

21世纪 应用型本科院校系列教材

线性代数

X I A N X I N G D A I S H U

李文涛 谭沈阳 周海林 主编



南京大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/李文涛,谭沈阳,周海林主编.—南京:
南京大学出版社,2026.1.— ISBN978-7-305-29705-2
I.O151.2
中国国家版本馆 CIP 数据核字第 2025KF5311 号

出版发行 南京大学出版社
社 址 南京市汉口路 22 号 邮 编 210093
书 名 线性代数
XIANXING DAISHU
主 编 李文涛 谭沈阳 周海林
责任编辑 吴 华 编辑热线 025-83596997
照 排 南京开卷文化传媒有限公司
印 刷 丹阳兴华印务有限公司
开 本 787 mm×1092 mm 1/16 开 印张 12.75 字数 326 千
版 次 2026 年 1 月第 1 版
印 次 2026 年 1 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-305-29705-2
定 价 39.80 元

网 址: <http://www.njupco.com>
官方微博: <http://weibo.com/njupco>
微信服务号: NJUYUNSHU
销售咨询热线: (025)83594756

* 版权所有,侵权必究

* 凡购买南大版图书,如有印装质量问题,请与所购
图书销售部门联系调换

前言

亲爱的读者,当你翻开这本教材时,你开启的不仅是一门大学数学课程的学习,更是一场探索世界底层规律的思维之旅。线性代数的核心魅力,在于它提供了一套极其强大且优雅的“语言”,用以描述和解决那些涉及多变量、多关系的问题。现实世界很少是单一变量的简单函数。从计算机图形中的绚丽动画,到人工智能中的神经网络;从搜索引擎的网页排序,到经济学中的投入产出模型;从工程结构的应力分析,到量子力学的基本原理——这些看似迥异的领域,其背后都矗立着线性代数的坚实框架。

本书将精心构建一个清晰的知识网络,向你展示矩阵、向量、行列式、线性方程组、特征值、二次型等概念之间如何环环相扣,共同构成一个和谐统一的整体。我们希望通过这种“编织知识之网”的方式,帮助你建立系统性的理解,而非零散的记忆。

本书突破了传统教材的局限,增设了“实践应用”专栏,第七章 MATLAB 及其在线性代数中的应用和第八章线性代数应用案例,第七章主要帮助学生掌握如何借助计算机解决线性代数问题,从而大幅度提升学生的动手能力,提高教学质量,助力创新型人才培养。第八章让同学通过感受线性代数在解决各类实际问题中所发挥的作用,提升学习线性代数的兴趣,培养学生应用数学解决实际问题的意识和能力。

最后,请记住,学习线性代数就像学习一种新的乐器。起初可能会感到笨拙和不适应,但只要你持续练习,用心体会,终有一天,你将能熟练地运用这套“语言”,演奏出属于自己的、解决实际问题的华丽乐章。

当然限于编者认知的局限性,教材还有很多地方需要不断完善,我们将在以后教学过程中,根据应用型人才培养的需要不断地修订,同时也请专家、同行和同学们不吝赐教。

编者

目 录

第一章 行列式	1
第一节 二阶、三阶行列式	1
第二节 n 阶行列式	4
第三节 n 阶行列式的计算	7
第四节 克拉默法则	16
第二章 矩 阵	20
第一节 矩阵的概念与运算	20
第二节 矩阵的逆	31
第三节 分块矩阵	37
第四节 初等变换与初等矩阵	42
第五节 矩阵的秩	50
第三章 n 维向量空间	57
第一节 n 维向量空间	57
第二节 向量的线性相关性	61
第三节 基维数坐标	69
第四章 线性方程组	78
第一节 消元法	78
第二节 线性方程组解的存在定理	81
第三节 线性方程组解的结构	85
第五章 矩阵的特征值与对角化	98
第一节 特征值与特征向量	98

第二节	相似矩阵	105
第三节	向量的内积与正交矩阵	110
第四节	对称矩阵的对角化	117
第六章	实二次型	121
第一节	实二次型的基本概念	121
第二节	化二次型为标准形	125
第三节	正定二次型	133
第七章	MATLAB 及其在线性代数中的应用	138
第一节	MATLAB 简介	138
第二节	向量的生成和运算	140
第三节	矩阵的表示及运算	143
第四节	线性方程组的求解	150
第五节	向量组的表示及向量组相关运算	152
第八章	线性代数应用案例	157
第一节	矩阵的应用案例	157
第二节	线性方程组的应用	166
第三节	实向量空间的应用	173
第四节	特征值特征向量与二次型的应用	181
参考答案		190
参考文献		198

第一章 行列式



扫码可见本章
学习资源

第一节 二阶、三阶行列式

一、二阶行列式

二元一次方程组的代入消元解法：

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1, & (1) \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2. & (2) \end{cases}$$

a_{11}, a_{12} 不可能同时为 0, 不妨设 $a_{11} \neq 0$, 则:

$$(1) \times \left(-\frac{a_{21}}{a_{11}}\right) \text{ 得: } -a_{21}x - \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}}y = -\frac{b_1a_{21}}{a_{11}}, \quad (3)$$

$$(2) + (3) \text{ 得(消去 } x): \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11}}y = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}},$$

$$\text{即: } y = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \quad (4)$$

$$\text{将(4) 代入(1) 得: } x = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

可见, 方程组的解完全可由方程组中的未知数系数 $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ 以及常数项 b_1, b_2 表示出来

$$\begin{cases} x = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \\ y = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \end{cases}$$

如果规定记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, 则有:

$$b_1a_{22} - a_{12}b_2 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, a_{11}b_2 - b_1a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

$$\text{因此二元一次方程组的解可以表示为: } \begin{cases} x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \\ y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \end{cases}$$

定义 1.1.1 记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 表示代数 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, 称为二阶行列式, 即:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

行列式中的元素用小写英文字母表示, 下标的两个数据表示该元素所在的行和列, 分别叫行标和列标. 一般行列式中位于第 i 行第 j 列的元素记为 a_{ij} , 比如 a_{21} 是指位于第二行第一列的元素.

二阶行列式表示的代数, 可以用画线(如图 1-1-1)的方法记忆, 即实线连接的两个元素的乘积减去虚线连接的两个元素的乘积.

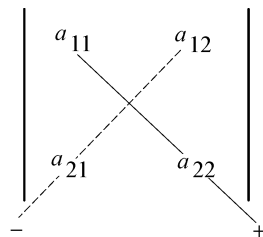


图 1-1-1

【例 1-1-1】 计算下列行列式的值:

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}; \quad (2) \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}; \quad (3) \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

解 (1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \times 4 - 2 \times 3 = -2.$

(2) $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -1 \times 2 - 0 \times 0 = -2.$

(3) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 2 \times 3 - (-1) \times 0 = 6.$

二、三阶行列式

定义 1.1.2 记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 表示代数:

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32},$$

称为三阶行列式, 即:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

三阶行列式可以用画线的方法记忆.如图 1-1-2,其中各实线(主对角线方向)连接的三个元素的乘积是代数和中的一项,各虚线(副对角线方向)连接的三个元素的乘积是代数中的负项.

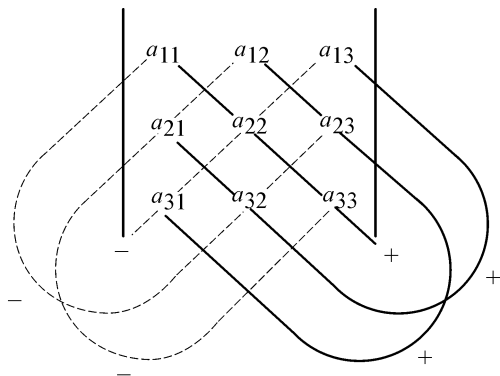
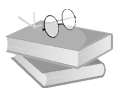


图 1-1-2

【例 1-1-2】 计算下列三阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix}.$$

解 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 1 \times 2 \times (-2) + 2 \times 1 \times (-3) + (-2) \times 4 \times (-4) - (-4) \times 2 \times (-3) - 2 \times (-2) \times (-2) - 1 \times 1 \times 4$
 $= (-4) + (-6) + 32 - 24 - 8 - 4 = -14.$



习题 1-1

1. 计算下列行列式:

$$\begin{vmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & x & y \\ -x & 0 & z \\ y & -z & 0 \end{vmatrix}.$$

2. 设 $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$, 求 x 的值.

3. 求函数 $f(x) = \begin{vmatrix} 2x & 1 & -1 \\ -x & -x & x \\ 1 & 2 & x \end{vmatrix}$ 中 x^3 的系数.

4. 利用二阶行列式求解方程组: $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 4, \\ 3x_1 + 5x_2 = 1. \end{cases}$

第二节 n 阶行列式

一、 n 阶行列式的定义

定义 1.2.1 由 n^2 个元素 a_{ij} ($i=1, \dots, n, j=1, \dots, n$) 排成 n 行、 n 列, 构成的运算式

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式, 简记为 $\det(a_{ij})$, 其中 a_{ij} 为行列式 $\det(a_{ij})$ 的元素.

在行列式 D_n 中, 将 $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ 所组成的对角线称为 D_n 的主对角线, 这些元素称为主对角元. 而 $a_{1n}, a_{2, n-1}, \dots, a_{n1}$ 所组成的对角线则称为 D_n 的副对角线.

称主对角线以上(下)的元素全为零的行列式称为下(上)三角形行列式.

定义 1.2.2 在 D_n 划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行、第 j 列, 剩下的 $n-1$ 阶行列式叫作元素 a_{ij} 的余子式, 记作 M_{ij} , 并称 $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ 为元素 a_{ij} 的代数余子式.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \\ &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}. \end{aligned}$$

即三阶行列式的值等于第一行的每个元素与其对应的代数余子式的乘积之和, 由此可

归纳出 $D_n = \sum_{j=1}^n a_{1j}A_{1j}$.

由以上定义可得:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}, \text{ 即}$$

三角形行列式和主对角行列式的值都等于主对角线元素的乘积.

二、行列式的基本性质

把行列式 D 的行、列互换所得到的行列式称为 D 的转置行列式, 记作 D^T , 即若

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则

$$D^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 1.2.1 行列式与它的转置行列式相等, 即 $D = D^T$.

由性质 1.2.1 可知, 行列式中行与列具有对等的地位, 对行成立的性质, 对列也成立, 反之亦然.

性质 1.2.2 行列式两行(列)互换, 行列式的值变号.

由性质 1.2.2 即可得到下面的推论

推论 1.2.1 若行列式 D 中有两行(列)元素对应相等, 则 D 的值为零.

证明 把 D 相同的两行(列)互换, 所得行列式记作 D_1 , 则由性质 1.2.2 得 $D_1 = -D$, 而 D 实际上没有变, 故应有 $D_1 = D$, 所以 $D = 0$.

性质 1.2.3 用数 k 乘以行列式 D , 等于将该数 k 乘到 D 的某一行(列)中所有的元素上.

推论 1.2.2 若行列式有一行(列)的元素全为零, 则其值为零.

推论 1.2.3 若行列式有两行元素对应成比例, 则其值为零.

性质 1.2.4 若 D 的某一行(列)的元素都可表为两数之和, 则以下等式成立:

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{i1} + b_{i1} & a_{i2} + b_{i2} & \cdots & \cdots & a_{in} + b_{in} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

性质 1.2.5 把行列式某一行(列)的 λ 倍加到另一行(列)的对应元素上, 行列式的值不变, 即:

$$\begin{vmatrix} & \cdots & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & \cdots & a_{kn} \\ & \cdots & & & \end{vmatrix} \xrightarrow{r_k + \lambda r_i} \begin{vmatrix} & \cdots & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{k1} + \lambda a_{i1} & a_{k2} + \lambda a_{i2} & \cdots & \cdots & a_{kn} + \lambda a_{in} \\ & \cdots & & & \end{vmatrix}.$$

证明 根据性质 1.2.4 及性质 1.2.3 的推论 1.2.3:

$$\begin{aligned}
 & \begin{vmatrix} & & \cdots & & \\ & a_{i1} & a_{i2} & \cdots & \cdots & a_{in} \\ & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{k1} + \lambda a_{i1} & a_{k2} + \lambda a_{i2} & \cdots & \cdots & a_{kn} + \lambda a_{in} \\ & & \cdots & & \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} & & \cdots & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & \cdots & a_{kn} \\ & & \cdots & & \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} & & \cdots & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \cdots & \cdots & \lambda a_{in} \\ & & \cdots & & \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} & & \cdots & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & \cdots & a_{kn} \\ & & \cdots & & \end{vmatrix}.
 \end{aligned}$$

行列式性质 1.2.2、1.2.3、1.2.5 涉及行列式的三种运算:换行(列)、倍乘、倍加,即 $r_i \leftrightarrow r_j, r_i \times k, r_i + \lambda \cdot r_j$ 和 $c_i \leftrightarrow c_j, c_i \times k, c_i + \lambda \cdot c_j$.



习题 1-2

1. 证明:
$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1 & b_1 + c_1 & c_1 + a_1 \\ a_2 + b_2 & b_2 + c_2 & c_2 + a_2 \\ a_3 + b_3 & b_3 + c_3 & c_3 + a_3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

2. 已知 $abcd = 1$, 证明
$$\begin{vmatrix} a^2 + \frac{1}{a^2} & a & \frac{1}{a} & 1 \\ b^2 + \frac{1}{b^2} & b & \frac{1}{b} & 1 \\ c^2 + \frac{1}{c^2} & c & \frac{1}{c} & 1 \\ d^2 + \frac{1}{d^2} & d & \frac{1}{d} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

3. 证明
$$\begin{vmatrix} 0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ -a_1 & 0 & a_5 & a_6 & a_7 \\ -a_2 & -a_5 & 0 & a_8 & a_9 \\ -a_3 & -a_6 & -a_8 & 0 & a_{10} \\ -a_4 & -a_7 & -a_9 & -a_{10} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

第三节 n 阶行列式的计算

一、行列式的计算

利用行列式的性质可有效地简化行列式的计算.例如,利用性质 1.2.5 把行列式化成上三角行列式,便可直接得到行列式的值.

【例 1-3-1】 计算 4 阶行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 5 & -5 \\ -1 & -1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$.

解 我们利用性质将它化成三角形,便可套用前面的结果:

$$D \xrightarrow[r_4+r_1]{r_3-2r_1} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 7 & -11 \\ 0 & 2 & 2 & 8 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4+2r_2]{r_3-5r_2} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4+2r_3]{r_4+2r_3} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 1 \times (-1) \times (-3) \times 10 = 30.$$

【例 1-3-2】 计算 4 阶行列式 $D = \begin{vmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix}$.

解 这个行列式的特点是每行(列)元素之和都是 $a+3b$,因此,将第二、三、四行都加到第一行,再提取公因子得:

$$D = \begin{vmatrix} a+3b & a+3b & a+3b & a+3b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix} = (a+3b) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix} =$$

$$\xrightarrow[i=2,3,4]{r_i-br_1} (a+3b) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-b \end{vmatrix} = (a+3b)(a-b)^3.$$

引理 1-3-1 如果 n 阶行列式 D 的第 i 行除元素 a_{ij} 外其余元素均为 0,则

$$D = a_{ij} A_{ij}.$$

证明

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{ij} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{i-1} \begin{vmatrix} 0 & \cdots & a_{ij} & \cdots & 0 \\ a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{i-1} (-1)^{j-1} \begin{vmatrix} a_{ij} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{1j} & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{2j} & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{nj} & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} = a_{ij} A_{ij}. \end{aligned}$$

定理 1.3.1 n 阶行列式 D 的任一行(列)的各元素与其对应的代数余子式的乘积之和,

等于 D 的值, 即 $D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{k=1}^n a_{ik}A_{ik} \quad (i=1, 2, \cdots, n),$

或 $D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{kj}A_{kj} \quad (j=1, 2, \cdots, n).$

证明 任选 D 的第 i 行, 把该行元素都写作 n 个数之和:

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} + 0 + \cdots + 0 & 0 + a_{i2} + \cdots + 0 & \cdots & 0 + 0 + \cdots + a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{i2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

由引理即得

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{k=1}^n a_{ik}A_{ik} \quad (i=1,2,\cdots,n).$$

这称为“按第 i 行展开”，按第 j 列展开可类似证明，即

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{kj}A_{kj} \quad (j=1,2,\cdots,n).$$

这个定理称为行列式按一行(列)展开法则.它为行列式计算提供了又一种思路:将 n 阶行列式的计算化为 $n-1$ 阶行列式的计算,这称为降阶.

【例 1-3-3】 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$.

解 方法一(按第三行展开)

$$\begin{aligned} D &= 2A_{31} + 0A_{32} + 1A_{33} + (-1)A_{34} \\ &= 2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -4 \\ -5 & 3 & -3 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -5 & 1 & -4 \\ 1 & -5 & -3 \end{vmatrix} + (-1)(-1)^{3+4} \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & 3 \end{vmatrix} = 40. \end{aligned}$$

我们把行列式按照行(列)展开时,最好先根据性质将某一行或列化为只剩下一个非零元素之后再展开.

方法二

$$D \xrightarrow[c_4+c_3]{c_1-2c_3} \begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 & 1 \\ -11 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & -5 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{33} = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -11 & 1 & -1 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix} = 40.$$

推论 1.3.1 行列式中任意行(列)的每个元素与其他行(列)的元素对应的代数余子式的乘积之和为零,即

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0, \quad (i \neq j)$$

$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = 0, \quad (i \neq j)$$

证明

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{j1}A_{j1} + a_{j2}A_{j2} + \cdots + a_{jn}A_{jn}.$$

将 a_{jk} 换成 a_{ik} ($k=1, \dots, n$), 得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0.$$

注: $a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = \begin{cases} D, & i=j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$

【例 1-3-4】 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}$, 求 $A_{11} + A_{21} + A_{31} + A_{41}$.

解 因为 D 的第 3 列元素与 D 的第 1 列元素的代数余子式相乘求和为 0, 即 $3A_{11} + 3A_{21} + 3A_{31} + 3A_{41} = 0$, 所以 $A_{11} + A_{21} + A_{31} + A_{41} = 0$.

【例 1-3-5】 证明范德蒙(Vandermonde)行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_{n-1}^2 & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_{n-1}^{n-1} & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (x_i - x_j).$$

证明

$$\begin{aligned} D_n & \xrightarrow[r_i - x_n r_{i-1}]{i=n, \dots, 2} \left| \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \hline (x_1 - x_n) & (x_2 - x_n) & \cdots & (x_{n-1} - x_n) & 0 \\ x_1(x_1 - x_n) & x_2(x_2 - x_n) & \cdots & x_{n-1}(x_{n-1} - x_n) & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-2}(x_1 - x_n) & x_2^{n-2}(x_2 - x_n) & \cdots & x_{n-1}^{n-2}(x_{n-1} - x_n) & 0 \end{array} \right| \\ & = (-1)^{1+n} (x_1 - x_n)(x_2 - x_n) \cdots (x_{n-1} - x_n) D_{n-1} \\ & = (x_n - x_{n-1})(x_n - x_{n-2}) \cdots (x_n - x_1) D_{n-1}, \\ D_k & = (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k-2}) \cdots (x_k - x_1) D_{k-1} \quad (k=n, n-1, \dots, 3), \\ D_2 & = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1, \\ D_n & = (x_n - x_{n-1})(x_n - x_{n-2}) \cdots (x_n - x_2)(x_n - x_1) \times \\ & \quad (x_{n-1} - x_{n-2}) \cdots (x_{n-1} - x_2)(x_{n-1} - x_1) \times \\ & \quad \cdots \end{aligned}$$

$$(x_3 - x_2)(x_3 - x_1) \times (x_2 - x_1).$$

$$\text{【例 1-3-6】} \quad (1) \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 1 & 2^3 & 3^3 & 4^3 \end{vmatrix} = (2-1)(3-1)(4-1)(3-2)(4-2)(4-3) = 12.$$

$$(2) \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2^2 & 3^2 & \cdots & n^2 \\ 1 & 2^3 & 3^3 & \cdots & n^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2^n & 3^n & \cdots & n^n \end{vmatrix} = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2^2 & 3^2 & \cdots & n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2^{n-1} & 3^{n-1} & \cdots & n^{n-1} \end{vmatrix} \\ = n! (n-1)! \cdots 2! 1!.$$

对于元素排列有某些明显规律的行列式,可根据其特点采用一些计算技巧,常用的如建立递推公式和用数学归纳法等.

【例 1-3-7】 计算 $2n$ 阶行列式

$$D_{2n} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & b & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & b & \cdots & a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & \cdots & 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a \end{vmatrix}.$$

解 将 D_{2n} 按第一行展开,得

$$D_{2n} = a \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & b & 0 \\ 0 & a & \cdots & b & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & b & \cdots & a & 0 & 0 \\ b & 0 & \cdots & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a \end{vmatrix} + b(-1)^{2n+1} \begin{vmatrix} 0 & a & 0 & \cdots & 0 & b \\ 0 & 0 & a & \cdots & b & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & b & \cdots & a & 0 \\ 0 & b & 0 & \cdots & 0 & a \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

以上两个 $2n-1$ 阶行列式再按第 $2n-1$ 行展开,得

$$D_{2n} = a^2 (-1)^{2(2n-1)} \cdot D_{2n-2} + b(-1)^{4n+1} \cdot b \cdot D_{2n-2} = (a^2 - b^2) D_{2n-2}.$$

如此下去可得

$$\begin{aligned} D_{2n} &= (a^2 - b^2) D_{2n-2} = (a^2 - b^2)^2 D_{2n-4} \\ &= \cdots \\ &= (a^2 - b^2)^{n-1} D_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (a^2 - b^2)^{n-1} \begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} \\
 &= (a^2 - b^2)^n.
 \end{aligned}$$

【例 1-3-8】 证明 $D_n = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b & b \\ c & a & b & \cdots & b & b \\ c & c & a & \cdots & b & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ c & c & c & \cdots & a & b \\ c & c & c & \cdots & c & a \end{vmatrix} = \frac{c(a-b)^n - b(a-c)^n}{c-b}.$

证明

$$\begin{aligned}
 D_n &= \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b & b \\ c & a & b & \cdots & b & b \\ c & c & a & \cdots & b & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ c & c & c & \cdots & a & b \\ c+0 & c+0 & c+0 & \cdots & c+0 & c+(a-c) \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b & b \\ c & a & b & \cdots & b & b \\ c & c & a & \cdots & b & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ c & c & c & \cdots & a & b \\ c & c & c & \cdots & c & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b & b \\ c & a & b & \cdots & b & b \\ c & c & a & \cdots & b & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ c & c & c & \cdots & a & b \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a-c \end{vmatrix} \\
 &= c \begin{vmatrix} a-b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c-b & a-b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c-b & c-b & a-b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ c-b & c-b & c-b & \cdots & a-b & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} + (a-c)D_{n-1} \\
 &= c(a-b)^{n-1} + (a-c)D_{n-1}.
 \end{aligned}$$

当 $n=1$ 时, $D_1 = a = \frac{c(a-b) - b(a-c)}{c-b}$ 成立;

当 $n=2$ 时, $D_2 = \begin{vmatrix} a & b \\ c & a \end{vmatrix} = a^2 - bc = \frac{c(a-b)^2 - b(a-c)^2}{c-b}$ 成立;

假设 $n=k-1$ 时, 结论成立, 即 $D_{k-1} = \frac{c(a-b)^{k-1} - b(a-c)^{k-1}}{c-b}$,

那么

$$D_k = c(a-b)^{k-1} + (a-c)D_{k-1}$$

$$\begin{aligned}
&= c(a-b)^{k-1} + (a-c) \frac{c(a-b)^{k-1} - b(a-c)^{k-1}}{c-b} \\
&= \frac{c(a-b)^k - b(a-c)^k}{c-b}.
\end{aligned}$$

因此,对一切自然数 n , 结论成立.

在行列式的计算时,我们可以通过降低行列式的阶数进而化简行列式的计算.有些情况下适当增加行列式的阶数也能化简行列式的计算.

【例 1-3-9】 计算 $D_n = \begin{vmatrix} m-a & a & a & \cdots & a \\ a & m-a & a & \cdots & a \\ a & a & m-a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & m-a \end{vmatrix}.$

解 通过加边

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ 0 & m-a & a & \cdots & a \\ 0 & a & m-a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & a \\ 0 & a & a & \cdots & m-a \end{vmatrix}.$$

第一行的 (-1) 倍加到其余各行得

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ -1 & m-2a & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & m-2a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & m-2a \end{vmatrix}.$$

第 i ($i=2,3,\cdots,n$) 行 $\times \left(-\frac{a}{m-2a}\right)$ 加到第 1 行得

$$\begin{aligned}
D_n &= \begin{vmatrix} 1+\frac{na}{m-2a} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & m-2a & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & m-2a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & m-2a \end{vmatrix} \\
&= [m+(n-2)a](m-2a)^{n-1}.
\end{aligned}$$

二、行列式的乘法

下面的定理给出了行列式的乘法公式

定理 1.3.2 设 $A_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, B_n = \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$

则 $A_n B_n = C_n = \begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix}$, 其中 $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}, i, j = 1, \cdots, n.$

利用行列式的乘法,有时也能化简行列式的计算.

【例 1-3-10】 计算行列式 $D_n = \begin{vmatrix} a_1 + b_1 & a_1 + b_2 & \cdots & a_1 + b_n \\ a_2 + b_1 & a_2 + b_2 & \cdots & a_2 + b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n + b_1 & a_n + b_2 & \cdots & a_n + b_n \end{vmatrix}.$

解 根据行列式的乘法规则可知

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = 0.$$



习题 1-3

1. 计算下列行列式:

(1) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix};$

(2) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix};$

(3) $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 9 & 6 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 9 & 0 \\ 0 & -1 & 6 & 8 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & 7 & 0 \end{vmatrix};$

(4) $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix};$

(5) $\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix};$

(6) $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix}.$

2. 计算下列 n 阶行列式:

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & (a+1) & \cdots & (a+n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a^n & (a+1)^n & \cdots & (a+n)^n \end{vmatrix};$$

$$(2) \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & \cdots & -2 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -n & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix};$$

$$(3) \begin{vmatrix} a_1 + \lambda_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 + \lambda_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n + \lambda_n \end{vmatrix};$$

$$(4) \begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & a \end{vmatrix};$$

$$(5) \begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & \ddots & & 2 \\ \vdots & \ddots & 3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 2 \\ 2 & \cdots & \cdots & 2 & n \end{vmatrix};$$

$$(6) \begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & \cdots & n-1 & n & 1 \\ 3 & 4 & \cdots & n & 1 & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 & n-1 \end{vmatrix}.$$

3. 证明下列等式:

$$(1) \begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & x & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \ddots & -1 \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^n a_k x^{n-k};$$

$$(2) \begin{vmatrix} \cos \theta & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2\cos \theta & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2\cos \theta \end{vmatrix} = \cos n\theta;$$

$$(3) \begin{vmatrix} x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & -1 & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & x + a_1 \end{vmatrix} = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n.$$

4. 求下列行列式的平方:

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 & -1 \\ 1 & -7 & -1 & 9 \end{vmatrix};$$

$$(2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

第四节 克拉默法则

含有 n 个未知量、 n 个方程的线性方程组为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots \cdots \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \quad (1-4-1)$$

未知量的所有系数构成的行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为方程组(1-4-1)的**系数行列式**.

$D_j (j=1, 2, \cdots, n)$ 是系数行列式 D 中第 j 列元素用方程组右端的自由项代替后所得到的 n 阶行列式, 即

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

与二、三元线性方程组类似, 它的解可以用 n 阶行列式表示, 即有**克莱姆法则**.

用 D 的代数余子式 $A_{i1} (i=1, 2, \cdots, n)$ 依此乘方程组(1-4-1)的各个方程, 再把所有方程相加, 得到

$$\sum_{i=1}^n A_{i1} (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n) = \sum_{i=1}^n b_i A_{i1}.$$

将左端的乘积展开, 再合并含同一未知量的项, 对照公式发现, 除 x_1 的系数是 D 外, 其余未知量的系数都是零; 右端的和式正是以下行列式按第 1 列展开的展开式

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

于是得到 $Dx_1 = D_1$, 如果 $D \neq 0$, 立即可算出 x_1 的值,

一般地, 用代数余子式 $A_{ij} (i=1, 2, \cdots, n)$ 乘方程组的各个方程后再相加, 能够保留 x_j

而消去其他所有未知量,综合以上推导,可形成解线性方程组的**克莱姆法则**:

定理 1.4.1 线性方程组当其系数行列式 $D \neq 0$ 时,有且仅有唯一解

$$x_j = \frac{D_j}{D} \quad (j=1,2,\cdots,n), \quad (1-4-2)$$

其中 $D_j (j=1,2,\cdots,n)$ 是以方程组的常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 替换 D 的第 j 列元素后形成的行列式.

【例 1-4-1】 求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 2, \\ 2x_1 - x_3 + 4x_4 = 4, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = -1, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -4. \end{cases}$$

解 用降阶法计算行列式:

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0, \\ D_1 &= \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 6 & -1 & 0 & 2 \\ -3 & 3 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -1 & 2 \\ -3 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2, \\ D_2 &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -4 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 3 & 6 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 4. \end{aligned}$$

类似地可算得

$$\begin{aligned} D_3 &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 0, \\ D_4 &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & -4 \end{vmatrix} = -1. \end{aligned}$$

所以

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = 1, x_2 = \frac{D_2}{D} = -2, x_3 = \frac{D_3}{D} = 0, x_4 = \frac{D_4}{D} = \frac{1}{2}.$$

【例 1-4-2】 设曲线 $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ 通过四点 $(1,3)$ 、 $(2,4)$ 、 $(3,3)$ 、

$(4, -3)$, 求系数 a_0, a_1, a_2, a_3 .

解 把四个点的坐标代入曲线方程, 得线性方程组

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 3, \\ a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 = 4, \\ a_0 + 3a_1 + 9a_2 + 27a_3 = 3, \\ a_0 + 4a_1 + 16a_2 + 64a_3 = -3. \end{cases}$$

其系数行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{vmatrix}$ 是范德蒙行列式, 可得 $D = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = 12$.

而

$$\begin{aligned} D_1 &= \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 4 & 8 \\ 3 & 3 & 9 & 27 \\ -3 & 4 & 16 & 64 \end{vmatrix} = 36, \\ D_2 &= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & -3 & 16 & 64 \end{vmatrix} = -18, \\ D_3 &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 3 & 27 \\ 1 & 4 & -3 & 64 \end{vmatrix} = 24, \\ D_4 &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 9 & 3 \\ 1 & 4 & 16 & -3 \end{vmatrix} = -6. \end{aligned}$$

故由克拉默法则的唯一解

$$a_0 = 3, a_1 = -\frac{3}{2}, a_2 = 2, a_3 = -\frac{1}{2},$$

即曲线方程为

$$y = 3 - \frac{3}{2}x + 2x^2 - \frac{1}{2}x^3.$$

如果线性方程组(1-4-1)的常数项全为零, 即

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0, \end{cases} \quad (1-4-3)$$

则称之为齐次线性方程组,而方程组(1-4-1)当常数项不全为零时,称为非齐次线性方程组.

显然,方程组(1-4-3)一定有零解 $x_j=0 (j=1,2,\cdots,n)$.如果系数行列式 $D \neq 0$,则根据克莱姆法则,它只有唯一的零解,没有非零解.以后还可以证明:如果 $D=0$,则方程组(1-4-3)一定有非零解(未知量的取值不全为零).我们提前归纳为以下定理:

定理 1.4.2 齐次线性方程组(1-4-3)有非零解的充分必要条件是它的系数行列式等于零.

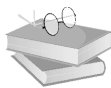
【例 1-4-3】 λ 为何值时,方程组
$$\begin{cases} x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ \lambda x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$
 有非零解.

解 当方程组的系数行列式 $D=0$ 时,有非零解.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ \lambda & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ \lambda & 1 & 2 \end{vmatrix} = -(1+\lambda)(2-\lambda),$$

则 $\lambda = -1$ 或 2 时有非零解.

用克莱姆法则解线性方程组要计算 $(n+1)$ 个 n 阶行列式,计算量很大而且包含了大量的重复计算.我们将在第三章介绍更好的方法.



习题 1-4

1. 用克莱姆法求解线性方程组:

$$(1) \begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 1, \\ 3x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 = 1; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 3; \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} 2x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1, \\ x_1 + 3x_2 + \cdots + x_n = 1, \\ \dots\dots\dots \\ x_1 + x_2 + \cdots + (n+1)x_n = 1; \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} x_1 + a_1x_2 + a_1^2x_3 + \cdots + a_1^{n-1}x_n = 1, \\ x_1 + a_2x_2 + a_2^2x_3 + \cdots + a_2^{n-1}x_n = 1, \\ \dots\dots\dots \\ x_1 + a_nx_2 + a_n^2x_3 + \cdots + a_n^{n-1}x_n = 1. \end{cases}$$

$$2. \text{ 当 } \lambda \text{ 为何值时方程组 } \begin{cases} \lambda x + y + z = 1, \\ x + \lambda y + z = \lambda, \\ x + y + \lambda z = \lambda^2 \end{cases} \text{ 有唯一解? 并求其解.}$$

$$3. \text{ 已知齐次线性方程组 } \begin{cases} (3-\lambda)x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ (2-\lambda)x_2 - x_3 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + (1-\lambda)x_3 = 0 \end{cases} \text{ 有非零解, 求 } \lambda \text{ 的值.}$$

第二章 矩 阵



扫码可见本章
学习资源

在数学中,矩阵最早来自方程组中未知量的系数及常数所构成的方阵.这一概念由 19 世纪英国数学家凯利首先提出,后经过不断完善和发展,矩阵已经成为高等代数学中的常见工具,广泛应用于统计分析等应用数学学科中.矩阵的运算是数值分析领域的重要问题,在电路学、力学、光学和量子学等物理领域中均有应用.在计算机科学中,数字图像处理、计算机图形学、计算几何学、人工智能、网络通信等也需要用到矩阵.矩阵作为一种有效的数学工具,在工程技术的各个领域都发挥着重要作用,是一个极其重要的、应用广泛的概念,是线性代数的一个主要研究对象.

第一节 矩阵的概念与运算

一、矩阵的概念

设某种产品由 3 个产地运往 4 个销地,两次调运方案分别见表 2-1-1 和表 2-1-2.

表 2-1-1

产地 \ 销地	S1	S2	S3	S4
B1	4	3	1	2
B2	3	2	1	1
B3	4	5	2	4

表 2-1-2

产地 \ 销地	S1	S2	S3	S4
B1	2	3	2	2
B2	1	3	2	3
B3	2	1	3	2

为了便于研究,常采用数表 A, B 来表示两次调运量,则有

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix},$$

这类数表便是数学上的矩阵.

定义 2.1.1 设 m 和 n 都是正整数, 由 $m \times n$ 个复数排成的 m 行 n 列的数表:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

称为 m 行 n 列矩阵(matrix), 简称 $m \times n$ 矩阵, 通常我们用大写黑体字母 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \cdots$ 表示矩阵. 为了标明矩阵的行数 m 和列数 n , 可用 $\mathbf{A}_{m \times n}$ 或 $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}$ 表示. 其中 a_{ij} ($i=1, 2, \cdots, m$; $j=1, 2, \cdots, n$) 称为矩阵 $\mathbf{A}$ 的第 i 行第 j 列的元素. 也就是说第一个下标代表行, 第二个下标代表列.

【例】 (1) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ -2 & 6 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ 是一个 2×4 矩阵;

(2) 若 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 13 & 6 & 2i \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, 则 $a_{13} = 2i$.

几种特殊类型的矩阵

(1) n 阶方阵: 在矩阵 $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}$ 中, 当 $m = n$ 时 $\mathbf{A}$ 称为 n 阶方阵, n 称为矩阵 $\mathbf{A}$ 的阶数.

(2) 行矩阵: 只有一行元素的矩阵 $\mathbf{A}_{1 \times n} = (a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n})$ 称为行矩阵 (也称 n 维行向量).

(3) 列矩阵: 只有一列元素的矩阵 $\mathbf{A}_{m \times 1} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$ 称为列矩阵 (也称 m 维列向量).

(4) 实矩阵: 元素 a_{ij} 都是实数的矩阵, 记作 $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{m \times n}$.

(5) 复矩阵: 元素 a_{ij} 都是复数的矩阵, 记作 $\mathbf{A} \in \mathbf{C}^{m \times n}$.

(6) 零矩阵: 所有元素均为 0 的矩阵, 称为零矩阵, 记作 $\mathbf{O}$.

(7) 对角矩阵: 主对角线 (指方阵中从 a_{11} 连到 a_{nn} 的对角线) 以外之元素全为零的 n 阶方阵称为对角矩阵, 记作 $\mathbf{A} = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn})$, 其中 $a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn} = k$ (常数) 的对角矩阵称为数量矩阵, 记作 $\mathbf{K}$, 即

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k & & & 0 \\ & k & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & k \end{bmatrix}.$$

$k=1$ 的数量矩阵称为 n 阶单位矩阵, 记作 E_n , 即

$$E_n = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}.$$

(8) 三角形矩阵: 对角线的左下方之元素全为零的 n 阶矩阵称为上三角阵,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

主对角线的右上方之元素全为零的 n 阶矩阵称为下三角阵,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

二、矩阵运算

1. 矩阵相等

定义 2.1.2 设 $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{m \times n}$ 为 $m \times n$ 矩阵且对应元素相等, 即

$$a_{ij} = b_{ij} \quad (i=1, 2, \cdots, m; j=1, 2, \cdots, n),$$

则称矩阵 A 与 B 相等, 记作 $A=B$.

2. 矩阵加法

定义 2.1.3 设

$$A = (a_{ij})_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

$$B = (b_{ij})_{m \times n} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix},$$

是两个 $m \times n$ 矩阵, 则矩阵

$$\mathbf{C} = (c_{ij})_{m \times n} = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix},$$

称为矩阵 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 的和, 记为

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}.$$

例如, 设 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 5 & -3 & 0 \end{bmatrix}$, 则

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1+4 & 1+3 & 3+2 \\ 2+5 & 3+(-3) & -2+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 7 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

矩阵的加法就是矩阵对应的元素相加. 当然, 相加的矩阵必须要有相同的行数和列数. 由于矩阵的加法归结为它们的元素的加法, 也就是数的加法, 所以不难验证矩阵加法具有下列运算规律.

若 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{O}$ 为 $m \times n$ 矩阵, 则有

- (1) $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$ (结合律);
- (2) $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$ (交换律);
- (3) $\mathbf{A} + \mathbf{O} = \mathbf{A}$.

3. 数与矩阵的乘法

定义 2.1.4 一个数与矩阵相乘等于用这个数去乘矩阵的每一个元素, 即

$$\lambda \mathbf{A} = \mathbf{A} \lambda = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix}.$$

例如, 设 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$, 则

$$2\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 \times 2 & 2 \times 4 \\ 2 \times 3 & 2 \times 0 \\ 2 \times 5 & 2 \times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 6 & 0 \\ 10 & 2 \end{bmatrix}.$$

根据数与矩阵乘法的定义, 不难验证数与矩阵的乘法满足下列运算律.

设 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 为 $m \times n$ 矩阵, λ, μ 为常数, 则

- (1) $(\lambda\mu)\mathbf{A} = \lambda(\mu\mathbf{A})$;
- (2) $(\lambda + \mu)\mathbf{A} = \lambda\mathbf{A} + \mu\mathbf{A}$;
- (3) $\lambda(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \lambda\mathbf{A} + \lambda\mathbf{B}$;
- (4) $1\mathbf{A} = \mathbf{A}$.

当 $\lambda = -1$ 时, 矩阵

$$\begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \cdots & -a_{mn} \end{bmatrix}$$

称为矩阵 $\mathbf{A}$ 的负矩阵,记为 $-\mathbf{A}$,显然有

$$\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{O}.$$

由此矩阵的减法可定义为

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B}).$$

【例 2-1-1】 设

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

求 $2\mathbf{A} - \mathbf{B}$.

解

$$\begin{aligned} 2\mathbf{A} - \mathbf{B} &= 2 \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 6 & 0 & 4 \\ 2 & 6 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 7 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

【例 2-1-2】 设 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 7 & 5 & -2 & 4 \\ 5 & 1 & 9 & 7 \\ 4 & 2 & -2 & 6 \end{bmatrix}$, 已知 $\mathbf{A} + 2\mathbf{X} = \mathbf{B}$, 求 $\mathbf{X}$.

解 在等式中移项得 $2\mathbf{X} = \mathbf{B} - \mathbf{A}$, 再除以 2 得 $\mathbf{X} = \frac{1}{2}(\mathbf{B} - \mathbf{A})$, 所以

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -4 & -1 \end{bmatrix}.$$

4. 矩阵乘法

定义 2.1.5 设

$$\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}, \mathbf{B} = (b_{ij})_{n \times p},$$

那么矩阵

$$\mathbf{C} = (c_{ij})_{m \times p},$$

其中

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj},$$

称为矩阵 A 与 B 的乘积,记为

$$C_{m \times p} = A_{m \times n} B_{n \times p}.$$

由矩阵乘法的定义可以看出,矩阵 A 与 B 的乘积 C 的第 i 行第 j 列的元素等于第一个矩阵 A 的第 i 行的元素与第二个矩阵 B 的第 j 列的对应元素的乘积的和.因此,在矩阵乘积的定义中,我们要求第二个矩阵的行数与第一个矩阵的列数相等.这一事实可简记为

$$(m \times n)(n \times p) = m \times p.$$

【例 2-1-3】 设某企业生产三种产品 A, B, C 的成本用表 2-1-3 表示,三个季度的产量用表 2-1-4 表示.

表 2-1-3

产品(件) 成本(元)	A	B	C
原料	20	25	30
工资	4	6	8
其他	3	2	1

表 2-1-4

产品 季度	春季	夏季	秋季	冬季为
A	100	150	130	160
B	120	110	130	100
C	100	120	140	100

$$\text{采用矩阵可表示为 } P = \begin{bmatrix} 20 & 25 & 30 \\ 4 & 6 & 8 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 100 & 150 & 130 & 160 \\ 120 & 110 & 130 & 100 \\ 100 & 120 & 140 & 100 \end{bmatrix},$$

则矩阵 $PQ = \begin{bmatrix} 8000 & 9350 & 10050 & 8700 \\ 1920 & 2220 & 2420 & 2040 \\ 640 & 790 & 790 & 780 \end{bmatrix}$ 各列分别表示各季节三种产品的原料总费用、工资总费用以及其他总的费用.

$$\text{【例 2-1-4】 设 } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \text{求 } AB \text{ 和 } BA.$$

解

$$\begin{aligned} \mathbf{AB} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 6 & 7 \\ 10 & 2 & -6 \\ -2 & 17 & 10 \end{bmatrix}. \\ \mathbf{BA} &= \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 23 & 5 & 16 \\ -1 & 7 & 4 & 6 \\ 2 & -4 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & 6 & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

矩阵的乘法满足下列运算规律(假设运算都是可行的):

- (1) 乘法结合律: $(\mathbf{A}\mathbf{B})\mathbf{C}=\mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{C})$;
 (2) 左、右分配律: $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C}=\mathbf{A}\mathbf{C}+\mathbf{B}\mathbf{C}, \mathbf{C}(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\mathbf{C}\mathbf{A}+\mathbf{C}\mathbf{B}$;
 (3) 数乘结合律: $k(\mathbf{A}\mathbf{B})=(k\mathbf{A})\mathbf{B}=\mathbf{A}(k\mathbf{B})$.

这些运算律的证明,都可以利用乘法公式以及通过和式的乘积展开与重组来完成,此处从略.

【例 2-1-5】 设 $A = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$, 求 AB, BA, AC .

解 利用乘积的构成规则容易得到

$$\begin{aligned} \mathbf{AB} &= \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16 & -32 \\ 8 & 16 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{BA} &= \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{AC} &= \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16 & -32 \\ 8 & 16 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

从例 2-1-5 可以看到矩阵乘法具有以下重要特点.

- (1) 矩阵乘法不满足交换律,即一般情况下 $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$.
- (2) 矩阵乘法不满足消去律,即从 $\mathbf{A} \neq \mathbf{O}$ 和 $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$ 不能推得 $\mathbf{B} = \mathbf{C}$.
特别地,当 $\mathbf{BA} = \mathbf{O}$ 时,不能断定 $\mathbf{A} = \mathbf{O}$ 或者 $\mathbf{B} = \mathbf{O}$.
- (3) 对于单位矩阵 $\mathbf{E}$ 有 $\mathbf{A}_{m \times n} \mathbf{E}_n = \mathbf{A}_{m \times n}$, $\mathbf{E}_m \mathbf{A}_{m \times n} = \mathbf{A}_{m \times n}$.

定义 2.1.6 对于线性方程组

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{array} \right. \quad (2-1-1)$$

若记

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

则方程组可表示为

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}. \quad (2-1-2)$$

(2-1-2)式称为线性方程组(2-1-1)的矩阵形式,是以后表示线性方程组的主要形式.其中 $\mathbf{A}$ 称为线性方程组的系数矩阵, $\mathbf{x}$ 称为变量列, $\mathbf{b}$ 称为常数列.

【例 2-1-6】 设
$$\begin{cases} y_1 = b_{11}x_1 + \cdots + b_{1n}x_n, \\ y_2 = b_{21}x_1 + \cdots + b_{2n}x_n, \\ \cdots \cdots \cdots \\ y_n = b_{n1}x_1 + \cdots + b_{nn}x_n, \end{cases} \begin{cases} z_1 = a_{11}y_1 + \cdots + a_{1n}y_n, \\ z_2 = a_{21}y_1 + \cdots + a_{2n}y_n, \\ \cdots \cdots \cdots \\ z_n = a_{n1}y_1 + \cdots + a_{nn}y_n. \end{cases}$$

试用矩阵来表示 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 与 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的关系.

解 设

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}.$$

由矩阵乘法定义得: $\mathbf{Z} = \mathbf{AY}, \mathbf{Y} = \mathbf{BX}$.

代入消去 $\mathbf{Y}$ 得: $\mathbf{Z} = \mathbf{ABX}$.

定义 2.1.7 设 $\mathbf{A}$ 是 n 阶方阵, k 是正整数, k 个 $\mathbf{A}$ 的连乘积

$$\mathbf{A}^k = \underbrace{\mathbf{AA} \cdots \mathbf{A}}_{k \text{ 个 } \mathbf{A} \text{ 相乘}},$$

称为矩阵 $\mathbf{A}$ 的 k 次方幂.特别地, $\mathbf{A}^0 = \mathbf{E}$.

由于矩阵的乘法适合结合律,所以方阵的幂满足下列运算律:

设 k, l 为自然数,则

$$(1) \mathbf{A}^k \cdot \mathbf{A}^l = \mathbf{A}^{k+l};$$

$$(2) (\mathbf{A}^k)^l = \mathbf{A}^{kl}.$$

因为矩阵乘法一般不满足交换律,所以对两个 n 阶方阵 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$,在一般情况下 $(\mathbf{AB})^k \neq \mathbf{A}^k \mathbf{B}^k$.

定义 2.1.8 设 $f(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_{m-1} x + a_m$ 是 x 的一个多项式, $\mathbf{A}$ 为任意方阵,称 $f(\mathbf{A}) = a_0 \mathbf{A}^m + a_1 \mathbf{A}^{m-1} + \cdots + a_{m-1} \mathbf{A} + a_m \mathbf{E}$ 为矩阵 $\mathbf{A}$ 的多项式.

【例 2-1-7】 设 $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix}$, 求 $P(A) = 2A^2 - 3A + E$.

解

$$\begin{aligned} P(A) &= 2 \begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix} - 3A + E \\ &= 2 \begin{bmatrix} 8 & -4 & 5 \\ 0 & 9 & 0 \\ -5 & 6 & 3 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 & -14 & 13 \\ 0 & 10 & 0 \\ -13 & 0 & 13 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

【例 2-1-8】 设 A 是 n 阶方阵, E 是 n 阶单位阵.

(1) 展开矩阵多项式 $(A+E)^3$;

(2) 验证分解式 $A^m - E = (A - E)(A^{m-1} + A^{m-2} + \cdots + A + E)$.

解 (1) $(A+E)^3 = (A+E)^2(A+E) = (A^2 + 2A + E)(A+E)$

$$\begin{aligned} &= A^3 + 2A^2 + A + A^2 + 2A + E \\ &= A^3 + 3A^2 + 3A + E; \end{aligned}$$

(2) $(A-E)(A^{m-1} + A^{m-2} + \cdots + A + E)$

$$\begin{aligned} &= (A^m + A^{m-1} + \cdots + A^2 + A) - (A^{m-1} + A^{m-2} + \cdots + A + E) \\ &= A^m - E. \end{aligned}$$

三、矩阵的转置

定义 2.1.9 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$, 将其矩阵的行列互换得到的矩阵称为

矩阵 A 的转置矩阵, 记为 A^T 或 A' , 即

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

显然, $m \times n$ 矩阵的转置是 $n \times m$ 矩阵.

矩阵的转置适合以下的运算规律:

- (1) $(A^T)^T = A$;
- (2) $(A+B)^T = A^T + B^T$;
- (3) $(kA)^T = kA^T$ (k 是常数);
- (4) $(AB)^T = B^T A^T$.

【例 2-1-9】 设 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, 计算 AA^T 和 A^TA .

解

$$AA^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix},$$

$$A^TA = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

【例 2-1-10】 设 $B^T = B$, 证明 $(ABA^T)^T = ABA^T$.

证明 因为 $B^T = B$, 所以

$$(ABA^T)^T = [(AB)A^T]^T = (A^T)^T(AB)^T = AB^T A^T = ABA^T.$$

定义 2.1.10 当方阵 A 中的元素之间有关系为 $a_{ij} = a_{ji}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, 即 $A^T = A$ 时, 称矩阵 A 为对称矩阵.

例如 $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ 是对称矩阵.

当方阵 A 中的元素满足 $a_{ij} = -a_{ji}$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$), 即 $A^T = -A$ 时, 称矩阵 A 为反对称矩阵.

例如 $\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ 为反对称矩阵.

定义 2.1.11 设 A 为 n 阶方阵, 以 A 的元素按原有的次序构成的行列式成为矩阵 A 的行列式, 记作 $|A|$.

定理 2.1.1 设 A, B 是两个 n 阶方阵, 则

$$|AB| = |A| |B|,$$

即两个方阵的行列式等于这两个方阵的行列式的乘积.

证明从略.

由此可见, 对于 n 阶方阵 A, B 来说, 在一般情况下 $AB \neq BA$, 但 $|AB| = |BA|$ 总成立.

【例 2-1-11】 已知

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

求 $|AB|, |BA|$.

解

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 11 \\ 18 & 25 \end{bmatrix},$$

$$BA = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 16 \\ 15 & 22 \end{bmatrix},$$

所以

$$|\mathbf{AB}| = \begin{vmatrix} 8 & 11 \\ 18 & 25 \end{vmatrix} = 2.$$

或

$$|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = (-2) \cdot (-1) = 2,$$

$$|\mathbf{BA}| = \begin{vmatrix} 11 & 16 \\ 15 & 22 \end{vmatrix} = 2.$$



习题 2-1

1. 设 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, 求 $\mathbf{AB}$.

2. 设 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, 求 $3\mathbf{A} - \mathbf{B}$, $2\mathbf{A} + 3\mathbf{B}$.

3. 设 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, 求 $\mathbf{AB}$, $\mathbf{BA}$.

4. 设 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -4 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, 求 $\mathbf{A}^2 + \mathbf{B}^2$, $\mathbf{A}^T \mathbf{B}^T$, $\mathbf{A} - 2\mathbf{AB}$.

5. 设 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 求 $(\mathbf{AB})^T$.

6. 设 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$, 求 $\mathbf{A}(\mathbf{BC})$ 并验证 $\mathbf{A}(\mathbf{BC}) =$

$(\mathbf{AB})\mathbf{C}$.

7. 设 $\mathbf{A}$ 为 n 阶矩阵, k 为常数, 证明 $|k\mathbf{A}| = k^n |\mathbf{A}|$.

8. 设 $f(x) = x^2 - 5x + 3$, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$, 求 $f(\mathbf{A})$.

9. 设 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 为 n 阶矩阵, 证明等式 $\mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2 = (\mathbf{A} + \mathbf{B})(\mathbf{A} - \mathbf{B})$ 成立的充要条件为 $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$.

10. 设 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 为两 n 阶对称矩阵, 证明等式 $\mathbf{AB}$ 是对称矩阵的充要条件为 $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$.

第二节 矩阵的逆

在线性代数中,逆矩阵的提出使得矩阵的除法运算在一定程度上得以实现.就像在实数运算中,除法是乘法的逆运算,矩阵的逆矩阵也为矩阵的除法提供了类似的概念和工具,从而简化了复杂的矩阵运算和表达式.同时许多实际问题可以归结为求解线性方程组,通过矩阵的逆,可以简洁高效地求出线性方程组的解.在工程和科学领域,如控制系统、通信系统等,逆矩阵用于分析系统的稳定性、可控性和可观测性等重要特性.

逆矩阵的引入极大地丰富和便利了线性代数的理论和应用,为解决各种与矩阵相关的问题提供了有力的工具.

一、可逆矩阵的概念

在代数运算中,当数 $a \neq 0$ 时,有 $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$,其中 $a^{-1} = \frac{1}{a}$ 称为 a 的倒数,在矩阵的运算中,单位阵 E 相当于代数乘法运算中的 1,那么对于矩阵 A 如果存在一个矩阵 A^{-1} ,使得 $AA^{-1} = A^{-1}A = E$,则矩阵 A^{-1} 称为 A 的可逆矩阵.

定义 2.2.1 设 A 是 n 阶方阵,若有 n 阶方阵 B ,使得

$$AB = BA = E_n, \quad (2-2-1)$$

则称 A 是可逆的,且称 B 为 A 的逆矩阵,记为 A^{-1} .

例如:设 $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & -6 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, 因为 $AB = BA = E$, 所以 B 是 A 的逆

阵,即

$$A^{-1} = B = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & -6 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

首先我们指出,由于矩阵的乘法规则,只有方阵才能满足(2-2-1).其次,对于任意的矩阵 A ,适合等式(1)的矩阵 B 是唯一的(如果有的话),即若 A 是可逆矩阵,则 A 的逆矩阵是唯一的.这是因为若 B, C 都是 A 的逆矩阵,则有 $B = BE = B(AC) = (BA)C = EC = C$, 所以逆矩阵具有唯一性.

二、可逆矩阵的逆矩阵的求法

下面我们要解决两个问题.

(1) 满足什么条件的矩阵是可逆的?

(2) 如果 $\mathbf{A}$ 可逆, 如何求 $\mathbf{A}^{-1}$?

定义 2.2.2 设 $\mathbf{A}_{ij}$ 是矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

中元素 a_{ij} 的代数余子式, 则称矩阵

$$\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

为矩阵 $\mathbf{A}$ 的伴随矩阵.

定理 2.2.1 矩阵 $\mathbf{A}$ 可逆的充要条件是 $|\mathbf{A}| \neq 0$, 并且当 $\mathbf{A}$ 可逆时

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \mathbf{A}^*.$$

证明 因为 $\mathbf{A}\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} |\mathbf{A}| & & & \\ & |\mathbf{A}| & & \\ & & |\mathbf{A}| & \\ & & & |\mathbf{A}| \end{bmatrix}$$

$$= |\mathbf{A}| \mathbf{E}.$$

所以 $\mathbf{A}$ 可逆的充要条件是 $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$, 且 $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \mathbf{A}^*$.

根据定理 2.2.1 容易看出, 矩阵 $\mathbf{A}$ 是可逆方阵的充分必要条件是 $|\mathbf{A}| \neq 0$.

当 $|\mathbf{A}| = 0$ 时, $\mathbf{A}$ 称为奇异矩阵或降秩矩阵; 否则当 $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ 时, $\mathbf{A}$ 称为非奇异矩阵或满秩矩阵.

定理 2.2.1 不但给出了矩阵可逆的充要条件, 同时也给出了求逆矩阵的方法. 但是按这个公式求逆矩阵计算量一般是非常大的, 在下一节我们将给出另一种更加便捷的求解方法.

【例 2-2-1】 求方阵 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ 的逆矩阵.

解 因为 $|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$, 所以 $\mathbf{A}^{-1}$ 存在.

又 $A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -2, A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$, 同理可得

$A_{13} = 2, A_{21} = 6, A_{22} = -6, A_{23} = 2, A_{31} = -2, A_{32} = 4, A_{33} = -2$, 故

$$\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -2 \\ 0 & -6 & 4 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix},$$

所以

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \mathbf{A}^* = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -2 & 6 & -2 \\ 0 & -6 & 4 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & -3/2 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

【例 2-2-2】 x, y, z 满足什么条件时下列矩阵 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 可逆?

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & x \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & y \\ 4 & 2 & z \end{bmatrix}.$$

解 (1) $|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & x \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & x-6 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & x-6 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = x-6$.

当 $x \neq 6$ 时, $|\mathbf{A}| \neq 0$, $\mathbf{A}$ 可逆.

(2) $|\mathbf{B}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & y \\ 4 & 2 & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & y-6 \\ 0 & 0 & z-2y \end{vmatrix} = -3(z-2y)$, 故当 $z \neq 2y$ 时, $\mathbf{B}$ 可逆.

三、逆矩阵的性质

(1) 若 $\mathbf{A}$ 可逆, 则 $\mathbf{A}^{-1}$ 也可逆, 且 $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$.

根据定义 2.2.1 只需做一个乘法: 因为 $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}$, 故得证.

(2) 若 $\mathbf{A}$ 可逆, 则 $\mathbf{A}^T$ 也可逆, 且 $(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T$.

证明 因为 $\mathbf{A}^T (\mathbf{A}^{-1})^T = (\mathbf{A}^{-1} \mathbf{A})^T = \mathbf{E}^T = \mathbf{E}$, 故得证.

(3) 若 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 是同阶方阵且都可逆, 则 $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^{-1}$.

证明 因为 $(\mathbf{AB})(\mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^{-1}) = \mathbf{A}(\mathbf{BB}^{-1})\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{AEA}^{-1} = \mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{E}$, 故得证.

(4) 若 $\mathbf{A}$ 可逆, 数 $\lambda \neq 0$, 则 $\lambda \mathbf{A}$ 可逆, 且 $(\lambda \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{\lambda} \mathbf{A}^{-1}$.

根据定理 2.2.1 结论显然.

(5) 若 $\mathbf{A}$ 可逆, 则 $|\mathbf{A}^{-1}| = \frac{1}{|\mathbf{A}|}$.

证明 因为 $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{E}$, 所以 $|\mathbf{A}||\mathbf{A}^{-1}|=1$, 所以 $|\mathbf{A}^{-1}|=\frac{1}{|\mathbf{A}|}$.

借助逆矩阵我们还可以更加快捷地解决一些矩阵方程问题, 例如:

【例 2-2-3】 解矩阵方程 (1) $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}\mathbf{X}=\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$;

$$(2) \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{X}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

解 (1) 给方程两端左乘矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}^{-1}$,

$$\begin{aligned} \text{得 } & \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}\mathbf{X}=\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \mathbf{X} & =\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -9 & -4 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(2) 给方程两端左乘矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$, 右乘矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$,

$$\text{得 } \mathbf{X}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} -9 & -52 & 21 \\ 5 & 29 & -12 \\ 11 & 60 & -21 \end{bmatrix}.$$

【例 2-2-4】 若三阶矩阵 $\mathbf{A}$ 的伴随矩阵为 $\mathbf{A}^*$, 已知 $|\mathbf{A}|=\frac{1}{2}$, 求行列式 $|(2\mathbf{A})^{-1}-2\mathbf{A}^*|$ 的值.

解 因为 $|\mathbf{A}|=\frac{1}{2}\neq 0$, 所以 $\mathbf{A}$ 可逆, $\mathbf{A}^*=|\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{2}\mathbf{A}^{-1}$,

$$\begin{aligned} \text{所以 } |(2\mathbf{A})^{-1}-2\mathbf{A}^*| & =\left|\frac{1}{2}\mathbf{A}^{-1}-2\cdot\frac{1}{2}\mathbf{A}^{-1}\right|=\left|-\frac{1}{2}\mathbf{A}^{-1}\right| \\ & =\left(-\frac{1}{2}\right)^3|\mathbf{A}^{-1}|=-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{|\mathbf{A}|}=-\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

【例 2-2-5】 设方阵满足方程 $\mathbf{A}^2-2\mathbf{A}-10\mathbf{E}=\mathbf{0}$, 证明: $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{A}-4\mathbf{E}$ 都可逆, 并求出它们的逆矩阵.

证明 因为 $\mathbf{A}(\mathbf{A}-2\mathbf{E})=10\mathbf{E}$, 所以 $\mathbf{A}\frac{\mathbf{A}-2\mathbf{E}}{10}=\mathbf{E}$,

所以 $\mathbf{A}$ 可逆, 且 $\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{10}(\mathbf{A}-2\mathbf{E})$.

又因为 $(\mathbf{A}-4\mathbf{E})(\mathbf{A}+2\mathbf{E})=2\mathbf{E}$,

所以 $(\mathbf{A}-4\mathbf{E})\frac{\mathbf{A}+2\mathbf{E}}{2}=\mathbf{E}$, 所以 $\mathbf{A}-4\mathbf{E}$ 可逆, 且 $(\mathbf{A}-4\mathbf{E})^{-1}=\frac{1}{2}(\mathbf{A}+2\mathbf{E})$.

定义 2.2.3 设 $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ 为两个 n 维向量, 则称

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n, \\ \dots\dots\dots \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{cases} \quad (2-2-1)$$

为 $\mathbf{X}$ 到 $\mathbf{Y}$ 的一个线性变换, 其中 n 阶方阵 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ 称为它的系数矩阵.

该线性变换可简记为 $\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{X}$.

此时若 $|\mathbf{A}| \neq 0$, 则由上式可解出

$$\begin{cases} x_1 = b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + \cdots + b_{1n}y_n, \\ x_2 = b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + \cdots + b_{2n}y_n, \\ \dots\dots\dots \\ x_n = b_{n1}y_1 + b_{n2}y_2 + \cdots + b_{nn}y_n, \end{cases} \quad (2-2-2)$$

其中 $b_{ij} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} A_{ji}$, 并且这个表示式是唯一的. 此时线性变换 (2-2-2) 称为线性变换 (2-2-1) 式的逆变换. 若把 (2-2-2) 式的系数矩阵记为 $\mathbf{B}$, 则 $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$, 此时 (2-2-2) 式也可写成 $\mathbf{X} = \mathbf{B}\mathbf{Y} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{Y}$.

【例 2-2-6】 利用逆矩阵解方程组
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 3. \end{cases}$$

解 方程组可写为 $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{b}$, 故 $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3/2 & -3 & 5/2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.



习题 2-2

1. 填空题

(1) 设 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 则 $(\mathbf{A} + 3\mathbf{E})^{-1}(\mathbf{A}^2 - 9\mathbf{E}) = \underline{\hspace{2cm}}$.

(2) 设 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$, 则 $(\mathbf{A}^*)^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}$, $[(\mathbf{A}^*)^T]^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}$.

$$|3\mathbf{A}^{-1} - 2\mathbf{A}^*| = \underline{\hspace{2cm}}.$$

2. 选择题

设 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 为 n 阶方阵, 满足等式 $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$, 则必有().

- A. $\boldsymbol{A}=\mathbf{0}$ 或 $\boldsymbol{B}=\mathbf{0}$
C. $|\boldsymbol{A}|=0$ 或 $|\boldsymbol{B}|=0$
- B. $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\mathbf{0}$
D. $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=0$

(2) 已知 A, B 为 n 阶可逆阵, 则必有().

- A. $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^2 = \mathbf{A}^2 + 2\mathbf{AB} + \mathbf{B}^2$
 B. $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{A}^T \mathbf{B}^T$
 C. $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}^{-1}$
 D. $(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T$

(3) 下列命题正确的是().

- A. 若 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 是同阶可逆矩阵, 则 $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ 必可逆
B. 若 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 是同阶不可逆矩阵, 则 $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ 必可逆
C. 若 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 是同阶不可逆矩阵, 则 $\mathbf{AB}$ 必可逆
D. 若 $\mathbf{AB} = \mathbf{E}$, 则 $\mathbf{A}$ 必可逆

3. 若 $\mathbf{A}$ 满足 $\mathbf{A}^2 - 3\mathbf{A} - 2\mathbf{E} = \mathbf{0}$, 证明 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{A} - 4\mathbf{E}$ 可逆, 并求它们的逆矩阵.

4. 求下列矩阵的逆矩阵:

$$(1) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}; \quad (2) \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 5 & -4 & 1 \end{bmatrix}; \quad (3) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

5. 利用可逆矩阵性质求解线性方程组
$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1, \\ x_1 - x_2 = 6, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

6. 求线性变换 $\begin{cases} x_1 = 2y_1 + y_2 - y_3, \\ x_2 = 2y_1 + y_2 + 2y_3, \\ x_3 = y_1 - y_2 + y_3 \end{cases}$ 的逆变换.

7. 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, 求矩阵 X 使满足 $AXB = C$.

8. 设 A, B 都可逆, 证明 $(AB)^* = A^* B^*$.

9. 设 $\mathbf{A}$ 可逆, 证明 $(\mathbf{A}^*)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^*$.

10. 设 $AB=BA$ 且 A 可逆, 证明 $A^{-1}B=BA^{-1}$.

11. 设方阵 B 为幂等矩阵, (即 $B^2=B$, 从而对正整数 $k, B^k=B$) 且 $A=B+E$.

证明: $\mathbf{A}$ 是可逆矩阵, 且 $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{2}(3\mathbf{E} - \mathbf{A})$.

第三节 分块矩阵

一、分块矩阵的概念

对于行数和列数较高的矩阵,为了简化运算,经常采用分块法使大矩阵的运算转化成若干小矩阵间的运算,同时也使原矩阵的结构显得简单而清晰,有助于更直观地理解 and 处理大规模矩阵,便于分析和证明一些与矩阵相关的定理和性质.

具体做法是将大矩阵用若干条纵线和横线分成多个小矩阵.每个小矩阵称为 $\mathbf{A}$ 的子块,以子块为元素的形式上的矩阵称为分块矩阵.

定义 2.3.1 把一个 $m \times n$ 矩阵 $\mathbf{A}$,在行的方向分成 s 块,在列的方向分成 t 块,称为 $\mathbf{A}$ 的 $s \times t$ 分块矩阵,记作 $\mathbf{A} = [\mathbf{A}_{k \times l}]_{s \times t}$,其中 $\mathbf{A}_{k \times l}$ ($k=1,2,\cdots,s; l=1,2,\cdots,t$),称为 $\mathbf{A}$ 的子块,它们是各种类型的小矩阵.

$$\text{例如设 } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & | & 0 \\ 2 & 5 & 0 & | & -2 \\ \hline 3 & 1 & -1 & | & 3 \end{bmatrix}, \text{ 则 } \mathbf{A} \text{ 就是一个分块矩阵.}$$

若记

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{11} &= \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{A}_{21} &= [3, 1, -1], \mathbf{A}_{22} = [3]. \end{aligned}$$

则 $\mathbf{A}$ 可表示为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}.$$

这是一个分成了 4 块的分块矩阵.

需要指出的是矩阵的分块有多种方式,可根据具体需要而定.

$$\text{例如对矩阵 } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ 进行分块后可得分块矩阵 } \begin{bmatrix} \mathbf{E}_2 & \mathbf{O} \\ \mathbf{A}_1 & \mathbf{E}_2 \end{bmatrix},$$

其中 $\mathbf{E}_2$ 表示二阶单位矩阵,而

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

对矩阵 $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ 进行分块后可得分块矩阵 $\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$, 其中,

$$B_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, B_{12} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, B_{22} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

若对 A, B 直接利用矩阵乘法公式有 $AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$.

若在计算 AB 时, 把 A, B 都看成是由这些小矩阵组成的, 即按分块矩阵来运算则有

$$AB = \begin{bmatrix} E_2 & O \\ A_1 & E_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ A_1 B_{11} + B_{21} & A_1 B_{12} + B_{22} \end{bmatrix},$$

其中

$$\begin{aligned} A_1 B_{11} + B_{21} &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \\ A_1 B_{12} + B_{22} &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

总之经过两种不同的计算过程

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}.$$

即结果是一样的, 并且采用分块矩阵的方法相对简单.

二、分块矩阵的运算

分块矩阵的运算与普通矩阵的运算规则相似. 分块时要注意, 运算的两矩阵按块能运算, 并且参与运算的子块也能运算, 即内外都能运算.

1. 分块矩阵的加法运算

设矩阵 A 与 B 都是 $m \times n$ 阶矩阵, 采用相同的分块法分成 $s \times t$ 块.

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{st} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{s1} & \cdots & B_{st} \end{bmatrix},$$

其中 $\mathbf{A}_{ij}$ 与 $\mathbf{B}_{ij}$ 的行数相同、列数相同, 则

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} + \mathbf{B}_{11} & \cdots & \mathbf{A}_{1t} + \mathbf{B}_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{A}_{s1} + \mathbf{B}_{s1} & \cdots & \mathbf{A}_{st} + \mathbf{B}_{st} \end{bmatrix}.$$

这表明分块矩阵的加法是对应的小矩阵相加.

2. 分块矩阵的数乘运算

$$\text{设 } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \cdots & \mathbf{A}_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{A}_{s1} & \cdots & \mathbf{A}_{st} \end{bmatrix}, k \text{ 为数, 则 } k\mathbf{A} = \begin{bmatrix} k\mathbf{A}_{11} & \cdots & k\mathbf{A}_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ k\mathbf{A}_{s1} & \cdots & k\mathbf{A}_{st} \end{bmatrix}.$$

3. 分块矩阵的乘法运算

设 $\mathbf{A}$ 为 $m \times l$ 矩阵, $\mathbf{B}$ 为 $l \times n$ 矩阵, 分块成

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \cdots & \mathbf{A}_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{A}_{s1} & \cdots & \mathbf{A}_{st} \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} & \cdots & \mathbf{B}_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{B}_{t1} & \cdots & \mathbf{B}_{tr} \end{bmatrix}.$$

若对所有的 $p=1, 2, \cdots, s; q=1, 2, \cdots, r, \mathbf{A}_{p1}, \mathbf{A}_{p2}, \cdots, \mathbf{A}_{pt}$ 的列数分别等于 $\mathbf{B}_{1q}, \mathbf{B}_{2q}, \cdots, \mathbf{B}_{tq}$ 的行数, 则

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11} & \cdots & \mathbf{C}_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{C}_{s1} & \cdots & \mathbf{C}_{sr} \end{bmatrix},$$

其中 $\mathbf{C}_{pq} = \sum_{k=1}^t \mathbf{A}_{pk} \mathbf{B}_{kq} \quad (p=1, 2, \cdots, s; q=1, 2, \cdots, r).$

4. 分块矩阵的转置

$$\text{设 } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \cdots & \mathbf{A}_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{A}_{s1} & \cdots & \mathbf{A}_{st} \end{bmatrix}, \text{ 则 } \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}^T & \cdots & \mathbf{A}_{s1}^T \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{A}_{1t}^T & \cdots & \mathbf{A}_{st}^T \end{bmatrix}.$$

5. 分块对角阵的逆运算

设 $\mathbf{A}$ 为 n 阶矩阵, 若 $\mathbf{A}$ 的分块矩阵只有在对角线上有非零子块, 其余子块都为零矩阵, 且在对角线上的子块都是方阵, 即

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & & & \mathbf{O} \\ & \mathbf{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{O} & & & \mathbf{A}_s \end{bmatrix},$$

其中 $\mathbf{A}_i (i=1, 2, \cdots, s)$ 都是方阵, 则称 $\mathbf{A}$ 为分块对角矩阵.

分块对角矩阵具有以下性质:

(1) 若 $|\mathbf{A}_i| \neq 0 (i=1, 2, \dots, s)$, 则 $|\mathbf{A}| \neq 0$, 且 $|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}_1| |\mathbf{A}_2| \cdots |\mathbf{A}_s|$;

$$(2) \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^{-1} & & & \mathbf{O} \\ & \mathbf{A}_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{O} & & & \mathbf{A}_s^{-1} \end{bmatrix}.$$

例如设 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 则 $\mathbf{A}$ 是一个分块矩阵,

若记

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_3 = [1],$$

则 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_3 \end{bmatrix}$ 为分块对角阵, 且 $|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}_1| \cdot |\mathbf{A}_2| \cdot |\mathbf{A}_3| = 2$;

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_3^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

6. 分块三角形矩阵

形如

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \cdots & \mathbf{A}_{1s} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} & \cdots & \mathbf{A}_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{A}_{ss} \end{bmatrix} \text{ 或 } \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{A}_{s1} & \mathbf{A}_{s2} & \cdots & \mathbf{A}_{ss} \end{bmatrix}$$

的分块矩阵, 分别称为上三角分块矩阵或下三角分块矩阵, 其中 $\mathbf{A}_{pp} (p=1, 2, \dots, s)$ 是方阵. 若 $\mathbf{A}$ 为上三角分块矩阵或下三角分块矩阵, 则

$$|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}_1| |\mathbf{A}_2| \cdots |\mathbf{A}_s|.$$

【例 2-3-1】 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, 求 $\mathbf{A}^{-1}$.

解 因为 $[2]^{-1} = \left[\frac{1}{2} \right]$, $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$,

$$\text{所以 } \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

【例 2-3-2】 $\mathbf{A}$ 为 3 阶方阵, $|\mathbf{A}| = \frac{1}{3}$, $\mathbf{B} = 3 \begin{bmatrix} (3\mathbf{A})^{-1} - 2\mathbf{A}^* & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A} \end{bmatrix}$, 求 $|\mathbf{B}|$.

$$\begin{aligned} \text{解 } |\mathbf{B}| &= 3^6 |(3\mathbf{A})^{-1} - 2\mathbf{A}^*| |\mathbf{A}| \\ &= 3^6 |((3\mathbf{A})^{-1} - 2\mathbf{A}^*)\mathbf{A}| = 3^6 \left| \frac{1}{3}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} - 2\mathbf{A}^*\mathbf{A} \right| \\ &= 3^6 \left| \frac{1}{3}\mathbf{E} - 2 \times \frac{1}{3}\mathbf{E} \right| = 3^6 \left| -\frac{1}{3}\mathbf{E} \right| = 3^6 \times (-3)^3 = -27. \end{aligned}$$

【例 2-3-3】 分块矩阵 $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{C} & \mathbf{B} \end{bmatrix}$, $\mathbf{A}$ 为 s 级方阵, $\mathbf{B}$ 为 t 级方阵.

证明 $\mathbf{D}$ 可逆 $\Leftrightarrow \mathbf{A}, \mathbf{B}$ 可逆且 $\mathbf{D}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} & \mathbf{O} \\ -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1} & \mathbf{B}^{-1} \end{bmatrix}$.

证明 因为 $|\mathbf{D}| = \begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{C} & \mathbf{B} \end{vmatrix} = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}|$,

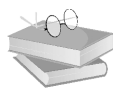
所以, $\mathbf{D}$ 可逆 $\Leftrightarrow |\mathbf{A}| \neq 0, |\mathbf{B}| \neq 0 \Leftrightarrow \mathbf{A}, \mathbf{B}$ 可逆.

$$\text{设 } \mathbf{D}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{11} & \mathbf{X}_{12} \\ \mathbf{X}_{21} & \mathbf{X}_{22} \end{bmatrix}, \text{ 则 } \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{C} & \mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{11} & \mathbf{X}_{12} \\ \mathbf{X}_{21} & \mathbf{X}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_s & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{E}_t \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathbf{A}\mathbf{X}_{11} = \mathbf{E}_s & \xrightarrow{|\mathbf{A}| \neq 0} \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{X}_{11} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{E} \Rightarrow \mathbf{X}_{11} = \mathbf{A}^{-1} \\ \mathbf{A}\mathbf{X}_{12} = \mathbf{O} & \Rightarrow \mathbf{X}_{12} = \mathbf{O} \\ \mathbf{C}\mathbf{X}_{11} + \mathbf{B}\mathbf{X}_{21} = \mathbf{O} & \Rightarrow \mathbf{X}_{21} = -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1} \\ \mathbf{C}\mathbf{X}_{12} + \mathbf{B}\mathbf{X}_{22} = \mathbf{E} & \Rightarrow \mathbf{X}_{22} = \mathbf{B}^{-1} \end{cases}$$

$$\text{所以 } \mathbf{D}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} & \mathbf{O} \\ -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1} & \mathbf{B}^{-1} \end{bmatrix}.$$

特别地, 当 $\mathbf{C} = \mathbf{O}$ 时, 有 $\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{B} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{B}^{-1} \end{bmatrix}$.



习题 2-3

$$1. \text{ 设 } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \text{ 利用分块矩阵求 } \mathbf{AB}.$$

$$2. \text{ 设 } A = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & 1 & b \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b \end{bmatrix}, \text{ 求 } A+B, ABA.$$

3. 设求下列矩阵的逆矩阵:

$$(1) A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}; \quad (2) A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$4. \text{ 设 } A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \text{ 求 } A^{2k} (k \in \mathbf{N}).$$

$$5. \text{ 设 } A = \begin{bmatrix} B & D \\ 0 & C \end{bmatrix}, \text{ 其中 } B \text{ 和 } C \text{ 都是可逆方阵, 证明 } A \text{ 可逆, 并求 } A^{-1}.$$

6. 证明可逆上三角形矩阵的逆矩阵仍为上三角形矩阵.

第四节 初等变换与初等矩阵

在利用第二节定理 2.2.1 求逆矩阵时, 要进行大量行列式计算, 计算量大, 本节给出了一种求逆矩阵比较简单的计算方法, 即初等变换法, 这一方法特别适合求高阶矩阵的逆矩阵. 初等变换是矩阵的一种非常重要的运算, 为解线性方程组、矩阵求逆、求矩阵的秩等问题提供了简洁高效的方法, 是线性代数中不可或缺的重要概念和工具.

一、矩阵的初等变换与初等矩阵

定义 2.4.1 以下三种变换称为矩阵的初等行变换:

- (1) 换法变换: 互换矩阵的某两行 ($r_i \leftrightarrow r_j$);
- (2) 倍缩变换: 用非零数 k 乘矩阵的某行 (kr_i);
- (3) 消去变换: 将矩阵的某行的 k 倍加到另一行 ($kr_i + r_j$).

把定义中的行换成列, 即得矩阵的初等列变换的定义, 我们把矩阵的初等行变换和初等列变换, 统称为矩阵的初等变换.

例如对下列矩阵作初等行变换: 先将第 3 行乘 -2 加到第 1 行, 再将第 1、3 行互换, 得到

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 & -9 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -9 \end{bmatrix}.$$

由于矩阵的初等变换改变了矩阵的元素, 因此初等变换前后的矩阵是不相等的, 应该用“ $\rightarrow$ ”连接而不可用“ $=$ ”连接. 矩阵的初等变换可以链锁式地反复进行, 以便达到简化矩

阵的目的.

初等变换是线性代数的基本运算,在解决线性代数各种问题中起着重要的作用.

定义 2.4.2 单位矩阵 $\mathbf{I}$ 经过一次初等变换得到的矩阵称为初等矩阵,主要有以下几类.

1. 对调 $\mathbf{E}$ 中第 i, j 两行,得初等换行矩阵 $\mathbf{E}(i, j)$.

$$\mathbf{E}(i, j) = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 0 & \cdots & \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} & \\ & & & & 1 & & \\ & & \vdots & & \ddots & \vdots & \\ & & & & & 1 & \\ & & & 1 & \cdots & \leftarrow \text{第 } j \text{ 行} & \\ & & & & & & 1 \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

或对调 $\mathbf{E}$ 中第 i, j 两列,得初等换列矩阵 $\mathbf{E}(i, j)$.

2. 以数 $k \neq 0$ 乘单位矩阵 $\mathbf{E}$ 的第 i 行,得初等倍缩矩阵 $\mathbf{E}(k(i))$.

$$\mathbf{E}(k(i)) = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 0 & & & \\ & & & & k & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \leftarrow \text{第 } i \text{ 行}$$

或以数 $k \neq 0$ 乘单位矩阵 $\mathbf{E}$ 的第 i 列,得初等倍缩矩阵 $\mathbf{E}(k(i))$.

3. 以 k 乘单位矩阵 $\mathbf{E}$ 的第 i 行加到第 j 行上,得初等消去矩阵 $\mathbf{E}(k(i)+j)$.

$$\mathbf{E}(k(i)+j) = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & k & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \leftarrow \text{第 } j \text{ 行} \end{matrix}$$

或以 k 乘 E 的第 j 列加到第 i 列上得初等消去矩阵 $E(k(i)+j)$.

4. 以常数 k 乘单位矩阵 E 的第 i 列加到第 j 列上, 得初等消去矩阵 $T(k(i)+j)$.

$$T(k(i)+j) = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & k & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & \uparrow & & \uparrow & & 1 \end{bmatrix}$$

第 i 列 第 j 列

不难证明初等矩阵有以下性质: (1) 初等矩阵是满秩矩阵, 且

$$|E(i, j)| = |T(i, j)| = -1, |E(k(i))| = |T(k(i))| = k, |E(k(i)+j)| = |T(k(i)+j)| = 1.$$

(2) 初等矩阵的逆秩矩阵仍是初等矩阵, 且

$$\begin{aligned} (E(i, j))^{-1} &= E(i, j), (E(k(i)))^{-1} = E\left(\frac{1}{k}(i)\right), \\ (E(k(i)+j))^{-1} &= E(-k(i)+j), (T(k(i)+j))^{-1} = T(-k(i)+j). \end{aligned}$$

(3) 初等矩阵的转置矩阵仍是初等矩阵, 且

$$\begin{aligned} (E(i, j))^T &= E(i, j), (E(k(i)))^T = E(k(i)), \\ (E(k(i)+j))^{-1} &= T(k(i)+j). \end{aligned}$$

利用矩阵乘法运算还可以得到如下结论.

定理 2.4.1 对 $m \times n$ 阶矩阵 A 施行一次初等行变换, 相当于用相应的 n 阶初等矩阵左乘矩阵 A ; 对矩阵 A 施行一次初等列变换, 相当于用相应的 n 阶初等矩阵右乘矩阵 A .

定理中的“相应的”的含义具体来说是:

- (1) $E(i, j)A$ 相当于 A 的第 i 行与第 j 行互换;
- (2) $AT(i, j)$ 相当于 A 的第 i 列与第 j 列互换;
- (3) $E(k(i))A$ 相当于 A 的第 i 行乘以 k ;
- (4) $AT(k(i))$ 相当于 A 的第 i 列乘以 k ;
- (5) $E(k(i)+j)A$ 相当于 A 的第 i 行乘 k 加到 A 的第 j 行上;
- (6) $AT(k(i)+j)$ 相当于 A 的第 i 列乘 k 加到 A 的第 j 列上.

该定理说明了初等矩阵与初等变换的关系, 它表明对矩阵施行一次初等变换相当于用相应的初等矩阵去左(右)乘矩阵.

二、矩阵的标准形

定义 2.4.3 若对矩阵 A 实行有限次初等变换变成矩阵 B , 则称矩阵 A 与 B 等价, 记作 $A \sim B$.

容易验证矩阵等价具有下列性质.

- (1) 反身性 —— $A \sim A$;
- (2) 对称性 —— $A \sim B \Rightarrow B \sim A$;
- (3) 传递性 —— $A \sim B, B \sim C \Rightarrow A \sim C$.

由定理 2.4.1 两个 $m \times n$ 矩阵 A 与 B 等价的充分必要条件是存在有限个 m 阶 R 类初等矩阵(设为 $R_1, R_2, \dots, R_m$)和有限个 n 阶 C 类初等矩阵使得等式

$$R_m \cdots R_2 R_1 A C_1 C_2 \cdots C_n = B$$

成立.

利用矩阵的初等变换可以将一个矩阵化简.

例如:

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} 3 & 6 & -9 & 6 & 9 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & -6 & 4 & 6 \\ 8 & -12 & 4 & -4 & 36 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{(1/3)r_1 \\ (1/2)r_3 \\ (1/4)r_4}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 & -1 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \\
 &\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 & -1 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-1)r_2 + r_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & -1 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{(-1)r_1 + r_2 \\ (-2)r_1 + r_4}} \\
 &\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & -3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{5r_2 + r_4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 \leftrightarrow r_4} \\
 &\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B.
 \end{aligned}$$

对矩阵 B 进一步施行初等行变换可进一步简化为

$$\begin{aligned}
 B &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{(-1)r_2 + r_1 \\ (1/2)r_3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-1)r_3 + r_2} \\
 &\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = C.
 \end{aligned}$$

这里的矩阵 B 和 C 都称为行阶梯形矩阵.

行阶梯形矩阵具有以下两个特点.

- (1) 零行在矩阵下方, 非零行在矩阵上方;
- (2) 非零行从左往右的第一个非零元素的列表严格单增.

行阶梯形矩阵 C 还成为行最简矩阵, 其特点是非零行的第一个非零元素为 1 且其所在列的其他元素都为 0.

定理 2.4.2 任意一个 $s \times n$ 矩阵 A 都与一形式为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

的矩阵等价, 它称为矩阵 A 的标准形.

证明 若 $A = \mathbf{O}$, 则结论成立 (因 A 已是标准形).

假若 $A \neq \mathbf{O}$, 设 $a_{ij} \neq 0$, 将第 i 行和第一行互换, 第 j 列和第一列互换, 使不为 0 的元素换到左上角的位置, 因此不妨设 $a_{11} \neq 0$, 利用 $a_{11} \neq 0$, 通过初等变换先把第一行和第一列的其他元素都化为 0, 再把 a_{11} 化为 1, 即

$$A \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & A_1 \end{bmatrix},$$

其中 A_1 为 $(m-1) \times (n-1)$ 矩阵, 对 A_1 重复上述过程, 最终得到

$$A \rightarrow \begin{bmatrix} E_r & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{bmatrix}.$$

【例 2-4-1】 用初等变换求 $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & -3 & -7 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 3 & -2 & 8 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 7 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ 的标准形.

解 先做初等行变换把 A 化为阶梯形矩阵:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & -3 & -7 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 3 & -2 & 8 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 7 & 4 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 2 & 3 & 1 & -3 & -7 \\ 3 & -2 & 8 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 7 & 4 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} r_2 - 2r_1 \\ r_3 - 3r_1 \\ r_4 - 2r_1 \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & 8 & 9 & 12 \\ 0 & -7 & 7 & 8 & 11 \end{bmatrix} \\ & \xrightarrow{\begin{matrix} r_3 - 8r_2 \\ r_4 - 7r_2 \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_4 - r_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

再做初等列变换得到 A 的标准形矩阵.

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{c_2 - 2c_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{c_4 + 2c_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
& \xrightarrow{c_5 + 4c_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} c_3 + c_2 \\ c_4 + c_2 \\ c_5 + c_2 \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{-c_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{c_5 - 4c_4} \\
& \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{c_4 \leftrightarrow c_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

推论 2.4.1 对任意矩阵 $A = (a_{ij})_{m \times n}$, 存在 m 阶可逆阵 P 和 n 阶可逆阵 Q , 使得

$$PAQ = \begin{bmatrix} E_r & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{bmatrix}.$$

推论 2.4.2 n 阶方阵 A 可逆的充分必要条件是 A 与 n 阶单位阵 E 等价.

推论 2.4.3 方阵 A 可逆的充要条件是 A 可以分解成有限个 n 阶初等矩阵的乘积.

【例 2-4-2】 将矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ 表示成有限个初等方阵的乘积.

解 利用初等变换

$$\begin{aligned}
A &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2r_1 + r_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-r_3} \\
& \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E.
\end{aligned}$$

即 A 经过四次初等变换得到单位矩阵 E , 而这 4 次初等变换所对应的初等方阵为:

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, P_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, P_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

故 $P_4 P_3 P_2 P_1 A = E$, 所以

$$A = P_1^{-1} P_2^{-1} P_3^{-1} P_4^{-1} = P_1^{-1} P_2^{-1} P_3^{-1} P_4^{-1},$$

其中

$$P_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, P_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, P_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, P_4^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ 为初等矩阵.}$$

根据定理 2.4.2 和推论我们知道,当 n 阶方阵 A 可逆时,一定存在 n 阶可逆矩阵 B ,使 $BA=E$ 且 $A^{-1}=B$.

设

$$B=R_k \cdots R_2 R_1, \text{ 则 } R_k \cdots R_2 R_1 A=E,$$

$$A^{-1}=R_k R_{k-1} \cdots R_2 R_1=R_k R_{k-1} \cdots R_2 R_1 E.$$

从以上两式我们发现以下两个性质.

(1) 若矩阵 A 可逆,则 A 一定可以仅仅通过一系列初等行变换化为单位矩阵 E .

(2) 若 A 经一系列初等行变换化为单位矩阵 E ,那么这一系列初等行变化必将同时把单位阵 E 化为 A^{-1} .

$$\text{即 } [A|E]_{n \times 2n} \xrightarrow{\text{做一系列初等行变换}} [E|A^{-1}],$$

$$\text{同理 } \begin{bmatrix} A \\ \vdots \\ E \end{bmatrix}_{2n \times n} \xrightarrow{\text{做一系列初等列变换}} \begin{bmatrix} E \\ \vdots \\ A^{-1} \end{bmatrix}.$$

由此我们得到利用初等变换求逆矩阵的新方法,特别是当矩阵的阶数较高时,该方法求逆矩阵更为方便.

【例 2-4-3】 试利用矩阵的初等变换,求方阵 $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ 的逆矩阵.

$$\begin{aligned} \text{解 } [A|E] &= \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \\ &\begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ &\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{6} & \frac{2}{3} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \\ \text{所以 } A^{-1} &= \begin{bmatrix} \frac{7}{6} & \frac{2}{3} & -\frac{3}{2} \\ -1 & -1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

【例 2-4-4】 设 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, 试判断 A 是否可逆,若可逆求 A^{-1} .

$$\begin{aligned} \text{解 } (A|E) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_1 \leftrightarrow r_2]{r_3 - r_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow[r_3 + 2r_2]{r_1 - r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

从而知 A 不可逆.

判断矩阵 A 是否可逆,可直接对 $(A|E)$ 做初等行变换,若变换过程中,与 A 等价的矩阵中有一行为 0,就能判断 A 不与 E 等价,从而知 A 不可逆.

由于 $A^{-1}[A|B] = [E|A^{-1}B]$,所以可以用初等行变换求逆阵的方法,求 $A^{-1}B$,即 $[A|B] \xrightarrow{\text{做一系列初等行变换}} [E|A^{-1}B]$.

同样,如果要求 BA^{-1} ,则可对矩阵 $\begin{bmatrix} A \\ \cdots \\ B \end{bmatrix}$ 做初等列变换,使得

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{做一系列初等列变换}} \begin{bmatrix} E \\ BA^{-1} \end{bmatrix},$$

于是我们又找到了解矩阵方程的新方法.

【例 2-4-5】 设 $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$, 求 X 使 $AX=B$.

$$\text{解 因为 } [A|B] = \left[\begin{array}{ccc|cc} 4 & 1 & -2 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 3 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{初等行变换}} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 10 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -15 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 12 & 4 \end{array} \right],$$

$$\text{所以 } X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 10 & 2 \\ -15 & -3 \\ 12 & 4 \end{bmatrix}.$$

【例 2-4-6】 设 $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 3 & -4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$, 求 X 使 $XA=B$.

$$\text{解 因为 } \begin{bmatrix} A \\ \cdots \\ B \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc} 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 3 & -4 \\ \hline 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{初等列变换}} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 2 & -1 & -1 \\ -4 & 7 & 4 \end{array} \right],$$

$$\text{所以 } X = BA^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -4 & 7 & 4 \end{bmatrix}.$$



习题 2-4

1. 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, 求 $P^{20}AQ^{21}$.

2. 求矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & 3 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$ 的行最简阶梯形矩阵.

3. 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, 求 A, B 的标准形, 并判断矩阵 A 和 B

是否等价?

4. 利用初等变换求下列矩阵的逆矩阵:

(1) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$; (2) $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

5. 求矩阵 X , 使 $AX=B$, 其中 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$.

6. 若 $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -4 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ 可逆, 判断 $I-A$ 是否可逆; 若可逆, 则求 $(I-A)^{-1}$.

7. 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$, 将矩阵 A 表示成初等矩阵的乘积.

8. 解矩阵方程 $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{bmatrix}$.

第五节 矩阵的秩

矩阵秩的概念是讨论向量组的线性相关性、深入研究线性方程组等问题的重要工具, 是反映矩阵固有特性的一个重要概念, 对后续讨论向量组的线性相关性, 线性方程组解的存在性, 矩阵的特征值、特征向量等均有重要意义, 在多项式、空间几何中等多个方面都有广泛的应用.

在上一节中给定一个 $m \times n$ 矩阵 A , 它的标准形 $\begin{bmatrix} E_r & O \\ O & O \end{bmatrix}$ 由数 r 完全确定这个数也就是与 A 等价的行阶梯形中非零行的行数, 这个数便是矩阵 A 的秩. 在本节中, 我们首先利用行

列式来定义矩阵的秩,然后给出矩阵秩的性质以及求矩阵的秩的方法,最后运用分块技巧证得矩阵秩的一些著名不等式.

一、矩阵秩的定义及性质

定义 2.5.1 在 $m \times n$ 矩阵 $\mathbf{A}$ 中,任取 k 行 k 列 ($1 \leq k \leq m, 1 \leq k \leq n$),位于这些行列交叉处的 k^2 个元素,不改变它们在各 $\mathbf{A}$ 中所处的位置次序而得到的 k 阶行列式,称为矩阵 $\mathbf{A}$ 的 k 阶子式.

例如 $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 9 \end{bmatrix}$ 有二阶子式 $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 9 \end{vmatrix}$ 等,

有三阶子式 $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 9 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 9 \end{vmatrix}$ 等.

设 $\mathbf{A}$ 为 $m \times n$ 矩阵,则 $\mathbf{A}$ 的 k 阶子式共有 $C_m^k \cdot C_n^k$ 个.当 $\mathbf{A} = \mathbf{O}$ 时,它的任何子式都为零.当 $\mathbf{A} \neq \mathbf{O}$ 时,它至少有一个元素不为零,即它至少有一个一阶子式不为零.再考察二阶子式,若 $\mathbf{A}$ 中有一个二阶子式不为零,则往下考察三阶子式,如此进行下去,最后必达到 $\mathbf{A}$ 中有 r 阶子式不为零,而再没有比 r 更高阶的不为零的子式.这个不为零的子式的最高阶数 r 反映了矩阵 $\mathbf{A}$ 内在的重要特征,在矩阵的理论与应用中都有重要意义.

定义 2.5.2 设 $\mathbf{A}$ 为 $m \times n$ 矩阵,如果存在 $\mathbf{A}$ 的 r 阶子式不为零,而任何 $r+1$ 阶子式(如果存在的话)皆为零,则称数 r 为矩阵 $\mathbf{A}$ 的秩,记为 $r(\mathbf{A})$ (或 $\text{rank}(\mathbf{A})$).

即 $r(\mathbf{A}) = r$ 或 $\text{rank}(\mathbf{A}) = r$.

例如对于矩阵 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 的 2 阶子式 $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$,

3 阶子式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 10$, 4 阶子式 $|\mathbf{A}| = 0$, 所以矩阵 $\mathbf{A}$ 的秩 $r(\mathbf{A}) = 3$.

由秩的定义,显然矩阵的秩具有下列性质.

- (1) 若 $\mathbf{A}$ 是零矩阵,则 $r(\mathbf{A}) = 0$;
- (2) $r(\mathbf{A}) = r$ 的充要条件是 $\mathbf{A}$ 中至少存在一个 r 阶子式不为 0 且 $\mathbf{A}$ 中所有 $r+1$ 阶子式全为 0;
- (3) 若矩阵 $\mathbf{A}$ 中有某个 s 阶子式不为 0,则 $r(\mathbf{A}) \geq s$;
- (4) 若 $\mathbf{A}$ 中所有 r 阶子式全为 0,则 $r(\mathbf{A}) < r$;
- (5) 若 $\mathbf{A}$ 是 $m \times n$ 阶非零矩阵,则 $1 \leq r(\mathbf{A}) \leq \min(m, n)$,即矩阵 $\mathbf{A}$ 的秩数不可能大于其行数和列数.

特别地,

- ① $r(\mathbf{A}) = m$, 称 $\mathbf{A}$ 为行满秩矩阵;

② $r(\mathbf{A})=n$, 称 $\mathbf{A}$ 为列满秩矩阵.

若 $\mathbf{A}$ 是 n 阶方阵, 当 $r(\mathbf{A})=n$ 时, 称 $\mathbf{A}$ 为满秩矩阵, 当 $r(\mathbf{A})<n$ 时, 称为降秩矩阵. 可见, 单位矩阵是满秩矩阵.

(6) $r(\mathbf{A})=r(\mathbf{A}^T)$.

(7) 对于行阶梯形矩阵, 其非零行的行数就是该矩阵的秩数. 如

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, r(\mathbf{A})=2,$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, r(\mathbf{B})=3.$$

定理 2.5.1 若 $\mathbf{A}_{m \times n}$ 经过若干次初等变换成为 $\mathbf{B}$, 则 $r(\mathbf{A})=r(\mathbf{B})$, 即等价的矩阵的秩相等.

证明 先证若 $\mathbf{A}_{m \times n}$ 经过若干次初等行变换成为 $\mathbf{B}$, 则 $r(\mathbf{A})=r(\mathbf{B})$, 为此先证 $\mathbf{A}$ 经过一次初等行变换而成的矩阵 $\mathbf{B}$, 有 $r(\mathbf{A}) \leq r(\mathbf{B})$. 设 $r(\mathbf{A})=k$, 则 $\mathbf{A}$ 中存在 k 阶非零子式 D_k , 若 $\mathbf{A}$ 经前 2 种初等行变换成了 $\mathbf{B}$, 则 $\mathbf{B}$ 中与 D_k 对应的 k 阶子式 M_k 最多与 D_k 相差一个非零倍数, 故 $M_k \neq 0$, 从而有 $r(\mathbf{B}) \geq k = r(\mathbf{A})$.

对于第 3 种初等行变换, 设 $\mathbf{A} \xrightarrow{\lambda r_i + r_j} \mathbf{B}$, 则 D_k 只有以下 4 种情形.

- (1) D_k 同时含有 $\mathbf{A}$ 的第 i 行和第 j 行的元素;
- (2) D_k 含有 $\mathbf{A}$ 的第 i 行元素但不含第 j 行的元素;
- (3) D_k 含有 $\mathbf{A}$ 的第 j 行元素但不含第 i 行的元素;
- (4) D_k 既不含有 $\mathbf{A}$ 的第 i 行元素也不含第 j 行的元素.

此时, 取 $\mathbf{B}$ 中与 D_k 同序号的行和列, 便可构成 $\mathbf{B}$ 的一个 k 阶子式 M_k , 且 $M_k \neq 0$. 对于由定理 2.5.1, 我们得到如下求矩阵秩数的方法:

- (1) 利用初等行变换将矩阵 $\mathbf{A}$ 化为行阶梯矩阵 $\mathbf{B}$;
- (2) 根据 $\mathbf{B}$ 的秩数等于其非零行的行数, 即求得 $r(\mathbf{B})$;
- (3) 又因为 $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$, 所以 $r(\mathbf{A})=r(\mathbf{B})$.

【例 2-5-1】 求下面矩阵 $\mathbf{A}$ 的秩.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & 8 & -7 \\ 2 & 14 & -13 \end{bmatrix}.$$

$$\text{解 } \mathbf{A} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & -2 & 1 \\ -1 & 8 & -7 \\ 2 & 14 & -13 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{r_2 - 4r_1 \\ r_3 + r_1 \\ r_4 - 2r_1}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -10 & 9 \\ 0 & 10 & -9 \\ 0 & 10 & -9 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{r_3 + r_2 \\ r_4 + r_2}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -10 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{B},$$

可见 $r(\mathbf{B})=2$, 所以 $r(\mathbf{A})=2$.

【例 2-5-2】 设 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \end{bmatrix}$, 求矩阵 $\mathbf{A}$ 的秩.

$$\begin{aligned} \text{解 } \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{r_1 \leftrightarrow r_4 \\ r_2 - r_4 \\ r_3 - 2r_1 \\ r_4 - 3r_1}} \begin{bmatrix} 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -12 & 9 & 7 & -11 \\ 0 & -16 & 12 & 8 & -12 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{r_3 - 3r_2 \\ r_4 - 4r_2}} \\ &\begin{bmatrix} 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -8 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_4 - r_3} \begin{bmatrix} 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{B}, \end{aligned}$$

易见 $r(\mathbf{B})=r(\mathbf{A})=3$.

【例 2-5-3】 设 $\mathbf{A}$ 为 n 阶矩阵 ($n \geq 2$), 证明

$$r(\mathbf{A}^*) = \begin{cases} n, & r(\mathbf{A}) = n, \\ 0, & r(\mathbf{A}) < n-1. \end{cases}$$

证明 若 $r(\mathbf{A})=n$ 时

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}| &\neq 0, \mathbf{A}\mathbf{A}^* = |\mathbf{A}|\mathbf{I}, \\ |\mathbf{A}||\mathbf{A}^*| &= ||\mathbf{A}|\mathbf{I}| = |\mathbf{A}|^n \neq 0, \end{aligned}$$

所以 $|\mathbf{A}^*| \neq 0$, 即 $r(\mathbf{A}^*)=n$.

$r(\mathbf{A}) < n-1$ 时, $\mathbf{A}$ 中所有 $n-1$ 阶子式均为零, 所以

$$\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \cdots & \mathbf{A}_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{A}_{1n} & \cdots & \mathbf{A}_{nn} \end{bmatrix} = \mathbf{O},$$

从而 $r(\mathbf{A}^*)=0$.

【例 2-5-4】 证明: $\mathbf{A}$ 为任意矩阵, 用可逆矩阵 $\mathbf{P}$ 左乘 $\mathbf{A}$, 则 $r(\mathbf{PA})=r(\mathbf{A})$.

证明 因为 $\mathbf{P}$ 是可逆矩阵, 故 $\mathbf{P}$ 可分解为若干个初等矩阵之积, 设

$\mathbf{P} = \mathbf{J}_s \cdots \mathbf{J}_1$, 其中 $\mathbf{J}_1, \cdots, \mathbf{J}_s$ 为初等方阵, 则

$$\mathbf{PA} = \mathbf{J}_s \cdots \mathbf{J}_1 \mathbf{A}.$$

上式表明, $\mathbf{A}$ 经过若干次初等变换变成 $\mathbf{PA}$, 所以 $\mathbf{A} \sim \mathbf{PA}$, 从而 $r(\mathbf{PA})=r(\mathbf{A})$.

该结论还可以继续推广, 因此作为定理 2.5.1 的推论我们有

推论 2.5.1 设 $\mathbf{A}_{m \times n}$, $\mathbf{P}_{m \times m}$ 及 $\mathbf{Q}_{n \times m}$ 均可逆, 则有 $r(\mathbf{PA})=r(\mathbf{AQ})=r(\mathbf{PAQ})=r(\mathbf{A})$.

推论 2.5.2 矩阵 $\mathbf{A}_{m \times n}$ 的充要条件是存在可逆矩阵 $\mathbf{P}_m, \mathbf{Q}_n$ 使得

$$\mathbf{A} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{Q}.$$

推论 2.5.3 设 $A, B \in \mathbf{R}^{m \times n}$, 则 A 与 B 等价的充要条件时它们有相同的秩.

定理 2.5.2 设 $A \in \mathbf{R}^{m \times n}, B \in \mathbf{R}^{n \times t}$, 则

$$r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}.$$

证明 若 A, B 中有一个是零矩阵, 则定理显然成立.

若 $A \neq 0, B \neq 0$, 设 $r(A) = r$, 则由推论 2.5.2 知道有可逆阵 P, Q , 使得

$$A = P \begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q,$$

于是

$$P^{-1}(AB) = \begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} (QB).$$

考察右边矩阵, 易见此矩阵不为 0 的行至多 r 行, 因而由推论 2.5.1 与秩的定义得到

$$r(AB) \leq r = r(A).$$

因此,

$$r(AB) = r(AB)' = r(B'A') \leq r(B)' = r(B).$$

$$\text{故 } r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}.$$

定理 2.5.3 设 $A \in \mathbf{R}^{m \times n}, B \in \mathbf{R}^{s \times t}, C \in \mathbf{R}^{m \times t}$, 则

$$r(A) + r(B) = r \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \leq r \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}.$$

证明 由秩的定义易见

$$r(A) + r(B) = r \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}.$$

设 $r(A) = r_1, r(B) = r_2$, 则 A 有一个 r_1 阶可逆子块 A_1, B 有一个 r_2 阶可逆子块 B_1 .

于是, $\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}$ 有一个 $r_1 + r_2$ 阶子式

$$\begin{vmatrix} A_1 & * \\ 0 & B_1 \end{vmatrix} = |A_1| |B_1| \neq 0.$$

所以

$$r \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \leq r \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}.$$

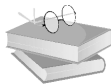
【例 2-5-5】 设 $A, B \in \mathbf{R}^{m \times n}$, 则 $r(A+B) \leq r(A) + r(B)$.

证明 因为

$$\begin{bmatrix} I_m & I_m \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m & I_n \\ 0 & I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & A+B \\ 0 & B \end{bmatrix}.$$

所以,定理 2.5.3 及矩阵秩的定义得到

$$\begin{aligned} r(\mathbf{A}) + r(\mathbf{B}) &= r \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B} \end{bmatrix} \\ &= r \left(\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{A} + \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B} \end{bmatrix} \right) \geq r(\mathbf{A} + \mathbf{B}). \end{aligned}$$



习题 2-5

1. 填空题

(1) 设 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & \cdots & a_1 b_n \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & \cdots & a_2 b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n b_1 & a_n b_2 & \cdots & a_n b_n \end{bmatrix}$, 其中 $a_i \neq 0, b_i \neq 0 (i=1, 2, \cdots, n)$, 则 $r(\mathbf{A}) = (\quad)$.

(2) 设 4 阶矩阵 $\mathbf{A}$ 的秩为 2, 则伴随矩阵 $\mathbf{A}^*$ 的秩为 $r(\mathbf{A}^*) = (\quad)$.

(3) 设 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & t \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, 若 $r(\mathbf{A}) < 3$, 则 $t = (\quad)$.

2. 选择题

(1) 已知 $\mathbf{A}$ 是 $m \times n$ 阶矩阵, $r(\mathbf{A}) = r < \min\{m, n\}$, 则 $\mathbf{A}$ 中 $(\quad)$.

- A. 至少有一个 r 阶子式不为零, 没有等于零的 $r-1$ 阶子式
- B. 有不等于零的 r 阶子式, 所有的 $r+1$ 阶子式全为零
- C. 有等于零的 $r-1$ 阶子式, 有不等于零的 r 阶子式
- D. 有等于零的 r 阶子式, 没有不等于零的 $r+1$ 阶子式

(2) 已知 $\mathbf{A}$ 是 $m \times n$ 阶矩阵, $\mathbf{C}$ 是 n 阶可逆矩阵, 矩阵 $\mathbf{A}$ 的秩为 r , 矩阵 $\mathbf{B} = \mathbf{AC}$ 的秩为 r_1 , 则 $(\quad)$.

- A. $r > r_1$
- B. $r < r_1$
- C. $r = r_1$
- D. r 与 r_1 的关系依 $\mathbf{C}$ 而定

3. 求下列矩阵的秩:

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -3 & -3 \\ 3 & 10 & -6 & -5 \end{bmatrix};$

(2) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix};$

(3) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$

4. 设 $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & \lambda & -1 & 2 \\ 5 & 3 & \mu & 6 \end{bmatrix}$, 已知 $r(\mathbf{A}) = 2$, 求 λ 与 μ 的值.

5. 证明 $r\left(\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{B} \end{bmatrix}\right) = r(\mathbf{A}) + r(\mathbf{B})$.

6. 设 $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{m \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbf{R}^{n \times t}$, $\mathbf{C} \in \mathbf{R}^{t \times s}$, 则 $r(\mathbf{ABC}) \geq r(\mathbf{AB}) + r(\mathbf{BC}) - r(\mathbf{B})$.

7. 设 $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{m \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbf{R}^{n \times t}$. 若 $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$, 则 $r(\mathbf{A}) + r(\mathbf{B}) \leq n$.

8. 设 $\mathbf{A}$ 为 $m \times n$ 阶满秩矩阵, 证明

(1) 存在 m 阶满秩矩阵 $\mathbf{P}$ 使得 $\mathbf{PA} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_n \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$;

(2) $r(\mathbf{AB}) = r(\mathbf{B})$ 对任意 $n \times p$ 阶矩阵 $\mathbf{B}$ 成立.

9. 设 $\mathbf{A}$ 为 n 阶方阵, $\mathbf{A}^*$ 是 $\mathbf{A}$ 的伴随矩阵, 且 $r(\mathbf{A}) = n - 1$, 证明存在常数 k , 使得 $(\mathbf{A}^*)^2 = k\mathbf{A}^*$.

第三章 n 维向量空间



扫码可见本章
学习资源

n 维向量空间是线性代数的理论基础,特别是为后面研究方程组解的结构提供了重要的理论支撑.本章的重点是对向量组的线性相关性、线性无关性以及向量组的极大无关组的讨论.

第一节 n 维向量空间

一、 n 维向量的概念

定义 3.1.1 由 n 个实数组成的一个有序数组

$$[a_1, a_2, \cdots, a_n] \text{ 或 } \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

称为实数域上的一个 n 维向量,其中前者称为行向量,后者称为列向量, a_i 称为该向量的第 i 个分量 ($i=1, 2, \cdots, n$).

行向量和列向量的区别只是写法上的不同,通常都用希腊字母 α, β, γ 等表示.我们还规定:分量全为零的向量,称为零向量,记作 $\mathbf{0}$,即 $\mathbf{0}=[0, 0, 0, \cdots, 0]$.

$$\text{向量 } \alpha = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \text{ 各分量的相反数所组成的向量成为 } \alpha \text{ 的负向量,记作 } -\alpha, \text{ 即}$$
$$-\alpha = \begin{bmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ \vdots \\ -a_n \end{bmatrix}.$$

定义 3.1.2 设有向量 $\alpha = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ 和 $\beta = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$, 如果有 $a_i = b_i$ ($i=1, 2, 3, \cdots, n$), 即对应的

每一个分量都相等,则就称向量 $\alpha = \beta$.

二、 n 维向量的运算

向量的加法: 向量 $\gamma = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{bmatrix}$ 称为向量 $\alpha = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ 和 $\beta = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ 的和, 记为 $\gamma = \alpha + \beta$, 即

$$\alpha + \beta = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{bmatrix}.$$

向量的数乘: 向量 $\begin{bmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ \vdots \\ ka_n \end{bmatrix}$ 称为向量 $\alpha = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ 与实数 k 的数量乘积, 即

$$k\alpha = \begin{bmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ \vdots \\ ka_n \end{bmatrix}.$$

向量的加法和数乘运算统称为向量的线性运算. 借助向量的加法和数乘运算我们还可以定义向量的减法运算.

向量的减法: 向量 $\begin{bmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ \vdots \\ a_n - b_n \end{bmatrix}$ 称为向量 $\alpha = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ 和 $\beta = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ 的差, 记为 $\gamma = \alpha - \beta$, 即

$$\alpha - \beta = \begin{bmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ \vdots \\ a_n - b_n \end{bmatrix}.$$

根据向量的运算的定义, 容易验证向量运算具有如下基本性质.

- (1) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ (交换律);
- (2) $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$ (结合律);
- (3) $\alpha + 0 = \alpha$;
- (4) $\alpha + (-\alpha) = 0$;
- (5) $k(\alpha + \beta) = k\alpha + k\beta$ (分配律);

(6) $(k+l)\alpha = k\alpha + l\alpha$ (分配律);

(7) $k(l\alpha) = (kl)\alpha$;

(8) $1 \cdot \alpha = \alpha$.

由于 n 维向量的加法和数乘运算法则以及运算规律与矩阵运算一致,今后在和矩阵一起运算时,行向量和列向量可分别看作 $1 \times n$ 和 $n \times 1$ 阶的矩阵,并且没有特殊说明,本书中的向量均指列向量.

【例 3-1-1】 $\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, 求 $3\alpha - \beta$.

$$\text{解 } 3\alpha - \beta = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

三、 n 维向量空间 $\mathbf{R}^n$ 和子空间

定义 3.1.3 全体 n 维向量的集合,加上其上定义的满足性质(1)—(8)的向量加法和数量乘法,称为实数域 $\mathbf{R}$ 上的一个 n 维向量空间,记为 $\mathbf{R}^n$.

例如 $\mathbf{R}^2$ 和 $\mathbf{R}^3$ 分别是平面和空间中全体几何向量所构成的向量空间.

注意 $\mathbf{R}^n$ 既可以代表全体 n 维向量构成的集合,还可以代表具有加法和数乘运算且满足其运算性质的特定集合,但二者存在本质区别.

在通常的三维几何空间中,不难看出一个过原点的平面上的所有向量对于向量的加法和数乘构成一个二维向量空间.这说明这个二维集合空间既是三维向量空间的一部分,同时它又对于原来的运算也构成一个向量空间.

定义 3.1.4 设 V 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个非空子集,若 V 对于向量的加法和数乘运算也构成一个向量空间,则称 V 为 $\mathbf{R}^n$ 的一个子空间.

定理 3.1.1 设 V 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个非空子集,如果 V 对于向量加法和数乘封闭,即

(1) 若对 $\forall \alpha, \beta \in V$, 则 $\alpha + \beta \in V$;

(2) 若对 $\forall \alpha \in V, k \in \mathbf{R}$, 则 $k\alpha \in V$.

那么 V 是 $\mathbf{R}^n$ 的子空间.

由定义 3.1.4 知,只含零向量的集合 $\{0\}$ 与 $\mathbf{R}^n$ 本身都是子空间,分别称为零子空间和全子空间,它们是并成为平凡子空间,其余的子空间称为非平凡子空间.

定理 3.1.2 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s \in \mathbf{R}^n$, 则 $L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = \{k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s \mid k_i \in \mathbf{R}, i=1, \dots, s\}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个子空间,称为由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 生成的子空间.

证明 首先 $0 = 0\alpha_1 + 0\alpha_2 + \dots + 0\alpha_s \in L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$, 所以 $L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$ 不是空集.

设 $\gamma_1, \gamma_2 \in L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$, 则存在实数 $k_1, k_2, \dots, k_s$ 和 $l_1, l_2, \dots, l_s$ 使得

$$\gamma_1 = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s,$$

$$\gamma_2 = l_1 \alpha_1 + l_2 \alpha_2 + \cdots + l_s \alpha_s.$$

由向量运算性质得

$$\gamma_1 + \gamma_2 = (k_1 + l_1) \alpha_1 + (k_2 + l_2) \alpha_2 + \cdots + (k_s + l_s) \alpha_s,$$

$$k\gamma_2 = kl_1 \alpha_1 + kl_2 \alpha_2 + \cdots + kl_s \alpha_s.$$

显然 $\gamma_1 + \gamma_2, k\gamma_2 \in L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)$, 即 $L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)$ 对向量加法和数乘封闭, 从而由定理 3.1.1 知 $L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个子空间.

【例 3-1-1】 证明 $\mathbf{R}^n$ 的子集 $W = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^n \mid x_1 + x_n = 0 \right\}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的子空间.

证明 显然 $\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \in W$, 故 $W \neq \emptyset$.

设 $\alpha = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in W, \beta = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \in W$, 则 $x_1 + x_n = 0, y_1 + y_n = 0$.

再由 $\alpha + \beta = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^n$,

且 $(x_1 + y_1) + (x_n + y_n) = (x_1 + x_n) + (y_1 + y_n) = 0 + 0 = 0$, 知 $\alpha + \beta \in W$.

又设 $k \in \mathbf{R}, k\alpha = \begin{bmatrix} kx_1 \\ kx_2 \\ \vdots \\ kx_n \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^n$ 及 $kx_1 + kx_n = k(x_1 + x_n) = 0$ 知 $k\alpha \in W$.

所以 W 是 $\mathbf{R}^n$ 的子空间.

【例 3-1-2】 证明 $V = \{(x, 0, 1)^T \mid x \in \mathbf{R}\}$ 不是 $\mathbf{R}^3$ 的子空间.

证明 因为 $(a, 0, 1) + (b, 0, 1) = (a+b, 0, 2) \notin V$, 即 V 对向量的加法不满足定理 3.1.1, 所以证明 $V = \{(x, 0, 1)^T \mid x \in \mathbf{R}\}$ 不是 $\mathbf{R}^3$ 的子空间.



习题 3-1

1. 判断下列 $\mathbf{R}^n$ 的子集是否是 $\mathbf{R}^n$ 的子空间.

$$(1) W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^n \mid x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0 \right\};$$

$$(2) W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^n \mid x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1 \right\};$$

$$(3) W_3 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^n \mid k \in \mathbf{R} \right\};$$

$$(4) W_4 = \{k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \cdots + k_s \alpha_s \mid k_i \in \mathbf{R}, \alpha_i \in \mathbf{R}^n, i=1, 2, \cdots, s\}.$$

2. 设 W_1 和 W_2 是 $\mathbf{R}^n$ 的子空间, 证明 $W_1 \cap W_2$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的子空间.

3. 证明 $\mathbf{R}^3$ 中过原点的平面是 $\mathbf{R}^3$ 的子空间.

第二节 向量的线性相关性

在向量空间中, 向量的线性相关性是向量空间中的一个重要概念. 它既能帮助我们更好地描述向量之间的关系、深入理解向量集合的结构、更好地表示线性方程组的通解, 在许多实际应用中还可以帮助我们在做数据压缩、特征提取时减小数据的维度, 提取关键信息, 提高计算效率和模型性能. 线性相关性是线性代数中的一个核心概念, 对于解决各种理论和实际问题都有重要的意义.

以下谈到的向量空间 V , 都指实数域 $\mathbf{R}$ 上的某一给定的向量空间.

一、向量的线性组合与向量组间的线性表示

两个向量间最常见的关系是成比例, 即 $\alpha = k\beta (k \in \mathbf{R})$, 而多个向量之间的关系要复杂得多, 这也是我们本节讨论的重点.

定义 3.2.1 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s \in V, k_1, k_2, \cdots, k_s \in \mathbf{R}$, 我们称

$$\beta = k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \cdots + k_s \alpha_s$$

为向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 的一个线性组合, 也称 β 可以由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性表示.

例如向量 $\beta = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ 是向量组 $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ 的线性组合, 因为 $\beta = 3\alpha_1 +$

$\alpha_2 - 2\alpha_3$.

显然,我们可以根据线性表示的定义得到下面的一些结论:

(1) 在向量空间 V 中,零向量可以由任意一组向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$ 线性表示.

(2) n 维向量空间中的任一向量 $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ 都可以由 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 线性表示,其中

$$\varepsilon_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \varepsilon_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \varepsilon_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

为 n 维向量空间的基本单位向量.

(3) 借助向量方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$ 可表示为

$$\beta = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_n\alpha_n,$$

则方程组有解的充要条件是 β 可以由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表出,其中

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \dots, \alpha_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

定义 3.2.2 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 与向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 是两组 n 维向量,如果 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中每个向量 $\alpha_i (1 \leq i \leq s)$ 都可以由 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性表示,那么就称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 可以由向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性表示;如果这两个向量组可以相互线性表示,就称这两个向量组等价,记为

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s\} \sim \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t\}.$$

不难验证向量组等价具有如下性质.

- (1) 反身性: $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s\} \sim \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s\}$;
- (2) 对称性: 若 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s\} \sim \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t\}$, 则 $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t\} \sim \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s\}$;
- (3) 传递性: 若 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s\} \sim \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t\}$, 且 $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t\} \sim \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_l\}$, 则 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s\} \sim \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_l\}$.

【例 3-2-1】 证明等价的向量组生成的向量空间相同.

证明 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 与向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 等价,记

$$V_1 = L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s),$$

$$V_2 = L(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t).$$

对 $\forall \alpha \in V_1$, 则 α 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表示.

又因为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 可以由 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性表示,

所以 α 可由 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性表示,

所以 $\alpha \in V_2$, 从而 $V_1 \subset V_2$.

同理可证 $V_2 \subset V_1$, 故 $V_1 = V_2$.

二、向量组的线性相关性

定义 3.2.3 设向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s \in \mathbf{R}^n$. 若存在一组不全为零的数 $k_1, k_2, \dots, k_s$ 使得

$$k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_s \alpha_s = \mathbf{0},$$

则称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关; 否则仅当 $k_1 = k_2 = \dots = k_s = 0$ 时等式才成立, 则称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关.

例如 $\mathbf{R}^2$ 中向量 $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 和向量 $\alpha_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ 是线性相关的, 因为取 $k_1 = k_2 = 1 \neq 0$, 则

$k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 = \mathbf{0}$. 如果再取 $\alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, 则 α_1 和 α_3 线性无关, 因为由 $k_1 \alpha_1 + k_3 \alpha_3 = \mathbf{0}$ 得

$$\begin{cases} k_1 = 0, \\ k_3 = 0, \end{cases} \text{ 即只有 } k_1 = k_3 = 0 \text{ 时, } k_1 \alpha_1 + k_3 \alpha_3 = \mathbf{0}.$$

事实上, 在 $\mathbf{R}^2$ 向量空间中两向量线性相关的充要条件是两向量成比例.

根据线性相关和线性无关的定义, 我们容易证得以下结论:

(1) 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s \in (\mathbf{R}^n)$ 中有一个是零向量, 则该向量组线性相关;

(2) 三维向量空间中三个向量线性相关的充要条件是它们共面;

(3) 向量组 $\alpha_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \dots, \alpha_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$ 线性相关的充要条件是齐次线性方

$$\text{程组} \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \text{ 有非零解;}$$

(4) 向量组 $\alpha_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \dots, \alpha_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$ 线性无关的充要条件是齐次线性方

$$\text{程组} \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \text{只有零解.}$$

【例 3-2-2】 已知向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 且 $\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2, \beta_2 = \alpha_2 + \alpha_3, \beta_3 = \alpha_3 + \alpha_1$, 证明 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 亦线性无关.

证明 设 $k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + k_3\beta_3 = \mathbf{0}$, 即

$$k_1(\alpha_1 + \alpha_2) + k_2(\alpha_2 + \alpha_3) + k_3(\alpha_3 + \alpha_1) = (k_1 + k_3)\alpha_1 + (k_1 + k_2)\alpha_2 + (k_2 + k_3)\alpha_3 = \mathbf{0},$$

因为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 所以

$$\begin{cases} k_1 + k_3 = 0, \\ k_1 + k_2 = 0, \\ k_2 + k_3 = 0. \end{cases}$$

这是一个三元一次方程组, 因系数行列式不为零, 故有唯一解

$$k_1 = k_2 = k_3 = 0,$$

所以 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 亦线性无关.

$$\text{【例 3-2-3】 设 } \varepsilon_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \varepsilon_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \varepsilon_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^n, \text{ 而 } \alpha = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^n \text{ 为任一 } n$$

维向量, 证明: $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 线性无关, 而 $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, \alpha$ 线性相关.

证明 令 $k_1\varepsilon_1 + k_2\varepsilon_2 + \dots + k_n\varepsilon_n = \mathbf{0}$, 即得

$$\begin{bmatrix} k_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ k_2 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \dots + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ k_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

其系数行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

由克莱默法则的推论知, 此方程有唯一解 $k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0$,

从而

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n \text{ 线性无关.}$$

又

$$\alpha = a_1\varepsilon_1 + \dots + a_n\varepsilon_n, \text{ 即 } \alpha \text{ 可由向量组 } \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n \text{ 线性表出.}$$

所以

$$\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, \alpha \text{ 线性相关.}$$

三、向量组线性相关性的相关定理

定理 3.2.1 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s (\in \mathbf{R}^n) (s \geq 2)$ 线性相关的充要条件是该向量组中至少有一个向量都可以由其余的向量线性表示.

证明 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s (s \geq 2)$ 线性相关, 则必存在一组不全为 0 的实数 $k_1, k_2, \dots, k_n$, 使 $k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_n \alpha_n = \mathbf{0}$.

不妨设 $k_1 \neq 0$, 得 $\alpha_1 = -\frac{k_2}{k_1} \alpha_2 - \dots - \frac{k_s}{k_1} \alpha_s$ 即该向量组中至少有一个向量可由其余向量线性表示.

若向量组中 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s (s \geq 2)$ 至少有一个向量可由其余向量线性表示, 不妨设 α_1 可由 $\alpha_2, \dots, \alpha_s (s \geq 2)$ 线性表示即存在实数 $k_2, \dots, k_n$, 使

$$\alpha_1 = k_2 \alpha_2 + k_3 \alpha_3 + \dots + k_s \alpha_s,$$

从而

$$-\alpha_1 + k_2 \alpha_2 + k_3 \alpha_3 + \dots + k_s \alpha_s = \mathbf{0},$$

所以向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s (s \geq 2)$ 线性相关.

定理 3.2.1 是向量组线性相关的充要条件, 在 $s \geq 2$ 的情况下该定理和线性相关的定义是等价的.

定理 3.2.2 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 而向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta$ 线性相关, 则 β 可以由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 唯一地线性表示.

证明 因 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta$ 线性相关, 则 $\exists k_0, k_1, \dots, k_s$ 不全为零, 使得

$$k_0 \beta + k_1 \alpha_1 + \dots + k_s \alpha_s = \mathbf{0}.$$

若 $k_0 = 0$, 则 $k_1, \dots, k_s$ 必不全为零, 而上式等价于 $k_1 \alpha_1 + \dots + k_s \alpha_s = \mathbf{0}$, 这就表明 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 与条件矛盾. 故 $k_0 \neq 0$, 于是有

$$\beta = -\frac{k_1}{k_0} \alpha_1 - \dots - \frac{k_s}{k_0} \alpha_s,$$

这表明 β 可以由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表示.

下证唯一性: 设若不然, 存在两个不同的表示式

$$\beta = k_1 \alpha_1 + \dots + k_s \alpha_s \text{ 和 } \beta = l_1 \alpha_1 + \dots + l_s \alpha_s,$$

二式相减得

$$\mathbf{0} = (k_1 - l_1) \alpha_1 + \dots + (k_s - l_s) \alpha_s,$$

由于二式不同, $(k_i - l_i)$ 不全为零 ($i = 1, \dots, s$), 又推出 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 仍与条件矛盾, 因此表示式必是唯一的.

定理 3.2.3 n 维向量组 $\alpha_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \dots, \alpha_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix}$ 线性无关的充要条件是

$$\text{行列式} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

证明 由线性无关的定义知, 向量组

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \cdots, \alpha_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix}.$$

线性无关的充要条件是齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots \cdots \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \text{只有零解.}$$

由克莱姆法则的推论知该方程组只有零解的充要条件是系数行列式不等于零, 定理得证.

定理 3.2.4 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s (\in \mathbb{R}^n)$ 线性相关, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \alpha_{s+1}, \cdots, \alpha_m$ 也线性相关.

证明 因为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性相关, 所以存在不全为 0 的 r 个数 $k_1, \cdots, k_s$, 使得

$$k_1\alpha_1 + \cdots + k_s\alpha_s = \mathbf{0}.$$

显然

$$k_1\alpha_1 + \cdots + k_s\alpha_s + 0\alpha_{s+1} + \cdots + 0\alpha_m = \mathbf{0}.$$

由 $k_1, \cdots, k_s$ 中至少有一个不为 0, 知 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \alpha_{s+1}, \cdots, \alpha_m$ 线性相关.

由定理 3.2.4, 我们可以得

推论 3.2.1 线性无关向量组的任意部分向量组也是线性无关的.

定理 3.2.5 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s (\in \mathbb{R}^n)$ 线性无关, 且可由向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t (\in \mathbb{R}^n)$ 线性表示, 则 $s \leq t$.

证明 对向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 所含向量的个数 s 用数学归纳法.

当时 $s=1$, 显然有 $s \leq t$. 假设当向量组所含向量个数为 $s-1$ 时定理成立, 则当向量组所含向量的个数为 s 时, 因为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 是 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 的线性组合, 故有 $k_{ij} \in \mathbb{R}, i=1, 2, \cdots, s, j=1, 2, \cdots, t$ 使得

$$\begin{cases} \alpha_1 = k_{11}\beta_1 + k_{12}\beta_2 + \cdots + k_{1t}\beta_t, \\ \alpha_2 = k_{21}\beta_1 + k_{22}\beta_2 + \cdots + k_{2t}\beta_t, \\ \cdots \cdots \cdots \\ \alpha_s = k_{s1}\beta_1 + k_{s2}\beta_2 + \cdots + k_{st}\beta_t. \end{cases}$$

又 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 其中必定不含有零向量, $\alpha_s \neq 0$, 从而 $k_{s1}, k_{s2}, \dots, k_{st}$. 不妨设 $k_{st} \neq 0$, 则有

$$\beta_t = -\frac{k_{s1}}{k_{st}}\beta_1 - \frac{k_{s2}}{k_{st}}\beta_2 - \dots - \frac{k_{s,t-1}}{k_{st}}\beta_{t-1} + \frac{1}{k_{st}}\alpha_s.$$

将其代入前 $s-1$ 个等式, 整理得

$$\begin{cases} \alpha_1 = p_{11}\beta_1 + p_{12}\beta_2 + \dots + p_{1,t-1}\beta_{t-1} + p_{1t}\alpha_s, \\ \alpha_2 = p_{21}\beta_1 + p_{22}\beta_2 + \dots + p_{2,t-1}\beta_{t-1} + p_{2t}\alpha_s, \\ \dots\dots\dots \\ \alpha_{s-1} = p_{s-1,1}\beta_1 + p_{s-1,2}\beta_2 + \dots + p_{s-1,t-1}\beta_{t-1} + p_{s-1,t}\alpha_s, \end{cases}$$

这里

$$p_{ij} \in \mathbf{R}, i=1, 2, \dots, s-1, j=1, 2, \dots, t.$$

上式亦可写成

$$\begin{cases} \alpha_1 - p_{1t}\alpha_s = p_{11}\beta_1 + p_{12}\beta_2 + \dots + p_{1,t-1}\beta_{t-1}, \\ \alpha_2 - p_{2t}\alpha_s = p_{21}\beta_1 + p_{22}\beta_2 + \dots + p_{2,t-1}\beta_{t-1}, \\ \dots\dots\dots \\ \alpha_{s-1} - p_{s-1,t}\alpha_s = p_{s-1,1}\beta_1 + p_{s-1,2}\beta_2 + \dots + p_{s-1,t-1}\beta_{t-1}, \end{cases}$$

由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 可以证明 $\alpha_1 - p_{1t}\alpha_s, \alpha_2 - p_{2t}\alpha_s, \dots, \alpha_{s-1} - p_{s-1,t}\alpha_s$ 亦线性无关. 从而由上式与归纳假设有 $s-1 \leq t-1$, 即 $s \leq t$.

推论 3.2.2 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 可由向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性表示, 且 $s > t$, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 必线性相关.

推论 3.2.3 $\mathbf{R}^n$ 中任意 $n+1$ 个向量必线性相关.

定理 3.2.5 及其推论说明了一个向量组所含向量的个数与其线性相关性的密切联系. 下面举例说明以上几个定理的应用.

【例 3-2-4】 设向量 α 可由向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性表示. 证明: 表示方法唯一的充要条件是 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性无关.

证明 充分性, 设 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性无关. α 可由 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性表示, 则 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t, \alpha$ 线性相关, 根据定理 3.2.2, α 可由 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 唯一线性表示.

必要性, 设 α 可由 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 唯一线性表示为:

$$\alpha = k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \dots + k_t\beta_t. \quad (*)$$

又若零向量由 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性表示时方法不唯一, 即有不全为零的数 $l_1, l_2, \dots, l_t$ 使得

$$0 = l_1\beta_1 + l_2\beta_2 + \dots + l_t\beta_t.$$

假设 $l_i \neq 0 (1 \leq i \leq t)$, 将上面两个等式相减得

$$\alpha = \alpha - 0 = (k_1 - l_1)\beta_1 + (k_2 - l_2)\beta_2 + \dots + (k_i - l_i)\beta_i + \dots + (k_t - l_t)\beta_t.$$

由于 $l_i \neq 0, k_i - l_i \neq k_i$, 与 (*) 式比较, α 有两种不同的表示方法, 由此得出矛盾, 因此零向

量由 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性表示时表示方法是唯一的(即组合系数全为零).故 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性无关.

【例 3-2-5】 证明两个等价的线性无关的向量组含有相同个数的向量.

证明 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 和 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 均线性无关且相互等价.

因为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 可由向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性表示且 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 根据定理 3.2.4, $s \leq t$,

同理可证 $t \leq s$, 从而 $s = t$.



习题 3-2

1. 填空题

(1) 向量 $\alpha = (a_1, a_2)$ 和向量 $\beta = (b_1, b_2)$ 线性相关的充要条件时_____.

(2) 向量组 $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ t \end{bmatrix}$ 线性相关, 则 $t =$ _____.

(3) 向量组 $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ a \\ b \end{bmatrix}$ 线性无关, 则 a, b 满足的关系式为_____.

2. 选择题

n 维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ ($3 \leq s \leq n$) 线性无关的充要条件是_____.

A. 存在一组不全为零的数 $k_1, k_2, \dots, k_s$ 使得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s \neq 0$

B. $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中任意两个向量都线性无关

C. $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中存在一个向量, 它不能用其余向量线性表示

D. $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中任意一个向量都不能用其余向量线性表示

(2) 已知向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, 则向量组_____.

A. $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4 + \alpha_1$ 线性无关

B. $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_4, \alpha_4 - \alpha_1$ 线性无关

C. $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4 - \alpha_1$ 线性无关

D. $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_4, \alpha_4 - \alpha_1$ 线性无关

(3) 若向量组 α, β, γ 线性无关, α, β, δ 线性相关, 则_____.

A. α 必可由 β, γ, δ 线性表示

B. β 必可由 α, γ, δ 线性表示

C. δ 必可由 α, β, γ 线性表示

D. δ 必不可由 α, β, γ 线性表示

(4) 设方阵 A 的行列式 $|A| = 0$, 则 A 中_____.

A. 必有两行成比例

B. 必有一行元素全为零

C. 必有一列向量是其余列向量的线性组合

D. 任意列向量是其余列向量的线性组合

3. 判断向量组 $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ 的线性相关性.

4. 设 $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$. 问

(1) 当 t 取何值时, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关?

(2) 当 t 取何值时, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关?

(3) 当向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关时, 将 α_3 表示成 α_1 和 α_2 的线性组合.

5. 已知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 若 $\alpha_1 + 2\alpha_2, 2\alpha_2 + a\alpha_3, 3\alpha_3 + 2\alpha_1$ 线性相关, 求 a 的值.

6. 如果向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 证明向量组 $\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \dots, \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_s$ 也线性无关.

7. 设 $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ 为 $\mathbf{R}^4$ 中的向量, 试将 β 表

示为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的线性组合.

8. 设向量 α 可由向量 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性表示, 但不能由其中少于 t 个的向量线性表示. 证明: $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性无关.

9. 已知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 向量 β_1 能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 向量 β_2 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示. 证明向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1 + \beta_2$ 也线性无关.

第三节 基维数坐标

在第二节中我们讨论了 $\mathbf{R}^n$ 中向量的线性关系, 本节我们将在此基础上研究向量空间的数量特征——基、维数、坐标及其子空间的结构.

一、向量组的结构

定义 3.3.1 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的向量组, 若它的一个部分向量组 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$ ($r \leq s$) 满足:

(1) $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$ 线性无关;

(2) 对任意的 $\alpha_j \in \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s\}$, $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}, \alpha_j$ 线性相关,

则称 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$ 为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的一个极大线性无关组, 简称极大无关组.

【例 3-3-1】 讨论下列向量组的极大无关组:

$$(1) n \text{ 维单位向量组 } \varepsilon_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \varepsilon_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \cdots, \varepsilon_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$(2) \alpha_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

解 (1) n 维单位向量组 $\varepsilon_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \varepsilon_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \cdots, \varepsilon_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$ 线性无关, 所以极大无关组

为其自身.

(2) 因为 α_1, α_2 不成比例, 所以 α_1, α_2 线性无关, 且 $\alpha_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2$, 所以 α_1, α_2 为极大无关组. 同理可证得 $\alpha_2, \alpha_3; \alpha_1, \alpha_3$ 也是极大无关组.

由极大无关组的定义我们容易证得以下结论:

- (1) 向量组的任一向量都可由其极大无关组唯一线性表示;
- (2) 向量组与其极大无关组等价;
- (3) 向量组的极大无关组不一定唯一, 但它们彼此等价且均线性无关;
- (4) 一个向量组的任意两个极大无关组都含有相同个数的向量.

定义 3.3.2 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 的极大无关组所含向量的个数称为该向量组的秩, 记为 $r\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s\}$. 只含零向量的向量组无极大无关组, 规定其秩为零.

定义 3.3.3 称以 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s (\in \mathbb{R}^n)$ 为对应列的矩阵 $[\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s]$ 为向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 的矩阵.

下面我们来研究向量组的秩和它的矩阵的秩之间的关系:

定理 3.3.1 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 的秩等于它的矩阵 $[\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s]$ 的秩.

证明 记 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s], \alpha_i = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{bmatrix} \quad (i=1, 2, \cdots, s).$

设 $r(A) = r$, 则 A 中有一 r 阶子式 $D \neq 0$, 不妨设 D 位于 A 的左上角.

下面证明 A 的前 r 列线性无关, 令

$$k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \cdots + k_r \alpha_r = 0.$$

写成方程组的形式, 即

$$\begin{cases} a_{11}k_1 + a_{12}k_2 + \cdots + a_{1r}k_r = 0, \\ a_{21}k_1 + a_{22}k_2 + \cdots + a_{2r}k_r = 0, \\ \dots\dots\dots \\ a_{r1}k_1 + a_{r2}k_2 + \cdots + a_{rr}k_r = 0, \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}k_1 + a_{n2}k_2 + \cdots + a_{nr}k_r = 0, \end{cases}$$

其中前 r 个方程的系数行列式 $D \neq 0$, 根据克拉默法则前 r 个方程只有唯一的零解, 从而整个方程组也只有零解 $k_i = 0 (i=1, 2, \dots, r)$, 从而 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性无关.

对任意的 $i (i=1, 2, \dots, n)$, 作 $r+1$ 阶行列式

$$C_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & a_{1,r+1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} & a_{2,r+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} & a_{r,r+1} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ir} & a_{i,r+1} \end{vmatrix}.$$

当 $1 \leq i \leq r$ 时, C_i 中有两行相同, 故 $C_i = 0$;

当 $r+1 \leq i \leq n$ 时, C_i 是 A 中的一个 $r+1$ 阶子式, 也有 $C_i = 0$, 将 C_i 按最后一行展开得:

$$a_{i1}D_1 + a_{i2}D_2 + \cdots + a_{ir}D_r + a_{i,r+1}D = 0,$$

其中 $D_1, D_2, \dots, D_r$ 分别是 C_i 中 $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{ir}$ 的代数余子式, 它们与 i 的选取无关.

在上式中分别令 $i=1, 2, \dots, n$ 得:

$$\begin{cases} a_{11}D_1 + a_{12}D_2 + \cdots + a_{1r}D_r + a_{1,r+1}D = 0, \\ a_{21}D_1 + a_{22}D_2 + \cdots + a_{2r}D_r + a_{2,r+1}D = 0, \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}D_1 + a_{n2}D_2 + \cdots + a_{nr}D_r + a_{n,r+1}D = 0. \end{cases}$$

写成向量的形式即得:

$$D_1\alpha_1 + D_2\alpha_2 + \cdots + D_r\alpha_r + D\alpha_{r+1} = 0,$$

因 $D \neq 0$, 故 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \alpha_{r+1}$ 线性相关, 从而 α_{r+1} 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性表示.

同理 $\alpha_{r+2}, \dots, \alpha_s$ 均可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性表示, 从而 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 是 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的一个极大无关组. 所以 $r\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s\} = r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$.

在定理的证明过程中我们可以发现, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的一个极大无关组就是它的矩阵 $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$ 的一个 r 阶非零子式所在列的列向量. 且 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中的任意 r 个线性无关的向量均构成向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的一个极大无关组.

定理 3.3.2 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关的充要条件是 $r\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s\} = s$.

证明 $\Rightarrow$ 显然.

$\Leftarrow$ 若 $r\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s\} = s$, 则 $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = s$. 从而 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$ 中有 s 阶

非零子式,故 A 的 s 个列向量为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的极大无关组,从而 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关.

推论 3.3.1 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关的充要条件是 $r\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s\} < s$.

推论 3.3.2 n 个 n 维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性相关的充要条件是行列式 $|A| \neq 0$, 其中 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$.

下面我们通过例子来说明怎样求向量组的秩和极大无关组,以及如何判断它们的线性相关性.

【例 3-3-2】 设向量 $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 7 \\ 14 \end{bmatrix}, \alpha_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \alpha_5 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$, 判断向

量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ 的线性相关性,并求其秩和一个极大无关组.

解 对 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ 的矩阵做初等行变换

$$\begin{aligned} A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 7 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & 14 & 0 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & -2 \end{bmatrix} \\ &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B. \end{aligned}$$

因为 $r(A) = 3 < 5$, 所以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ 线性相关, 且 $r\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_5\} = r(A) = 3$.

因为在梯形矩阵 B 中三阶子式 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$, 所以 B 的第 1, 2, 4 列是 B 的列

向量的极大无关组, 相应的, 原向量组中 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 构成 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ 的一个极大无关组.

【注】 在例 3-3-1 中 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_5$ 和 $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$ 等都是 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ 的极大无关组, 这说明了一个向量组可能有多个极大无关组.

【例 3-3-3】 设向量组 $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 13 \\ 2 \\ -1 \\ p+2 \end{bmatrix}, \alpha_4 = \begin{bmatrix} -2 \\ -6 \\ 10 \\ p \end{bmatrix}$.

问: (1) p 为何值时, 该向量组线性无关? 并将向量 $\alpha = (4, 1, 6, 10)^T$ 用 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性表出.

(2) p 为何值时, 该向量组线性相关? 并求出它的秩和它的一个极大无关组.

解 对 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha$ 的矩阵做初等行变换

$$\begin{aligned}
 A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha) &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & 2 & -6 & 1 \\ 1 & 5 & -1 & 10 & 6 \\ 3 & 1 & p+2 & p & 10 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & -4 & -3 \\ 0 & 6 & -4 & 12 & 2 \\ 0 & 4 & p-7 & p+6 & -2 \end{bmatrix} \\
 &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & -7 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & p-9 & p-2 & -8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & p-2 & 1-p \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

(1) 当 $p \neq 2$ 时, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关. 设 $\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 + x_4\alpha_4$, 从而有方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 4, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 6x_4 = 1, \\ x_1 + 5x_2 - x_3 + 10x_4 = 6, \\ 3x_1 + x_2 + (p+2)x_3 + px_4 = 10. \end{cases}$$

解得

$$x_1 = 2, x_2 = \frac{3p-4}{p-2}, x_3 = 1, x_4 = \frac{1-p}{p-2}.$$

(2) 当 $p = 2$ 时, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关, 且秩为 3, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是一个极大无关组.

【例 3-3-4】 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}^n$, $\beta_1 = \alpha_1 - \alpha_2$, $\beta_2 = \alpha_2 - \alpha_3$, $\beta_3 = \alpha_3 - \alpha_1$, 若 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性无关, 证明 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 也线性无关.

证明 因为 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性无关,

所以 $r\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\} = 3$.

又 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示:

$$(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

所以 $r\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} = r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \geq r(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = 3$,

所以 $r\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} = 3$, 从而 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 也线性无关.

定理 3.3.3 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 可由向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性表示, 则

$$r\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s\} \leq r\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t\}.$$

推论 3.3.3 等价的向量组具有相同的秩, 但反之不一定成立.

二、向量空间 $\mathbb{R}^n$ 及其子空间

定义 3.3.4 设 W 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 是 W 中的一组向量, 满足

(1) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性无关;

(2) W 中任一向量 α 都是 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 的线性组合, 则称 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 为子空间 W 的一组基底(简称基), r 称为 W 的维数, 记为 $\dim W = r$, 并称 W 为 r 维向量空间.

在理解空间的基和维数定义的基础上, 我们还需要注意下面的一些结论:

(1) $\mathbf{R}^n$ 的零子空间没有基底, 规定其秩为 0;

(2) 子空间 W 的维数是一个常数, 与基的选取无关;

(3) n 维单位向量 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的一组基(称为标准基).

(4) 由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 生成的子空间的维数等于该向量组的秩, 即

$$\dim L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = r\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s\}$$

定理 3.3.4 设 W 是 $\mathbf{R}^n$ 的子空间, 则

(1) W 的任一基底含有相同个数的向量;

(2) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 是 W 的一组基, 则 W 中任意 $r+1$ 个向量线性相关, 且任意 r 个线性无关的向量都是 W 的基.

定义 3.3.5 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 是 W 的一组基, 则 W 中任一向量 α 都可唯一地表示为

$$\alpha = x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \dots + x_r \alpha_r, \text{ 则数组 } \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{bmatrix} \text{ 称为向量在基 } \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r \text{ 下的坐标.}$$

三、基变换和坐标变化

在给出向量在基下的坐标后, 我们知道同一向量在不同基底下的坐标是不一样的, 那么它们之间有什么联系吗?

定义 3.3.6 设 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ 与 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的两组基, 则它们是等价的向量组, 因此

$$(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)P, \quad (*)$$

其中 P 是 n 阶满秩矩阵, 称 P 为由基 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ 到基 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ 的过渡矩阵. 设向量 α 在基 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ 与 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ 下的坐标分别为

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix},$$

则由

$$\alpha = x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2 + \dots + x_n \xi_n = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

$$\alpha = x_1 \eta_1 + x_2 \eta_2 + \cdots + x_n \eta_n = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n) \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

及过渡矩阵知

$$\alpha = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n) \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = [(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) P] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

由坐标的唯一性得

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix},$$

即有 $X = PY$ 或者 $Y = P^{-1}X$.

(**)

我们将(*)与(**)式分别称为基变换公式和坐标变换公式.

【例 3-3-5】 已知 $\mathbf{R}^3$ 的两个基为

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \beta_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \beta_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \beta_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix},$$

求(1)由基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的过渡矩阵.

(2) 求向量 $\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的坐标.

解 (1) 设由基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的过渡矩阵为 P , 则 $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = P(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 所以

$$\begin{aligned} P &= (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^{-1} (\beta_1, \beta_2, \beta_3) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(2) 设 $\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的坐标为 $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$,

则得方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 = 2, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$$

所以向量 $\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的坐标为 $X = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$.



习题 3-3

1. 选择题

设向量 $\alpha_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$, 则三条直线 $a_i x + b_i y + c_i = 0 (i=1, 2, 3; a_i^2 + b_i^2 \neq 0)$ 交于一点的充要条件是_____.

- A. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关
 B. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关
 C. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, α_1, α_2 线性无关
 D. $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = r(\alpha_1, \alpha_2)$

(2) 向量组 $\beta_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \beta_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \beta_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, 则该向量 $\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 在这组基下的坐标是_____.

- A. $[1, 0, 0]$ B. $[0, 1, 0]$
 C. $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ D. $[1, 1, 1]$

(3) 设向量组 $\beta_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \beta_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}, \beta_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, 则由 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 生成的子空间的维数

$\dim L(\beta_1, \beta_2, \beta_3) =$ _____.

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 0

2. 求下列向量组的秩和极大无关组.

(1) $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \\ 6 \end{bmatrix}, \alpha_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix};$

$$(2) \alpha_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 8 \\ -2 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}, \alpha_4 = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 8 \\ 4 \end{bmatrix};$$

$$(3) \alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 13 \\ 3 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_4 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}, \alpha_5 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$3. \text{ 已知 } \mathbf{R}^4 \text{ 的两组基为 } \begin{cases} \alpha_1 = (1, 2, -1, 0), \\ \alpha_2 = (1, -1, 1, 1), \\ \alpha_3 = (-1, 2, 1, 1), \\ \alpha_4 = (-1, -1, 0, 1) \end{cases} \quad \text{与} \quad \begin{cases} \beta_1 = (2, 1, 0, 1), \\ \beta_2 = (0, 1, 2, 2), \\ \beta_3 = (-2, 1, 1, 2), \\ \beta_4 = (1, 3, 1, 2). \end{cases}$$

(1) 求由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 到 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 的过渡矩阵;

(2) 求 $\alpha = (1, 2, 1, 1)$ 在这两组基下的坐标.

4. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 与 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的向量.

证明: $L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = L(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t)$ 当且仅当向量组 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s\} \sim \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t\}$.

第四章 线性方程组



扫码可见本章
学习资源

线性方程组是线性代数的基本内容之一,我们前面用克莱默法则解决一类方程个数与未知量个数相同的方程组.本章将讨论一般的线性方程组,它有 s 个方程, n 个未知数.它的一般形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots \cdots \cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s, \end{cases} \quad (4-1-1)$$

其中 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 代表 n 个未知量的系数, s 是方程的个数; a_{ij} ($i=1, 2, \cdots, s; j=1, 2, \cdots, n$) 称为方程组的系数; b_i ($i=1, 2, \cdots, s$) 称为常数项.

矩阵

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{bmatrix}$$

称为方程组(4-1-1)的系数矩阵.

而矩阵

$$(A|B) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} & b_s \end{bmatrix}$$

称为方程组(4-1-1)的增广矩阵.

第一节 消元法

我们来回顾一下中学学过的消元法解线性方程组,例如解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 1, \\ \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0. \end{cases}$$

解 第二个方程乘以 2, 然后与第一个方程交换位置, 得

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0. \end{cases}$$

第二个方程减去第一个方程的 2 倍, 第三个方程减去第一个方程的 3 倍, 得

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 2, \\ x_2 - x_3 = -3, \\ 5x_2 - 2x_3 = -6. \end{cases}$$

第三个方程减去第二个方程的 5 倍, 得

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 2, \\ x_2 - x_3 = -3, \\ 3x_3 = 9. \end{cases}$$

第三个方程乘以 $\frac{1}{3}$, 得

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 2, \\ x_2 - x_3 = -3, \\ x_3 = 3. \end{cases}$$

第一个方程加上第三个方程, 第二个方程加上第三个方程, 得

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 5, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = 3. \end{cases}$$

从而求得原方程组的解为

$$\begin{cases} x_1 = 5, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = 3. \end{cases}$$

上述对方程所做的变换由以下三种基本变换所构成:

- (1) 交换两个方程的位置;
- (2) 用一个非零的数乘某一个方程;
- (3) 将一个方程乘以某个常数加到另一个方程上.

可以看出, 消元的过程就是反复实行上述三种初等变换的过程, 同时我们可以观察到对方程组所做的初等变换分别对应于其增广矩阵的初等行变换. 其实容易证明初等变换把方程组变成同解方程组, 这里我们作为结论直接应用. 方程组在变换前后的同解关系也可理解为其增广矩阵经初等行变换后行向量组的等价关系. 因此所谓的消元法, 就是对方程组所对

应的增广矩阵进行初等行变换,化为阶梯形矩阵.然后再解该阶梯形矩阵所对应的方程组,即原方程的同解方程组.

【例 4-1-1】 求解下面的线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 2. \end{cases}$$

解 该方程组所对应的增广矩阵为

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 5 & 2 \end{bmatrix},$$

对其进行初等行变换.

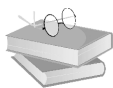
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 5 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

得到原来方程组的同解方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 1, \\ x_3 = 0, \\ -x_4 = 0. \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x_1 = 1 - 2x_2, \\ x_3 = 0, \\ -x_4 = 0, \\ x_2 \text{ 为自由未知量.} \end{cases}$$



习题 4-1

用消元法解下列线性方程组:

$$\begin{aligned} 1. & \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 6x_4 = 2. \end{cases} \\ 2. & \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8, \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9, \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5, \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

$$3. \begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ -2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ -x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 2. \end{cases}$$

第二节 线性方程组解的存在定理

由上一节我们知道,对于线性方程组我们可以通过消元法求出它的解,那么是不是所有的线性方程组都有解呢?如果不是,那么一个方程组在满足什么条件下才有解?如果有解,有多少组解呢?

下面我们先利用矩阵秩的概念给出一般线性方程组解的存在性定理.

定理 4.2.1 线性方程组 $\mathbf{AX}=\mathbf{B}$ 有解的充要条件是其系数矩阵 $\mathbf{A}$ 的秩与其增广矩阵 $(\mathbf{A}|\mathbf{B})$ 的秩相等,即 $r_{\mathbf{A}}=r_{\mathbf{A}|\mathbf{B}}$.

证明 方程组 $\mathbf{AX}=\mathbf{B}$ 可以写成向量的形式

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{\beta},$$

其中 $\boldsymbol{\alpha}_i=[a_{1i},a_{2i},\cdots,a_{si}]^T$ 是系数矩阵 $\mathbf{A}$ 的第 i 列, $\boldsymbol{\beta}=[b_1,b_2,\cdots,b_s]^T$.

必要性:若该方程组有解,即向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可以由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示,所以向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\beta}$ 与向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 等价,从而 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\beta})$, 即 $r_{\mathbf{A}}=r_{\mathbf{A}|\mathbf{B}}$.

充分性:若 $r_{\mathbf{A}}=r_{\mathbf{A}|\mathbf{B}}$,则 $(\mathbf{A}|\mathbf{B})$ 的列向量的极大线性无关组就是 $\mathbf{A}$ 的列向量的极大线性无关组,因此 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\mathbf{A}$ 的列向量线性表示,从而方程组有解.

【例 4-2-1】 判定线性方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3+2x_4=1, \\ 2x_1+3x_2+4x_3+3x_4=3, \\ x_1+x_2+3x_3+2x_4=2 \end{cases}$$

是否有解?

解 对方程组的增广矩阵施行初等行变换

$$(\mathbf{A}|\mathbf{B})=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

可知 $r_{\mathbf{A}}=3=r_{\mathbf{A}|\mathbf{B}}$,故该线性方程组有解.

【例 4-2-2】 判定线性方程组

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 + 4x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ -2x_1 + x_3 = -1, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = \lambda. \end{cases}$$

当 λ 为何值时有解?

解 对方程组的增广矩阵进行初等行变换

$$\begin{aligned} (A|B) &= \begin{bmatrix} -3 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & \lambda \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 4 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & \lambda \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & \lambda \end{bmatrix} \rightarrow \\ &\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & \lambda \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda+9 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

可知 $r_A = 3, r_{A|B} = \begin{cases} 3, & \lambda = -9, \\ 4, & \lambda \neq -9. \end{cases}$

故当 $\lambda = -9$ 时, $r_A = r_{A|B}$, 方程组有解.

【例 4-2-3】 设 t_1, t_2, t_3, t_4 是互不相等的实数, 证明方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ t_1 x_1 + t_2 x_2 + t_3 x_3 = t_4, \\ t_1^2 x_1 + t_2^2 x_2 + t_3^2 x_3 = t_4^2, \\ t_1^3 x_1 + t_2^3 x_2 + t_3^3 x_3 = t_4^3 \end{cases}$$

无解.

证明 因 t_1, t_2, t_3, t_4 互不相等, 所以由范得蒙得(Vandermonde)行列式可知

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \\ t_1^2 & t_2^2 & t_3^2 & t_4^2 \\ t_1^3 & t_2^3 & t_3^3 & t_4^3 \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq 4} (t_i - t_j) \neq 0.$$

这表明, 原方程组的增广矩阵的秩为 4, 由于系数矩阵是 4×3 阶矩阵, 所以其秩小于等于 3. 因此, 增广矩阵的秩不等于系数矩阵的秩, 故原方程组无解.

前面我们解决了方程组在什么条件下有解这个问题, 现在来研究方程组解的个数问题. 关于这个问题有下面这样一个定理.

定理 4.2.2 如果线性方程组 $AX=B$ 有解, 则

(1) 当 $r_A = r_{A|B} < n$ (n 为方程组中未知量的个数), 该线性方程组有无穷多组解;

(2) 当 $r_A = r_{A|B} = n$ 时, 该方程组有唯一解.

证明 利用初等变换解一般线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots \cdots \cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s. \end{cases} \quad (4-2-1)$$

首先看方程组中 x_1 的系数, 若 $a_{11}, a_{21}, \cdots, a_{s1}$ 全为零, 则 x_1 没有任何限制, 即 x_1 可取任意值, 从而方程组 (4-2-1) 可以看作是 $x_2, \cdots, x_n$ 的方程组来解. 如果 x_1 的系数不全为零, 不妨设 $a_{11} \neq 0$, 分别把第一个方程的 $-\frac{a_{i1}}{a_{11}}$ 倍加到第 i 个方程 ($i=2, \cdots, s$). 于是 (4-2-1) 就变成

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \cdots \cdots \cdots \\ a'_{s2}x_2 + \cdots + a'_{sn}x_n = b'_s, \end{cases} \quad (4-2-2)$$

其中

$$a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} \cdot a_{1j}, \quad i=2, \cdots, s, \quad j=2, \cdots, n.$$

再考虑方程组

$$\begin{cases} a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \cdots \cdots \cdots \\ a'_{s2}x_2 + \cdots + a'_{sn}x_n = b'_s. \end{cases} \quad (4-2-3)$$

显然方程组 (4-2-2) 有解当且仅当方程组 (4-2-3) 有解, 而 (4-2-1) 与 (4-2-2) 是同解的, 从而方程组 (4-2-1) 有解当且仅当方程组 (4-2-3) 有解.

对方程组 (4-2-3) 重复上面的讨论, 并且一步步做下去, 最后就得到一个阶梯形方程组. 为了讨论的方便, 不妨设所得的阶梯形方程组为

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1r}x_r + \cdots + c_{1n}x_n = d_1, \\ c_{22}x_2 + \cdots + c_{2r}x_r + \cdots + c_{2n}x_n = d_2, \\ \cdots \cdots \cdots \\ c_{rr}x_r + \cdots + c_{rn}x_n = d_r, \\ 0 = d_{r+1}, \\ 0 = 0, \\ \cdots \cdots \cdots \\ 0 = 0, \end{cases} \quad (4-2-4)$$

其中 $c_{ii} \neq 0, i=2, \dots, r$.

方程组(4-2-4)中的“ $0=0$ ”这样一些恒等式可能不出现也可能出现,这时去掉它们不影响(4-2-4)的解.而且(4-2-1)与(4-2-4)是同解的.

考察方程组的解的情况:

① $d_{r+1} \neq 0$ 时,方程组(4-2-4)无解,从而(4-2-1)无解.

② $d_{r+1} = 0$ 时,方程组(4-2-4)有解,从而(4-2-1)有解,此时去掉“ $0=0$ ”的方程.分两种情况:

i) 若 $r < n$, 这时阶梯形方程组可化为

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1r}x_r = d_1 - c_{1,r+1}x_{r+1} - \dots - c_{1n}x_n, \\ c_{22}x_2 + \dots + c_{2r}x_r = d_2 - c_{2,r+1}x_{r+1} - \dots - c_{2n}x_n, \\ \dots\dots\dots \\ c_{rr}x_r = d_r - c_{r,r+1}x_{r+1} - \dots - c_{rn}x_n, \end{cases} \quad (4-2-5)$$

其中 $c_{ii} \neq 0, i=2, \dots, r$.

此时方程组有无穷多个解.

ii) 若 $r = n$, 这时阶梯形方程组为

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1n}x_n = d_1, \\ c_{22}x_2 + \dots + c_{2n}x_n = d_2, \\ \dots\dots\dots \\ c_{nn}x_n = d_n, \end{cases} \quad (4-2-6)$$

其中

$$c_{ii} \neq 0, \quad i=2, \dots, n.$$

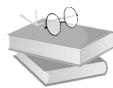
此时方程组有唯一解.

推论 4.2.1 对于齐次方程组 $\mathbf{AX}=\mathbf{0}$, 当且仅当 $r_A < n$ 时有非零解.

证明 对于齐次方程组 $\mathbf{AX}=\mathbf{0}$, 很自然地满足系数矩阵的秩与增广矩阵的秩相等, 即 $r_A = r_{A|0}$. 因此由定理 4.2.2 可知本结论成立.

当 $\mathbf{A}$ 是方阵时, 我们很自然地又有下面的结果.

推论 4.2.2 若 $\mathbf{A}$ 是 n 阶方阵, $\mathbf{AX}=\mathbf{0}$ 有非零解当且仅当 $|\mathbf{A}|=0$.



习题 4-2

1. 判定下列方程组是否有解:

$$(1) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 4, \\ 9x_1 + 25x_2 + 4x_3 = 16; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 2, \\ 11x_1 - 12x_2 + 17x_3 = 13. \end{cases}$$

2. 当 λ 为何值时下面方程组有解:

$$(1) \begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2; \end{cases} \quad (2) \begin{cases} \lambda x_1 - \lambda x_2 = 1 - \lambda, \\ x_1 + (\lambda + 1)x_2 + x_3 = \lambda, \\ x_1 + x_2 + (\lambda + 1)x_3 = \lambda^2. \end{cases}$$

第三节 线性方程组解的结构

前面我们已经解决了方程组何时有解,以及在有解条件下解的个数问题,那么当方程组有无穷多解时,方程组的众多解之间有什么样的关系呢?下面就来讨论线性方程组解的结构问题.本节所讨论的方程组的解都是以向量 $\mathbf{X}$ 的形式给出,并且所讨论的方程组都满足解的存在性定理.我们首先看齐次方程组的解的情况,然后在此基础上研究非齐次方程组的解的结构.

一、齐次方程组解的结构

首先我们来看齐次方程组 $\mathbf{AX}=\mathbf{0}$ 解的一些基本性质.

性质 4.3.1 如果 $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$ 分别满足 $\mathbf{AX}_1=\mathbf{0}, \mathbf{AX}_2=\mathbf{0}$, 则 $\mathbf{A}(\mathbf{X}_1+\mathbf{X}_2)=\mathbf{0}$.

性质 4.3.2 如果 $\mathbf{X}$ 满足 $\mathbf{AX}=\mathbf{0}$, 则对任意的常数 k , 有 $\mathbf{A}(k\mathbf{X})=\mathbf{0}$.

这两个性质是很显然的,它说明齐次线性方程组的任意两个解的线性组合仍然是该方程组的解.现在我们从向量空间的角度来看,假设用 W 来表示齐次方程组所有解构成的集合,很显然它是 n 维向量空间 $\mathbf{R}^n$ 的非空子集,由前面两个性质可以发现 W 中的元素满足对加法和数乘的封闭,从而可以知道 W 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个子空间.也就是说齐次方程组 $\mathbf{AX}=\mathbf{0}$ 的所有解构成一个 $\mathbf{R}^n$ 的子空间,称之为齐次方程组 $\mathbf{AX}=\mathbf{0}$ 的解空间.由前面向量空间的知识可以知道,要研究解空间,就必须研究解空间的基底和维数.只要求出一组基底,就可以把所有的解表示出来.在方程组理论中,称这组基底为一组基础解系.

定义 4.3.1 设 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \dots, \boldsymbol{\eta}_m$ 为齐次方程组 $\mathbf{AX}=\mathbf{0}$ 的解,并且满足

(1) $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \dots, \boldsymbol{\eta}_m$ 线性无关;

(2) 方程组 $\mathbf{AX}=\mathbf{0}$ 的任意一个解 $\mathbf{X}$ 都可以由 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \dots, \boldsymbol{\eta}_m$ 线性表示,即

$$\mathbf{X} = k_1 \boldsymbol{\eta}_1 + k_2 \boldsymbol{\eta}_2 + \dots + k_m \boldsymbol{\eta}_m,$$

其中 $k_1, k_2, \dots, k_m$ 为任意常数,则称 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \dots, \boldsymbol{\eta}_m$ 为齐次方程组 $\mathbf{AX}=\mathbf{0}$ 的基础解系. $\mathbf{X}$ 称为齐次方程组 $\mathbf{AX}=\mathbf{0}$ 的通解.

下面的定理就给出了齐次方程组基础解系的求法以及解空间的维数问题.

定理 4.3.1 在齐次线性方程组 $\mathbf{AX}=\mathbf{0}$ 有非零解的情况下,它有基础解系,并且基础解系所含解向量的个数等于 $n-r, r=r_A$.

证明 如果 $r_A < n$, 则系数矩阵 $\mathbf{A}$ 中必有一个 r 阶的非零子式,不妨设

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \end{bmatrix},$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1r}x_r = -a_{1,r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{1n}x_n, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2r}x_r = -a_{2,r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{2n}x_n, \\ \qquad \qquad \qquad \dots\dots\dots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rr}x_r = -a_{r,r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{rn}x_n. \end{array} \right. \quad (4-3-1)$$

$$\boldsymbol{\eta}_1 = [c_{11}, c_{12}, \dots, c_{1r}, 1, 0, \dots, 0]^T,$$

$$\boldsymbol{\eta}_2 = [c_{21}, c_{22}, \dots, c_{2r}, 0, 1, \dots, 0]^T,$$

.....

$$\boldsymbol{\eta}_{n-r} = [c_{n-r,1}, c_{n-r,2}, \dots, c_{n-r,r}, 0, 0, \dots, 1]^T.$$

下面证明 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-r}$ 是 $AX=0$ 的基础解系.

首先证明 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{n-r}$ 线性无关的.

事实上,若

$$k_1 \boldsymbol{\eta}_1 + k_2 \boldsymbol{\eta}_2 + \cdots + k_{n-r} \boldsymbol{\eta}_{n-r} = \mathbf{0},$$

即

$$k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\eta}_{n-r}=[*,\cdots,k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}]^T=[0,0,\cdots,0]^T.$$

所以 $k_1=k_2=\cdots=k_{n-r}=0$, 从而 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n-r}$ 线性无关的.

其次证明齐次方程组 $\mathbf{AX}=\mathbf{0}$ 任意一个解 $\mathbf{X}=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 可由 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{n-r}$ 线性表出.

事实上,由 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-r}$ 是 $AX=0$ 的解可以知道

$$a_{r+1}\boldsymbol{\eta}_1 + a_{r+2}\boldsymbol{\eta}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{\eta}_{n-r}$$

也为 $\mathbf{A}\mathbf{X}=\mathbf{0}$ 的解, 即

$$a_{r+1}\boldsymbol{\eta}_1 + a_{r+2}\boldsymbol{\eta}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{\eta}_{n-r} = [\ast, \cdots, \ast, a_{r+1}, a_{r+2}, \cdots, a_n]^T$$

为 $\mathbf{A}\mathbf{X}=\mathbf{0}$ 的解.它与 $\mathbf{X}$ 的最后 $n-r$ 个分量相同,即自由未知量的值相同,所以它们为同一个解,即

$$\mathbf{X} = a_{r+1} \boldsymbol{\eta}_1 + a_{r+2} \boldsymbol{\eta}_2 + \cdots + a_n \boldsymbol{\eta}_{n-r}.$$

由前面的证明可知, $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-r}$ 是 $\mathbf{A}\mathbf{X}=\mathbf{0}$ 的一个基础解系. 从而定理得到了证明, 而且可以知道齐次方程组 $\mathbf{A}\mathbf{X}=\mathbf{0}$ 的通解为

$$\mathbf{X} = k_1 \boldsymbol{\eta}_1 + k_2 \boldsymbol{\eta}_2 + \cdots + k_{n-r} \boldsymbol{\eta}_{n-r},$$

其中 $k_1, k_2, \dots, k_{n-r}$ 为任意常数.

注意,齐次方程组 $\mathbf{A}\mathbf{X}=\mathbf{0}$ 的基础解系并不是唯一的,实际上,方程组 $\mathbf{A}\mathbf{X}=\mathbf{0}$ 的任意 $n-r$ 个线性无关的解都是它的一个基础解系,但是不同基础解系所含线性无关的解向量的

个数是相同的,等于 $n-r$.也就是求解方程组过程中出现的自由未知量的个数.由此可见,齐次线性方程组 $\mathbf{AX}=\mathbf{0}$ 的解空间是一个 $n-r$ 维向量空间.

现在总结出求齐次线性方程组的通解步骤是:

- (1) 对方程组 $\mathbf{AX}=\mathbf{0}$ 的系数矩阵 $\mathbf{A}$ 做初等行变换,化为梯形矩阵;
- (2) 解梯形矩阵所对应的方程组得出基础解系 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{n-r}$.
- (3) 写出通解 $\mathbf{X}=k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\eta}_{n-r}, k_1, k_2, \cdots, k_{n-r}$ 为任意常数.

【例 4-3-1】 求齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0, \\ 7x_1 - 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

的基础解系及通解.

解 对方程组的系数矩阵进行初等行变换

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & 3 & 2 \\ 7 & -7 & 3 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -7 & 5 & 4 \\ 0 & -14 & 10 & 8 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -7 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

可见 $r(\mathbf{A})=2$,从而方程组基础解系所含解向量的个数为 $4-2=2$.

由同解方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ -7x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 0, \end{cases}$$

解出 x_1, x_2 得

$$\begin{cases} x_1 = \frac{2}{7}x_3 + \frac{3}{7}x_4, \\ x_2 = \frac{5}{7}x_3 + \frac{4}{7}x_4. \end{cases}$$

令 $x_3=1, x_4=0$, 得

$$\boldsymbol{\eta}_1 = \begin{bmatrix} 2/7 \\ 3/7 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

令 $x_3=0, x_4=1$, 得

$$\boldsymbol{\eta}_2 = \begin{bmatrix} 5/7 \\ 4/7 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

得原方程的基础解系为 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2$. 故通解为

$$\boldsymbol{X} = k_1 \boldsymbol{\eta}_1 + k_2 \boldsymbol{\eta}_2,$$

k_1, k_2 为任意常数.

【例 4-3-2】 求齐次方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + \lambda x_4 = 0 \end{cases}$$

的基础解系, 其中 λ 为参数.

解 对方程组的系数矩阵进行初等行变换

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & \lambda \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda - 4 \end{bmatrix}.$$

当 $\lambda = 4$ 时,

$$\boldsymbol{A} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$r_A = 2, n = 4$, 故基础解系含有两个解向量. 同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 0, \\ x_2 = 0, \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} x_1 = x_3 - 4x_4, \\ x_2 = 0, \\ x_3, x_4 \text{ 为自由未知量.} \end{cases}$$

取 $x_3 = 1, x_4 = 0$ 得 $x_1 = 1$, 即有

$$\boldsymbol{\eta}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

取 $x_3 = 0, x_4 = 1$ 得 $x_1 = -4$, 即有

$$\boldsymbol{\eta}_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

η_1, η_2 即为方程组的基础解系.

当 $\lambda \neq 4$ 时,

$$\mathbf{A} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$r_A = 3, n = 4$, 故基础解系含有 1 个解向量. 此时同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 0, \\ x_2 = 0, \\ x_4 = 0, \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} x_1 = x_3, \\ x_2 = 0, \\ x_4 = 0, \\ x_3 \text{ 为自由未知量,} \end{cases}$$

取 $x_3 = 1$, 得 $x_1 = 1$, 得此时基础解系为

$$\eta = [1, 0, 1, 0]^T.$$

二、非齐次方程组解的结构

现在来考虑一般的非齐次方程组 $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ 的解. 非齐次方程组 $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ 与它所对应的齐次方程组 $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$ 有着密切的联系, 通常把与 $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ 相对应的齐次方程组 $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$ 称为 $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ 的导出组.

先来看一看非齐次方程组 $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ 解的一些性质.

性质 4.3.3 若 $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$ 是 $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ 的任意的两个解, 则 $\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2$ 是导出组 $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$ 的解, 即

$$\mathbf{A}(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2) = \mathbf{0}.$$

证明 由条件可知, $\mathbf{AX}_1 = \mathbf{B}, \mathbf{AX}_2 = \mathbf{B}$, 故

$$\mathbf{A}(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2) = \mathbf{AX}_1 - \mathbf{AX}_2 = \mathbf{B} - \mathbf{B} = \mathbf{0}.$$

性质 4.3.4 若 $\mathbf{X}$ 是 $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ 的任意一个解, $\mathbf{X}_0$ 是导出组 $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$ 的解, 则 $\mathbf{X} + \mathbf{X}_0$ 是 $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ 的一个解, 即

$$\mathbf{A}(\mathbf{X} + \mathbf{X}_0) = \mathbf{B}.$$

证明 由条件可知

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B}, \mathbf{AX}_0 = \mathbf{0},$$

从而

$$A(X+X_0)=AX+AX_0=B+0=B.$$

这两个性质说明,非齐次方程组 $AX=B$ 的任意两个解之差是其导出组的解, $AX=B$ 的任意一个解加上导出组的任意解仍是 $AX=B$ 的解.

关于非齐次方程组 $AX=B$ 解的结构,有下面的定理.

定理 4.3.2 设 η_0 是非齐次方程组 $AX=B$ 的一个特解 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-r}$ 是其导出组 $AX=0$ 的基础解系,则该非齐次方程组的通解是

$$X=\eta_0+k_1\eta_1+k_2\eta_2+\dots+k_{n-r}\eta_{n-r},$$

这里 $k_1, k_2, \dots, k_{n-r}$ 为任意常数.

证明 设 X 是非齐次方程组 $AX=B$ 的任意一个解,则

$$X=\eta_0+(X-\eta_0).$$

由性质 4.3.3 可知, $X-\eta_0$ 是导出组 $AX=0$ 的一个解,因此, $X-\eta_0$ 可以由导出组 $AX=0$ 的基础解系 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-r}$ 线性表示,即

$$X-\eta_0=k_1\eta_1+k_2\eta_2+\dots+k_{n-r}\eta_{n-r},$$

从而

$$X=\eta_0+k_1\eta_1+k_2\eta_2+\dots+k_{n-r}\eta_{n-r}.$$

这就说明 $AX=B$ 的任意一个解都可以写成上面的形式. X 称为非齐次方程组 $AX=B$ 的通解.

从该定理还可以得到如下推论.

推论 4.3.1 非齐次方程组 $AX=B$ 有解时,它只有唯一解的充分必要条件是其导出组 $AX=0$ 只有零解,即 $r_A=n$.

【例 4-3-1】 求非齐次方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 6 \end{cases}$$

的通解.

解 对方程组的增广矩阵做初等行变换

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -2 & 6 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

可见 $r_A=r_{A|B}=2$, 故该方程组有无穷多组解, 并且 $n-r_A=3-2=1$, 故其导出组含有两个解向量.

原方程组的通解方程组为

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ -3x_2 + 3x_3 = 0, \end{cases}$$

解之得

$$\begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = x_3, \\ x_3 \text{ 为自由未知量.} \end{cases}$$

令 $x_3 = 1$, 得一个特解为

$$\boldsymbol{\eta}_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

导出组的同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ -3x_2 + 3x_3 = 0, \end{cases}$$

解之得

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = x_3, \\ x_3 \text{ 为自由未知量.} \end{cases}$$

取 $x_3 = 1$, 得导出组的基础解系为

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

从而所求非齐次方程组的通解为

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{\eta}_0 + k\boldsymbol{\eta}.$$

这里 k 为任意常数.

【例 4-3-2】 讨论 λ 取何值时, 下列方程组有解? 在有解时求出通解.

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2. \end{cases}$$

解 先计算系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式,

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 2)(\lambda - 1)^2.$$

当 $\lambda \neq 1$ 且 $\lambda \neq -2$ 时, $|\boldsymbol{A}| \neq 0$, 由克莱姆法则可知, 线性方程组有唯一解. 且

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1+\lambda}{\lambda+2}, \\ x_2 = \frac{1}{\lambda+2}, \\ x_3 = \frac{(1+\lambda)^2}{\lambda+2}. \end{cases}$$

当 $\lambda=1$ 时, 非齐次方程组的增广矩阵为

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

对其进行初等行变换得

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

可见此时 $r_A = r_{A|B} = 1$, 方程组有无穷多解, 并且其导出组的基础解系含有两个解向量. 由同解方程组

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1,$$

解得

$$\begin{cases} x_1 = 1 - x_2 - x_3, \\ x_2, x_3 \text{ 为自由未知量.} \end{cases}$$

取 $x_2 = x_3 = 1$, 得原方程组的一个特解为

$$\boldsymbol{\eta}_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

其导出组的同解方程组为

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0,$$

解得

$$\begin{cases} x_1 = -x_2 - x_3, \\ x_2, x_3 \text{ 为自由未知量.} \end{cases}$$

分别取 $x_2 = 1, x_3 = 0$ 和 $x_2 = 0, x_3 = 1$ 得导出组的基础解系为

$$\boldsymbol{\eta}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\eta}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

原方程组的通解为

$$\mathbf{X} = \boldsymbol{\eta}_0 + k_1 \boldsymbol{\eta}_1 + k_2 \boldsymbol{\eta}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + k_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

这里 k_1, k_2 为任意常数.

当 $\lambda = -2$ 时, 原方程组的增广矩阵为

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{bmatrix},$$

其中有一个三阶子式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 9 \neq 0,$$

所以 $r_{A|B} = 3$, 但此时 $|A| = 0$, 说明 $r_A < 3$, 故 $r_A \neq r_{A|B}$, 从而此时方程组无解.

【例 4-3-3】 已知 ξ_1, ξ_2, ξ_3 是 3 元非齐次线性方程组 $\mathbf{AX} = \mathbf{b}$ 的解, $r_A = 1$, 且

$$\xi_1 + \xi_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \xi_2 + \xi_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \xi_3 + \xi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

求方程组的通解.

解 因为 3 元方程组的系数矩阵 $r_A = 1$, 所以其导出组的基础解系含有两个解向量. 由非齐次线性方程组解的性质知

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\eta}_1 &= (\xi_2 + \xi_3) - (\xi_1 + \xi_2) = \xi_3 - \xi_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \boldsymbol{\eta}_2 &= (\xi_3 + \xi_1) - (\xi_2 + \xi_3) = \xi_1 - \xi_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

是 $\mathbf{AX} = \mathbf{b}$ 对应的导出组的解, 并且线性无关, 所以是基础解系.

容易验证

$$\boldsymbol{\eta}_0 = \frac{1}{2}(\xi_1 + \xi_2) = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

是 $\mathbf{AX} = \mathbf{b}$ 的解.

从而可以得到非齐次线性方程组 $\mathbf{AX} = \mathbf{b}$ 的通解为

$$\mathbf{X} = \boldsymbol{\eta}_0 + k_1 \boldsymbol{\eta}_1 + k_2 \boldsymbol{\eta}_2 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

这里 k_1, k_2 为任意常数.

【例 4-3-4】 问 a, b 为何值时, 线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1, \\ -x_2 + (a-3)x_3 - 2x_4 = b, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + ax_4 = -1 \end{cases}$$

有唯一解, 无解, 有无穷多组解? 并求出有无穷多组解时的通解.

解

$$\mathbf{B} = (\mathbf{A} : \mathbf{b}) \xrightarrow{r} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 & \vdots & b+1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & \vdots & 0 \end{bmatrix}.$$

(1) 当 $a \neq 1$ 时, $r_A = 4$, 此时方程组有唯一解;

(2) 当 $a = 1$ 时, 方程组无解或无穷多解, 此时

$$\mathbf{B} = (\mathbf{A} : \mathbf{b}) \xrightarrow{r} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & b+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix},$$

① 当 $b = -1$ 时, $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{B}) = 2 < 4$, 方程组有无穷多解, 此时

$$\mathbf{B} = (\mathbf{A} : \mathbf{b}) \xrightarrow{r} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & \vdots & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix},$$

方程组的通解为

$$\mathbf{X} = k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

k_1, k_2 为任意常数;

② 当 $b \neq -1$ 时, $r(\mathbf{A}) = 2, r(\mathbf{B}) = 3$, 方程组无解.

综上可得:

- (1) 当 $a \neq 1$ 时, 方程组有唯一解;
 (2) 当 $a=1, b=-1$ 时, 方程组有无穷多解;
 (3) 当 $a=1, b \neq -1$ 时, 方程组无解.

【例 4-3-5】 设线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + a_1 x_2 + a_1^2 x_3 = a_1^3, \\ x_1 + a_2 x_2 + a_2^2 x_3 = a_2^3, \\ x_1 + a_3 x_2 + a_3^2 x_3 = a_3^3, \\ x_1 + a_4 x_2 + a_4^2 x_3 = a_4^3. \end{cases}$$

- (1) 证明: a_1, a_2, a_3, a_4 两两不相等, 则此线性方程组无解;
 (2) 设 $a_1 = a_3 = k, a_2 = a_4 = -k (k \neq 0)$, 且已知 β_1, β_2 是该方程组的两个解, 其中

$$\beta_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \beta_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

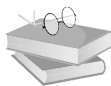
写出此方程组的通解.

证明 (1) $r(A) \leq 3$, 而

$$|B| \stackrel{\text{范德蒙行列式}}{=} \prod_{1 \leq j < i \leq 4} (a_i - a_j) \neq 0 \Rightarrow r_B = 4.$$

因为 $r(A) \neq r(B)$, 所以线性方程组无解.

(2) 计算得 $r(A) = r(B) = 2 < 3$, 方程组有无穷多解, 且对应的齐次方程组的基础解系所含解向量个数为 $n - r(A) = 3 - 2 = 1$ 个, 取为 $\xi = \beta_1 - \beta_2 = [-2, 0, 2]^T$, 则此方程组的通解为 $x = \beta_1 + k\xi$, 其中 k 为任意常数.



习题 4-3

1. 设 $\alpha_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix},$

则三条直线 $a_i x + b_i y + c_i = 0 (i=1, 2, 3)$ (其中 $a_i^2 + b_i^2 \neq 0, i=1, 2, 3$), 交于一点的充分必要条件().

- A. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关.
 B. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关.
 C. $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = r(\alpha_1, \alpha_2)$
 D. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, α_1, α_2 线性无关.

2. 非齐次线性方程组 $AX = b$ 中未知量个数为 n , 方程个数为 m , 系数矩阵 A 的秩为 r , 则().

- A. $r=m$ 时, 方程组 $AX = b$ 有解

B. $r=n$ 时, 方程组 $\mathbf{AX}=\mathbf{b}$ 有唯一解

C. $m=n$ 时, 方程组 $\mathbf{AX}=\mathbf{b}$ 有唯一解

D. $r<n$ 时, 方程组 $\mathbf{AX}=\mathbf{b}$ 有无穷多解

3. 设有齐次线性方程组 $\mathbf{AX}=\mathbf{0}$ 和 $\mathbf{BX}=\mathbf{0}$, 其中 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 均为 $m \times n$ 矩阵, 现有 4 个命题:

① 若 $\mathbf{AX}=\mathbf{0}$ 的解均是 $\mathbf{BX}=\mathbf{0}$ 的解, 则 $r_A \geq r_B$

② 若 $r_A \geq r_B$, 则 $\mathbf{AX}=\mathbf{0}$ 的解均是 $\mathbf{BX}=\mathbf{0}$ 的解

③ 若 $\mathbf{AX}=\mathbf{0}$ 与 $\mathbf{BX}=\mathbf{0}$ 同解, 则 $r_A = r_B$

④ 若 $r_A = r_B$, 则 $\mathbf{AX}=\mathbf{0}$ 与 $\mathbf{BX}=\mathbf{0}$ 同解

以上命题正确的是().

A. ①②

B. ①③

C. ②④

D. ③④

4. 求下列齐次线性方程组的基础解系和通解:

$$(1) \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0. \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 - 6x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 8x_4 = 0. \end{cases}$$

5. 求下列非齐次方程组的通解:

$$(1) \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 10, \\ 11x_1 + 3x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4, \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 2. \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7, \\ 9x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 13. \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 5, \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 8, \\ x_1 - 2x_2 - 9x_3 - 5x_4 = 21. \end{cases}$$

6. λ 取何值时, 下面的方程组无解? 有唯一解? 或有无穷多解? 在有解时, 求出通解.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = \lambda, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = \lambda^2. \end{cases}$$

7. 设 4 元非齐次线性方程组的系数矩阵的秩为 3, 已知 η_1, η_2, η_3 是它的 3 个解向量, 且

$$\eta_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \eta_2 + \eta_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

求该方程组的通解.

8. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是齐次线性方程组 $AX=0$ 一个基础解系. 证明 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$ 也是该方程组的一个基础解系.

9. 已知线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 6x_3 + 4x_4 = -1, \\ 3x_1 + 2x_2 + px_3 + 7x_4 = -1, \\ x_1 - x_2 - 6x_3 - x_4 = t. \end{cases}$$

讨论参数 p, t 取何值时, 方程组有解, 无解; 当有解时, 试用其导出组的基础解系表示通解.

10. 已知线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0, \\ a^2x_1 + b^2x_2 + c^2x_3 = 0. \end{cases}$$

(1) a, b, c 满足何种关系时, 方程组仅有零解?

(2) a, b, c 满足何种关系时, 方程组有无穷多解, 并用基础解系表示全部解.