：AB、BC、CD、DE 和 EF 视为 5 个刚片由 B、C、D、E 共计 4 个铰连接成体系，然后再与基础由支座铰 A 和铰 F 连接。则整个体系刚片数 $g=5$ ，折算单铰数 $j=$

4，支座链杆数 $z=4$ ，于是有

$$\begin{aligned} W &= 3g - 2j - l - z \\ &= 3 \times 5 - 2 \times 4 - 0 - 4 = 3 \end{aligned}$$

$W>0$ 说明该体系不满足几何不变的必要条件，为几何可变体系。

链杆安装后，增加上部结构链杆数 $l=4$ ，从而限制了 4 个自由度，于是有

$$\begin{aligned} W &= 3g - 2j - l - z \\ &= 3 \times 5 - 2 \times 4 - 4 - 4 = -1 \end{aligned}$$

$W<0$ 则此时的体系满足几何不变的必要条件，为几何不变体系，且有 1 个多余约束。

▶ 3.2 平面几何不变体系的组成规则 ◀

为了构造几何不变体系，更需要研究组成几何不变体系的充分条件。本节就来讨论平面几何不变体系最基本的两刚片规则、三刚片规则以及二元体规则。这些组成规则中所要求的约束数，是指保证体系几何不变的最少约束数。

▶▶ 3.2.1 两刚片规则

两个刚片间用不相交于一点也不相互平行的三根链杆相联，其内部是几何不变的，并且

没有多余约束。

图 3-10(a)所示刚片 I 和 II 由 1、2 和 3 三根链杆相联。倘若链杆 3 不存在,由理论力学的运动学原理可知,链杆 1 和 2 延长线的交点 O 就是刚片 I 和 II 之间发生相对运动时的瞬时中心。这样,体系内部实际上形成一个几何可变的四杆铰结机构。当有链杆 3 存在时,只要它不通过链杆 1 与 2 形成的运动瞬时中心 O 点,则刚片 I 和 II 之间就不可能再发生相对运动,即成为内部几何不变体系。图 3-10(b)和(c)所示体系与图(a)体系的实质是相同的,均为没有多余约束的内部几何不变体系。图 3-10(c)中联结刚片 I 和 II 的实铰相当于两个约束,可以理解为是由图(b)中链杆 1 和 2 构成的,而图(a)中链杆 1 和 2 的作用是使刚片 I、II 之间只能发生绕瞬时中心 O 作相对转动,因此在进行体系的几何构造分析时,其作用与实铰是等效的,即相当于刚片 I 和 II 在 O 点有铰联结。这种由链杆延长线交点形成的铰联结一般称为虚铰。

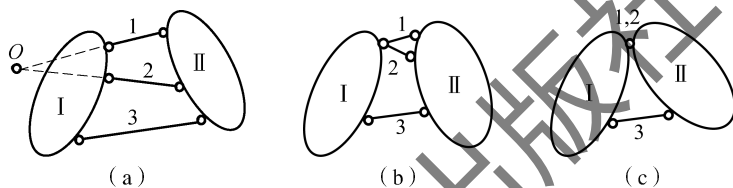


图 3-10

根据上述分析,两刚片组成规则又可表述为,两个刚片间用一个铰(实铰或虚铰)和一根不通过该铰的链杆相联,其内部是几何不变的,并且没有多余约束。

如果联结两个刚片的三根链杆交于同一点,则所构成的体系是几何可变的。图 3-11(a)所示体系中联结刚片 I 和 II 的三根链杆汇交于实铰 O ,此时刚片 I 可以绕 O 点任意转动。一般将这种位形可以发生有限量变化的几何可变体系称为常变体系。图 3-11(b)所示体系中三根链杆延长线的交点 O 形成了刚片 I 和 II 之间发生相对运动时的瞬时中心。但当刚片 I 绕 O 点发生瞬时微量转动后,三根链杆便不再交于一点,体系的位形不能继续变化。一般将这种位形仅可发生瞬时微量变化的几何可变体系称为瞬变体系。这里所谓的微量变化是指体系的位移值相对于体系本身的几何尺寸来说属无限小量;而有限量变化是指体系的位移值与体系本身的几何尺寸两者在数学上属同一量级。

如果联结两个刚片的三根链杆相互平行,则所构成的体系也是几何可变的。图 3-12(a)所示体系中联结刚片 I 和 II 的三根链杆长度相等,刚片 I 可以发生有限量移动,因此是常变体系;图 3-12(b)中三根链杆的长度不相同,当刚片 I 发生微量移动后,三根链杆便不再互相平行,体系即转变成为几何不变的,因此图 3-12(b)所示是瞬变体系。

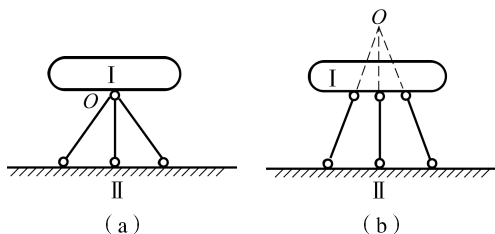


图 3-11

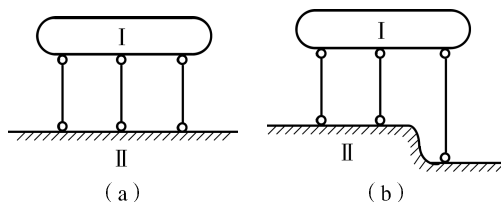


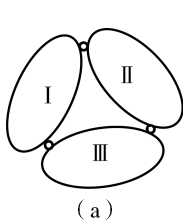
图 3-12



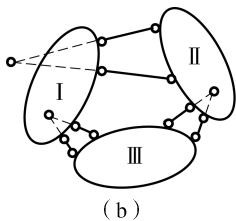
3.2.2 三刚片规则

三个刚片用不在一直线上的三个铰两两相联,其内部是几何不变的,并且没有多余约束。

只要将图 3-10(c)中的链杆 3 看作刚片,就可以由两刚片组成规则得到三刚片组成规则。联结三个刚片的铰可以是实铰(图 3-13(a)),也可以部分或全部是虚铰(图 3-13(b))。



(a)



(b)

图 3-13

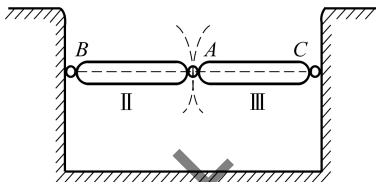


图 3-14

如果联结三个刚片的三个铰位于同一直线上,如图 3-14 所示,则所构成的体系是几何瞬变的。因为铰 A 位于分别以 B 和 C 为圆心, BA 和 CA 为半径所作圆弧的切点上, A 点在上述两个圆弧公切线方向上存在运动自由度。但当 A 点沿公切线方向发生微量位移后, A 、 B 和 C 三个铰就不再位于一条直线上,体系的位形不能继续变化,故此为瞬变体系。

实际上,两刚片和三刚片组成规则都是基于同一基本事实,即边长给定的三角形的几何形状是唯一确定的。从这个意义上说,平面几何不变体系的基本组成规则可统称为三角形规则。

3.2.3 二元体规则

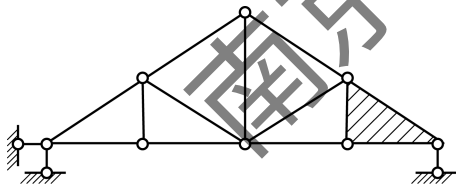


图 3-15

两个刚片与一个体系间只用三个不在一直线上的铰两两相联,则两个刚片称为二元体。在体系几何构造分析时,减少或增加二元体不改变体系的几何构造特征,这可称为二元体规则。例如图 3-15 桁架在去除了与基础相连的 3 根链杆之后,可进一步由左向右逐对去除二元体,最后剩下右端阴影部所表示的铰接三角形为没有多余约束

的几何不变体系,由此可推知原体系几何不变,并且没有多余约束。反过来也可以从右端三角形逐对增加二元体形成桁架,最后再增加地基相连的 3 根链杆,可得到同样的结论。

3.3 平面体系的几何组成分析方法

利用上一节所述的两刚片规则、三刚片规则 and 二元体规则,以及平面体系几何不变的必要条件,能够解决一般工程上常见的平面杆件体系的几何构造分析问题。具体分析时可将易直观判定为内部几何不变的部分当作刚片,并应注意检查刚片之间的联结数目是否符合

两刚片或三刚片的规则。

例 3-3 试分析图 3-16(a)所示平面桁架体系的几何构造。

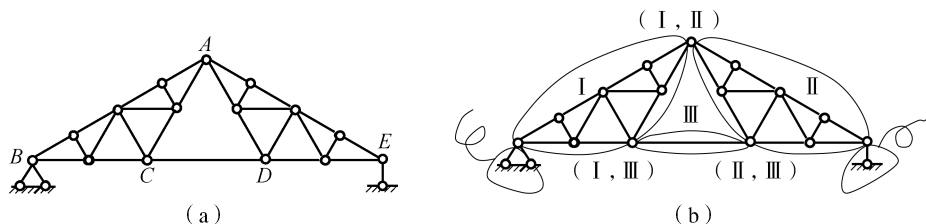


图 3-16

【解】 去除与基础相连的 3 根链杆,并划分三刚片如图 3-16(b),其中刚片 I 和 II 都可看成是在三角形的基础上依次增加二元体所形成。刚片 I、II、III 由不在一直线上的三个铰 (I, II)、(II, III)、(I, III) 两两相联,符合几何不变的三刚片规则。所以体系为几何不变,并且无多余约束。

例 3-4 试分析图 3-17(a)所示体系的几何构造。

【解】 由基础依次增加二元体 $A-C-B$ 和二元体 $C-D-B$,扩大基础至铰 D 如图 3-17(b)所示, EF 看作刚片 I,刚片 I、II 由不相交于一点也不平行的三根链杆相联,符合几何不变的二刚片规则。所以体系为几何不变,并且无多余约束。

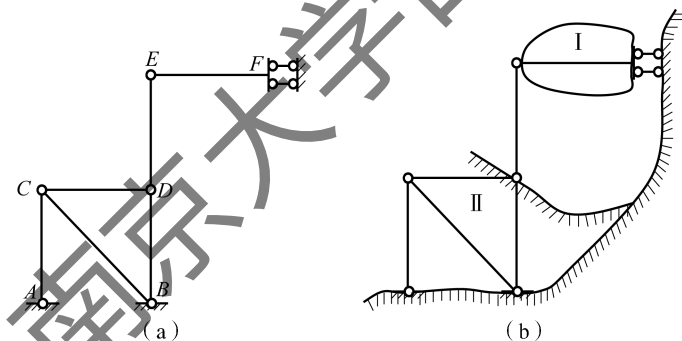


图 3-17

例 3-5 试分析图 3-18(a)所示体系的几何构造。

【解】 先去除由 FC 和 C 处支杆所构成的二元体,再将刚片 GHJ 和基础刚片均用链杆代替,如图 3-18(b)所示。刚片 I、II 由相互平行但不等长的三根链杆相联,所以体系是瞬变的。

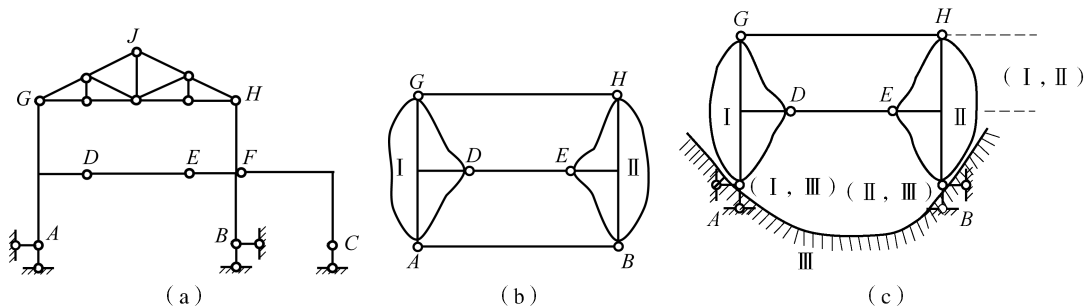


图 3-18



本例也可按图 3-18(c) 按三刚片联结的特殊情况进行分析, 图中刚片 I、II、III 由铰 (I, III)、(II, III) 和一组平行链杆两两相联, 因平行链杆与上述两铰的连线平行, 所以体系是瞬变的。

例 3-6 试分析图 3-19(a) 所示体系的几何构造。

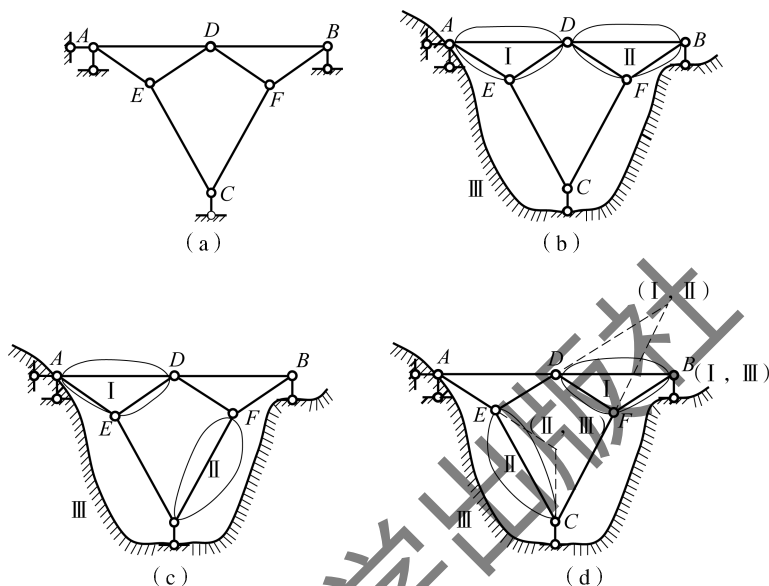


图 3-19

【解】 本例若按图 3-19(b) 或 (c) 所示的刚片划分, 则刚片 II 与基础刚片 III 之间均只有一根支座链杆直接联系, 另一个为间接联系, 不好直接套用三刚片规则。若采用图 3-19(d) 所示的刚片划分, 此时刚片 I、II 之间通过链杆 ED 和 CF 相联, 其延长后形成虚铰 (I、II); I、III 之间通过 AD 杆和 B 支座链杆相联, 形成虚铰 (I、III); II、III 之间通过 AE 杆和 C 支座链杆相联, 形成虚铰 (II、III)。可见刚片 I、II、III 是由不在一直线上的三个铰 (I、II)、(I、III) 和 (II、III) 两两相联, 所以体系是几何不变的, 并且无多余约束。

由以上的例题分析可见: 对于不动铰支座和直接联结于基础之上的几何不变部分, 均可划入基础刚片的范围, 而对于单链杆支座就不能划入基础刚片; 在确定刚片时, 应考虑到两两之间应有足够的直接联系; 在分析过程中, 链杆与刚片之间常可按解题需要相互替换, 对于有些体系, 可以从不同的角度或采用不同的刚片分析其几何构造, 所得的结论是相同的。

3.4 静定结构与超静定结构的辨别

平面杆系结构分为静定结构与超静定结构两种。在几何组成分析时, 无多余约束的几何不变体系, 仅用静力平衡方程可以求得全部内力和约束反力, 此类杆系结构称为静定结构, 如图 3-20(a) 所示。在此静定结构中, 未知力的数目恰好等于结构中所能列出的独立的平衡方程的数目, 因此, 通过平衡方程能求出静定结构中的全部约束反力。常见的静定结构的桥型有简支体系桥型、悬臂体系桥型、三铰拱桥。这些桥型如果去掉一个约束, 物体会失

去平衡,在外力作用下就会发生运动变成几何可变体系,这样的约束是必要约束。如果去掉一个约束,物体仍保持平衡,体系仍保持几何不变,这样的约束是多余约束。

有多余约束,用静力平衡方程无法求得全部内力和约束反力的几何不变结构,称为超静定结构,如图 3-20(b)所示。将超静定结构中多余约束的数目,称为超静定次数。如图 3-20(b)所示为 1 次超静定结构。常见的超静定结构桥型有连续体系桥型、连续刚构桥、悬索桥、斜拉桥、两铰拱桥、无铰拱桥等。

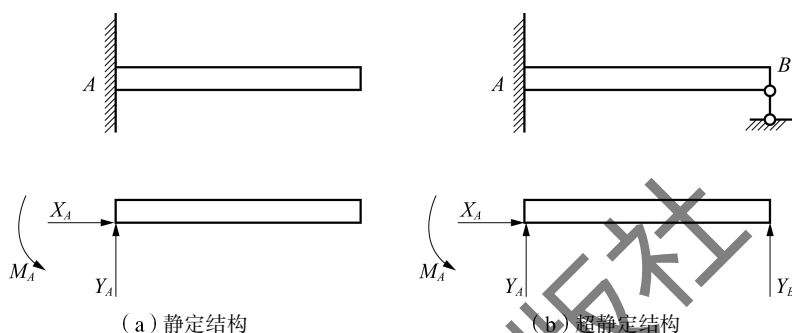


图 3-20

3.5 工程应用拓展

在施工现场,任何临时支架、拼装胎架、滑移/提升平台、挂篮或塔吊附着体系,本质上都是“平面杆系”。如果其几何组成分析被忽视,就可能把本应“静定/超静定”的结构误做成“机构”。一旦体系可变,施工中微小的支座位移、温度漂移或荷载偏心即可能引发“累积失稳”,导致整体倒塌。本节通过两个案例,说明几何组成分析在方案编制阶段的重要性,并给出“机构—结构”切换的力学分析与控制要点。

3.5.1 大跨度钢桁架高空散装临时支撑倒塌

1. 工程应用概况

某体育馆桁架采用“地面分段拼装+高空散装”方案(图 3-21)。施工单位在 28 m 高度搭建了钢管格构式临时支撑,顶部用 $\phi 48 \times 3.5$ 钢管作“水平系杆”。在几何组成分析时,方案编制人员把顶部系杆当作“刚性连杆”,但现场采用扣件连接,节点转动刚度极低。实际计算体系自由度为 $W = 3 > 0$,属于“机构”。在第 6 段桁架就位并焊接时,温度升高 22°C ,支撑顶部外扩 17 mm,由于体系可变,侧移被放大至 136 mm,扣件滑脱,支撑整体倾覆,造成重大事故。



图 3-21



2. 教训与对策

(1) 方案阶段必须验算 $W \leq 0$;

(2) 临时支撑与已装桁架之间应设置“转换装置”,如“楔块+高强螺栓”临时固结,使“机构”在合龙前就变成“结构”;

(3) 对扣件节点,按铰接模型重算,若 $W > 0$,应增设斜撑或侧向缆风绳,形成三角形稳定单元。

3.5.2 挂篮前移工况下的“瞬变体系”

1. 工程应用概况

某连续梁桥悬臂施工(图 3-22),挂篮重 520 kN,前移时前支点已滑出梁端 0.8 m,后锚仅两根 $\phi 32$ 精轧螺纹钢。前移阶段,挂篮主桁为“前支点—后锚—轨道”三点支承,若后锚刚度不足,主桁绕前支点转动自由度未被约束,形成瞬变体系,而这一风险在进行几何组成分析时没有引起重视。由于螺纹钢螺母未拧满扣,使其后锚端位移达 28 mm 时引起主桁架出现 0.4 rad 转动,挂篮前端下倾 680 mm,模板撞击已浇梁段,导致梁体局部压溃,酿成质量事故。



图 3-22

2. 教训与对策

(1) 将“挂篮前移”单独列为一个施工阶段,进行几何组成分析,必须保证 $W \leq 0$;

(2) 设置“临时上拉杆”或“反扣轮”形成闭合三角形,使挂篮主桁在前移时成为“静定结构”;

(3) 后锚杆预紧力按“刚度等效”原则设计,确保转动刚度富余。

3.5.3 注意事项

平面体系的几何组成分析不是课堂上的“纸上谈兵”,而是施工安全的“第一道防线”。在方案编制阶段就完成几何组成分析,并在现场严格执行“机构—结构”切换清单,才能从根本上避免因“几何可变性”导致的整体倒塌事故。具体注意事项包括以下几个方面:

(1) 掌握力学模型与工程应用的关系,应保证节点模型要与实际连接一致:扣件→铰接;临时焊接→半刚性;高强螺栓摩擦型→刚性。

- (2) 温度、风荷载、拼装误差应作为“初始缺陷”组合,在几何组成分析中考虑。
- (3) 识别“瞬变体系”,要保证施工全过程 $W \leq 0$ 。
- (4) 临时支撑拆除过程是“结构→机构→结构”逆向切换,必须分步释放反力,每步重新进行几何组成分析。
- (5) 所有计算书应单独成册,作为监理必检资料,不得以“经验稳定”替代。

单元小结

本单元论述了几个基本概念:

- (1) 体系的自由度——是指完全确定体系位置所需要的独立坐标的数目。
- (2) 刚片——是指几何形状不变的平面体。
- (3) 约束——对非自由系各部分的位置关系所施加的几何学上的限制。
- (4) 计算自由度——体系各组成部分总的自由度数减去体系中总的约束数,可记为 W ,其计算公式可定义为 $W = 3g - 2j - l - z$ 。几何不变的必要条件是 $W \leq 0$ 。
- (5) 两刚片规则——两个刚片间用不相交于一点也不相平行的三根链杆相联,其内部是几何不变的,并且没有多余约束。
- (6) 三刚片规则——三个刚片用不在一直线上的三个铰两两相联,其内部是几何不变的,并且没有多余约束。
- (7) 二元体规则——在作体系的几何构造分析时,减少或增加二元体不改变体系的几何构造特征。
- (8) 静定结构——仅用静力平衡方程可以求得全部内力和约束反力的几何不变结构。
- (9) 超静定结构——有多余约束,用静力平衡方程无法求得全部内力和约束反力的几何不变结构。

思考题

- 3-1 在建筑结构体系中,常常存在多余约束,是否应该将所有的多余约束都去除?为什么?
- 3-2 什么是几何可变体系?为什么它们不能作为结构使用,试举例说明。
- 3-3 什么是几何不变体系?为什么它们能作为结构使用,试举例说明。
- 3-4 几何不变体系有三个组成规则,其最基本的规则是什么?
- 3-5 静定结构、超静定结构各有何特征?
- 3-6 在土木工程中,超静定结构的超静定次数是否越多越安全?

习题

3-1 单选题

(1) 一根链杆相当于()个约束。

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4



(2) 一个由三个刚片组合而成的静定内部结构,该内部结构有()个自由度。

- A. 3 B. 6 C. 9 D. 12

(3) 有多余约束的几何不变体系是()。

- A. 静定结构 B. 几何可变体系 C. 瞬变体系 D. 超静定结构

3-2 判断题

(1) 一个刚性连接相当于三个约束。()

(2) 两刚片用不全交于一点也不相互平行的三根链杆相连接,则所组成的体系是几何不变体系,且无多余约束。()

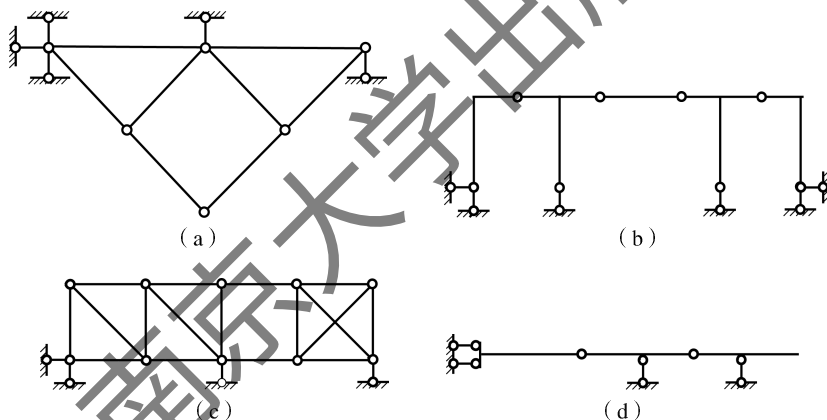
(3) 一个单铰相当于一个约束。()

(4) 三个刚片用不在同一直线上的三个铰两两相连,则所组成的体系为几何不变体系,且无多余约束。()

(5) 一个体系中增加一个约束,而体系的自由度并不因此而减少,则此约束称为非多余约束。()

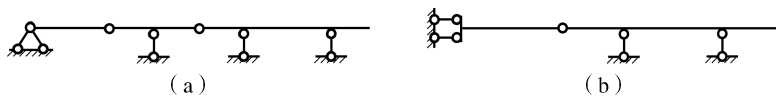
(6) 结构的全部反力和内力都可由静力平衡条件求得,则此结构称为静定结构。()

3-3 试求出图示体系的计算自由度,并分析体系的几何构造。



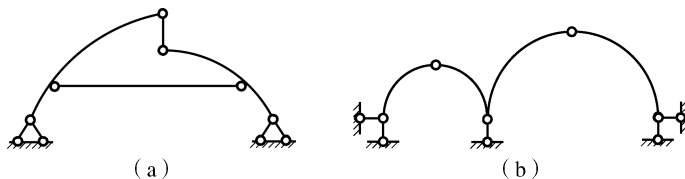
习题 3-3 图

3-4 试分析图示体系的几何构造。



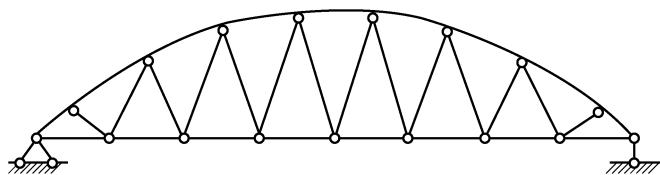
习题 3-4 图

3-5 试分析图示体系的几何构造。



习题 3-5 图

3-6 试分析图示体系的几何构造。



习题 3-6 图

南京大学出版社



单元3 习题参考答案