高等职业教育课程改革系列教材

经济数学

陈 静 张生华 姚星桃 主编

GAODENG ZHIYE JIAOYU KECHENG
GAIGE XILIE JIAOCAI

南京大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

经济数学 / 陈静，张生华，姚星桃主编. —南京：南京大学出版社，2025. 9. -- ISBN 978-7-305-29313-9

Ⅰ. F224.0

中国国家版本馆 CIP 数据核字第 2025JN9946 号

出版发行　南京大学出版社
社　　址　南京市汉口路 22 号　　　邮　　编　210093

书　　名　经济数学
JINGJI SHUXUE
主　　编　陈　静　张生华　姚星桃
责任编辑　吴　华　　　　　　　　编辑热线　025-83596997

照　　排　南京开卷文化传媒有限公司
印　　刷　南京新世纪联盟印务有限公司
开　　本　787 mm×1092 mm　1/16 开　印张 29.75　字数 761 千
版　　次　2025 年 9 月第 1 版
印　　次　2025 年 9 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-305-29313-9
定　　价　75.00 元

网　　址：http://www.njupco.com
官方微博：http://weibo.com/njupco
微信服务号：NJUYUNSHU
销售咨询热线：(025)83594756

前　言

《经济数学》是高等职业院校经济管理类专业学生必修的一门公共基础课，本课程不仅为经济学研究提供了严谨的分析工具，也为经济决策和实践奠定了坚实的理论基础. 本教材编写团队秉承“服务专业，培养能力，提升素养”的理念，力求在传授数学知识的同时，将知识灵活运用于经济问题的分析与解决中，并有机融入思政元素，助力培养高素质技能人才.

本教材“以学生为中心，以应用为导向”，力求做到“学有所用、用有所依”，主要体现了以下几个特色：

1. 案例解析经济现象，数学工具活学活用

数学若脱离实际，便如无源之水；经济学若缺乏数理支撑，则似无本之木. 为此，本教材摒弃了枯燥的理论证明，代之以鲜活的经济案例. 每个章节按照“经济案例→基本概念(定理、性质)→例题讲解→解决案例”的逻辑顺序编写，让学生带着问题去探寻知识，解决问题，更让学生领悟数学在经济学中的强大生命力.

2. 内容设计分层递进，学生学习拾级而上

考虑到学生数学基础参差不齐，若教材一味求深，则易使基础弱者望而生畏；若过于浅显，又难以满足基础强者的探索欲望. 为此，本书设置了“小试牛刀”和“大展身手”两个栏目，由浅入深，由易到难，层层递进，既贴合学生的认知规律，也便于教师分层教学，因材施教.

3. 思政元素有机融入，价值引领润物无声

本教材有机融入了“名人名言”，“数学故事”，“数学文化”，“数学史”以及“应用案例”等多元化的思政元素，让学生从数学背后的人文故事领略数学智慧、从数学发展历程汲取求真创新的力量、从中国数学成就增强文化自信、从应用案例牢记科技报国的使命. 在传授数理方法的同时，潜移默化地培养学生的人文素质、科学精神和家国情怀，实现知识传授与价值引领的深度融合.

4. 特色栏目精心设置，疑难问题迎刃而解

本教材特别设置了“小提示”与“小智囊”专栏. “小提示”是对内容的进一步阐述或是对重点内容的归纳总结，“小智囊”是思维过程中的适时点拨，让学生在学习过程中感悟数学思想和方法，从而化解学习中“知识难成体系，思维固化无创新”的痛点.

本教材的编写团队由长期从事高等职业教育数学教学一线教师组成，具有丰富的教学经验和科研背景. 在编写过程中，团队多次召开研讨会，广泛征求经济管理类专业教师以及学生的意见，力求使教材内容科学严谨、贴近实际. 本教材由陈静、张生华、姚星桃担任主编，全书共有十章，第一章由秦红梅编写，第二章、第九章由姚星桃编写，第三章由周晓、张一凡编写，第四章由陈静编写，第五章、第六章由张生华编写，第七章由陈旻霞编写，第八章由林卫明编写，第十章由陈心慧编写.

刘桂香教授在编写过程中多次予以悉心指导并担任主审，南京大学出版社及吴华编辑等对教材出版给予了大力支持与帮助，在此致以诚挚的谢意！此外，我们还参考了相关的书籍和资料，在此一并向其作者表示衷心的感谢！

由于编写水平和编写时间有限，本书内容的设计思路和具体编写中还存在诸多可以提升的地方，敬请同行专家及广大读者批评指正，以便更好地修订完善.

编　者

2025 年 5 月

目　录

第一章　函数、极限与连续

扫码可见本章教学资源
（含微课、自测题及课后参考答案）

“割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣”

——刘徽

数学故事

我国古代封建社会的统治阶层重文轻理，数学家的地位非常低下，他们的生平资料几乎无从考证．尽管如此，历史的尘埃也无法掩盖我国古代这样一位伟大数学家的光芒，他的名字叫刘徽．刘徽是我国魏晋时期的伟大数学家，是中国“古典数学理论”的奠基人，他的数学著作，是中华民族的宝贵遗产，为人类文明的发展做出了不可磨灭的贡献．刘徽是我国首位以“逻辑推理”的方式来论证数学命题的数学家，他做出的数学成果，遥遥领先于世界．特别是在隋唐时期，他所作注的《九章算术》被译成多种文字，在朝鲜、日本等国家广为流传，促进了世界数学的发展．“极限”思想是人类文明中闪烁着璀璨光芒的珍珠，而刘徽是人类历史上第一个明确提出“极限”思想的数学家．刘徽将“极限”思想应用于“割圆术”，为计算“圆周率”提供了“严密的理论”和“完善的算法”．

高等数学着重研究的是变量与变量之间的依赖关系，即函数关系．函数是高等数学中最基本的概念之一，是微积分学研究的主要对象；极限是贯穿高等数学始终的重要的工具，借助于极限进行推理是这门课程的基本手段；连续则是函数的一个重要的性态，连续函数是高等数学研究的主要对象．本章将在复习和补充函数有关知识的基础上，着重讨论函数的极限和函数的连续性等问题，并介绍几种常见的经济函数．

学习目标

1．理解函数的基本概念和表示方法；了解反函数的概念；掌握函数的几个特性；掌握基本初等函数的性质与图形；理解复合函数的概念，掌握简单的复合函数的分解；了解初等函数的概念．

2．理解极限的描述性定义；通过观察图像能够直观判断函数的极限情况；了解邻域的概念．

3．掌握极限的四则运算法则以及复合函数求极限的方法；掌握两个重要极限的计算及应用．

4．理解无穷小、无穷大的概念及相互间的关系；掌握无穷小的性质；知道等价无穷小；掌握等价无穷小的替换定理．

5．理解函数连续点及间断点的概念；了解间断点的分类；掌握有关初等函数连续性的

定理;了解闭区间上连续函数的性质.

6. 了解函数极限和连续性在经济学领域的应用.

7. 能运用函数极限和连续的知识解决一些实际问题,提高数学建模和问题解决的能力.

第一节 函 数

应用案例

某城市推广绿色出行,引入了共享电单车服务.小赵赶着去参加一个重要会议,为避免堵车,他扫码解锁了一辆共享电单车.计价标准如下:

起步价(时长不超过 30 分钟)	时长费
2.0 元	1 元/5 分钟
备注:超过起步时长 1 秒时即刻开始收取时长费,每超出一个时段 1 秒起,即收取下一个时段的完整时长费用.	

(1) 当计价时长为 20 分钟,需要付多少钱?

(2) 当计价时长 42 分钟,需要付多少钱?

显然,骑车产生的费用会随着计价时长的变化而变化:(1) 需要付 2 元;(2) 需要付 $2+3=5$ 元.

生活中这一类问题随处可见,如水电费问题、贷款买房问题等.我们可以把它抽象为变量 x(计价时间设为 x)和变量 y(付费价格设为 y)之间的函数关系.

一、预备知识

1. 函数的定义

定义 1.1.1 设 x 和 y 是两个变量,D 是一个给定的数集.如果对于 D 中的每一个数 x,按照一定的法则,变量 y 总有确定的数值和它对应,则称 y 是 x 的**函数**,记作 $y=f(x)$,其中 x 称为自变量,y 称为因变量.非空数集 D 称为函数 $f(x)$ 的定义域,数集 $\{f(x) \mid x \in D\}$ 称为函数 $f(x)$ 的值域.

小提示

(1) 函数 $y=f(x)$ 中表示对应关系的记号 f 也可改用其他字母,例如"φ","F"等.这时函数就记作 $y=\varphi(x)$,$y=F(x)$ 等.

(2) 对于定义域内每一个自变量,值域有且仅有一个函数值与之对应,这种函数叫作单值函数,否则叫作多值函数.以后凡是没有特别说明时,函数都是指单值函数.

研究函数,需先讨论函数的定义域,由实际问题给出的函数,其定义域由实际意义而定

(限定定义域). 如经济函数中的价格、需求量等取值要求为非负. 对于以数学表达式表示的函数 $y=f(x)$，如果没有指明定义域，那么函数的定义域，就是使函数表达式有意义的实数 x 的集合(自然定义域).

小试牛刀

例 1.1.1　求下列函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{x^2-2x-3}$；　　　　(2) $y=\ln(2-3x)$.

解　(1) 由题意得：$x^2-2x-3\geqslant 0$，解得 $x\leqslant -1$ 或 $x\geqslant 3$.

所以函数 $y=\sqrt{x^2-3x-4}$ 定义域为 $(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$.

(2) 由题意得：$2-3x>0$，解得 $x<\dfrac{2}{3}$.

所以函数 $y=\ln(2-3x)$ 定义域为 $\left(-\infty,\dfrac{2}{3}\right)$.

大展身手

例 1.1.2　求函数 $y=\sqrt{9-x^2}+\lg(x^2-1)$ 的定义域.

解　由题意得：$\begin{cases}9-x^2\geqslant 0\\x^2-1>0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}-3\leqslant x\leqslant 3\\x<-1 \text{ 或 } x>1\end{cases}$.

所以函数 $y=\sqrt{4-x^2}+\ln(x^2-1)$ 的定义域为 $[-3,-1)\cup(1,3]$.

2. 函数的表示方法

函数的表示方式有三种：公式法又称解析法(以数学表达式表示函数的方法)、表格法(以表格形式表示函数的方法)和图示法(以图形表示函数的方法).

小提示

用解析法表示函数时，不一定只用一个表达式表示. 在自变量不同的取值范围内用不同的表达式来表示的函数称为分段函数.

如：绝对值函数(如图 1-1 所示)

$$y=|x|=\begin{cases}x & x\geqslant 0\\-x & x<0\end{cases}.$$

定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $[0,+\infty)$.

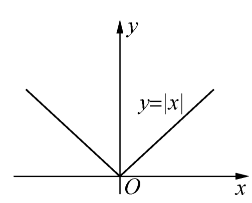


图 1-1

再如，符号函数(如图 1-2 所示)

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1 & x>0\\0 & x=0\\-1 & x<0\end{cases}.$$

定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $\{-1,0,1\}$.

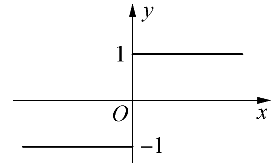


图 1-2

又如，【应用案例】中电单车的计价规则，用分段函数表示为

$$y=\begin{cases}2 & 0<x\leqslant 30\\ 2+\left\lceil\dfrac{x-30}{5}\right\rceil & x>30\end{cases}.$$

其中，x 表示计价时间，y 为付费价格，$\lceil x \rceil$为向上取整的运算，函数的定义域为 $(0,+\infty)$，值域为$\{2,3,4,5,\cdots\}$.

3. 邻域

满足不等式 $|x-x_0|<\delta$（其中 δ 为大于 0 的常数）的一切 x 所构成的集合，称为**点 x_0 的 δ—邻域**，记作 $\boldsymbol{U(x_0,\delta)}$，即

$$U(x_0,\delta)=\{x\mid |x-x_0|<\delta\}=(x_0-\delta,x_0+\delta).$$

点 x_0 称为 $U(x_0,\delta)$ 的中心，δ 称为 $U(x_0,\delta)$ 的半径，如图 1－3(a).

满足不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 的一切 x 所构成的集合，称为**点 x_0 的 δ—空心邻域**，记作 $\boldsymbol{\hat{U}(x_0,\delta)}$，如图 1－3(b)，即

$$\hat{U}(x_0,\delta)=\{x\mid 0<|x-x_0|<\delta\}=(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta).$$

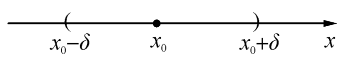


图 1－3(a)

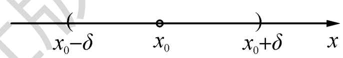


图 1－3(b)

二、反函数与反三角函数

1. 反函数

定义 1.1.2 设有函数 $y=f(x)$，其定义域为 D，值域为 $f(D)$，如果对于 $f(D)$ 中的每一个 y 值，都可以从关系式 $y=f(x)$ 确定唯一的 x 值 $(x\in D)$ 与之对应，那么由此所确定的以 y 为自变量的函数称为函数 $y=f(x)$ 的**反函数**，记为 $x=f^{-1}(y)$. 其定义域为 $f(D)$，值域为 D.

小提示

(1) 习惯上用 x 表示自变量，用 y 表示函数，所以 $y=f(x)$ 的反函数 $\boldsymbol{x=f^{-1}(y)}$ 一般记作 $\boldsymbol{y=f^{-1}(x)}$.

(2) 函数 $y=f(x)$ 的图形与其反函数 $\boldsymbol{y=f^{-1}(x)}$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称.

(3) 单调函数才有反函数.

小试牛刀

例 1.1.3 求下列函数的反函数：

(1) $y=2x+1$；　　　　(2) $y=4^x+1$.

解 (1) 由 $y=2x+1$ 解得 $x=\dfrac{y-1}{2}$，

所以函数 $y=2x+1$ 的反函数是 $y=\dfrac{x-1}{2}, x\in\mathbf{R}$.

(2) 由 $y=4^x+1$　解得 $x=\log_4(y-1)$,

所以函数 $y=4^x+1$ 的反函数是 $y=\log_4(x-1), x\in(1,+\infty)$.

大展身手

例 1.1.4　求双曲正弦函数 $y=\operatorname{sh}x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ 的反函数,并指出它的定义域.

解　令 $e^x=u$, 从而可得 $u^2-2yu-1=0$, 解得 $u=y\pm\sqrt{y^2+1}$.

因为 $u=e^x>0$, 所以上式取正号,即 $u=y+\sqrt{1+y^2}$.

将 $u=e^x$ 代入上式,得 $e^x=y+\sqrt{1+y^2}$, 于是 $x=\ln(y+\sqrt{1+y^2})$, 即得所求反函数为 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$, 其定义域为 $(-\infty,+\infty)$.

2. 反三角函数

正弦函数 $y=\sin x$ 在 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的反函数称为反正弦函数 $y=\arcsin x$, 定义域为 $[-1,1]$,值域为 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$.

余弦函数 $y=\cos x$ 在 $[0,\pi]$ 上的反函数称为反余弦函数 $y=\arccos x$, 定义域为 $[-1,1]$,值域为 $[0,\pi]$.

正切函数 $y=\tan x$ 在 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上的反函数称为反正切函数 $y=\arctan x$, 定义域为 $\mathbf{R}$, 值域为 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$.

余切函数 $y=\cot x=\dfrac{1}{\tan x}$ 在 $(0,\pi)$ 上的反函数称为反余切函数 $y=\operatorname{arccot}x$ 定义域为 $\mathbf{R}$,值域为 $(0,\pi)$.

小试牛刀

例 1.1.5　求值.

(1) $\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;　　　　(2) $\arctan\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

解　(1)因为 $\cos\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, 且 $0<\dfrac{\pi}{6}<\pi$,

所以 $\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\pi}{6}$.

(2) 因为 $\tan\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, 且 $-\dfrac{\pi}{2}<-\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{\pi}{2}$,

所以 $\arctan\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)=-\dfrac{\pi}{6}$.

大展身手

例 1.1.6 求 $\tan\left(\arcsin\dfrac{1}{3}\right)$ 值.

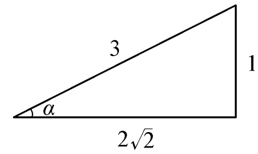


图 1－4

解 设 $\alpha=\arcsin\dfrac{1}{3}\left(\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$，$\sin\alpha=\dfrac{1}{3}$.

由辅助直角三角形(如图 1－4)可得：$\tan\left(\arcsin\dfrac{1}{3}\right)=\tan\alpha=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

三、函数的几种特性

1. 有界性

定义 1.1.3 设函数 $y=f(x)$ 在区间 D 上有定义，若存在一个正数 M，对任意 $x\in D$，恒有

$$|f(x)|\leqslant M$$

成立，则称函数 $y=f(x)$ 为 D 上的**有界函数**；否则称函数 $y=f(x)$ 为 D 上的**无界函数**.

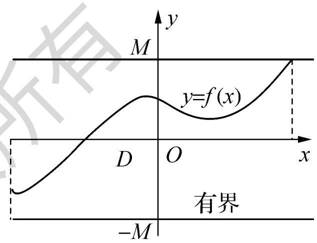


图 1－5

几何特征：如果 $y=f(x)$ 是区间 D 上的有界函数，那么它的图形在 D 上必介于两平行线 $y=\pm M$ 之间(如图 1－5).

小提示

(1) 当一个函数有界时，它的界不是唯一的；(2) 函数有界与否是和区间有关的.

2. 单调性

定义 1.1.4 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$，x_1 和 x_2 为区间 I 上的任意两个点.

若当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$，则称该函数在区间 I 上**单调递增**；

若当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$，则称该函数在区间 I 上**单调递减**.

小提示

若将定义 1.1.4 中的 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$ 写成 $f(x_1)<f(x_2)$，则 $y=f(x)$ 在区间 I 上称为严格单调递增；$f(x_1)\geqslant f(x_2)$ 写成 $f(x_1)>f(x_2)$，则 $y=f(x)$ 在区间 I 上称为严格单调递减.

几何特征：单调递增函数的图形沿横轴正向上升，单调递减函数的图形沿横轴正向下降(如图 1－6).

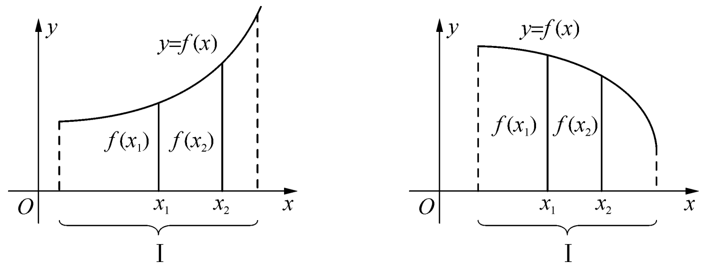


图 1-6

3. 奇偶性

定义 1.1.5　设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称.

(1) 如果对于定义域 D 中的任何 x，都有 $f(-x)=f(x)$，则称 $y=f(x)$ 为**偶函数**；

(2) 如果对于定义域 D 中的任何 x，都有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $y=f(x)$ 为**奇函数**.

既不是奇函数也不是偶函数的函数，称为**非奇非偶函数**.

几何特征：奇函数的图形关于原点对称，偶函数的图形关于 y 轴对称(如图 1-7).

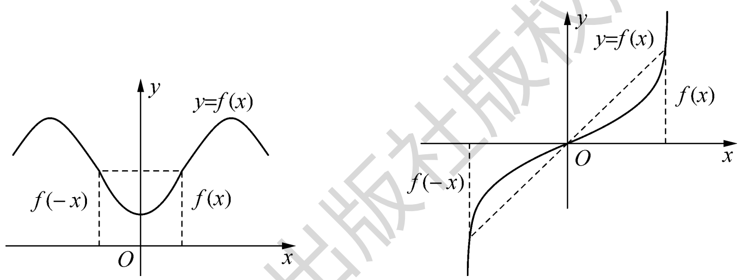


图 1-7

小试牛刀

例 1.1.7　判断下列函数的奇偶性.

(1) $y=x^2-1$；　(2) $y=\dfrac{a^x-a^{-x}}{2}$；　(3) $y=4x+\cos x$.

解　(1) 因为该函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，且有

$$f(-x)=(-x)^2-1=x^2-1=f(x).$$

所以，函数 $y=x^2-1$ 是偶函数.

(2) 因为该函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，且有

$$f(-x)=\frac{a^{-x}-a^x}{2}=-\frac{a^x-a^{-x}}{2}=-f(x).$$

所以，函数 $y=\dfrac{a^x-a^{-x}}{2}$ 是奇函数.

(3) 因为该函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，因为

$f(-x)=4(-x)+\cos(-x)=-4x+\cos x$，此时 $f(-x)$ 既不等于 $-f(x)$，也不等于 $f(x)$.

所以，函数 $y=4x+\cos x$ 是非奇非偶函数.

大展身手

例 1.1.8 判断函数 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 的奇偶性.

解 方法一

该函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，且有

$$f(-x)=\ln(-x+\sqrt{1+x^2})=\ln\frac{(-x+\sqrt{1+x^2})(x+\sqrt{1+x^2})}{x+\sqrt{1+x^2}}$$

$$=\ln\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}=\ln 1-\ln(x+\sqrt{1+x^2})=-\ln(x+\sqrt{1+x^2})=-f(x),$$

所以，函数 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 是奇函数.

方法二

因为该函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，且有

$$f(-x)+f(x)=\ln(-x+\sqrt{1+x^2})+\ln(x+\sqrt{1+x^2})=\ln 1=0,$$

所以，函数 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 是奇函数.

小智囊

设函数 $y=f(x)$ 的定义域关于原点对称，也可用 $f(-x)+f(x)=0$ 来判定是奇函数.

4. 周期性

定义 1.1.6 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，如果存在一个正数 l，使得对于任意 $x\in D$，有 $x\pm l\in D$ 且等式

$$f(x+l)=f(x)$$

恒成立，则称 $y=f(x)$ 为**周期函数**，l 称为这个函数的**周期**.

小提示

(1) 对于每个周期函数来说，周期有无穷多个.

(2) 如果在周期函数的所有周期中存在一个最小正数 a，则规定 a 为该周期函数的最小正周期，简称周期. 如：$y=\sin x$，$y=\tan x$ 的周期分别为 2π，π.

(3) 不是所有的周期函数都有最小正周期.

例如，狄利克雷函数

$$y=D(x)=\begin{cases}1 & x\text{ 为有理数}\\0 & x\text{ 为无理数}\end{cases}.$$

它是一个周期函数，任何有理数都是它的周期，但它没有最小正周期.

四、常用的函数

1. 基本初等函数

幂函数 $y=x^{\alpha}(\alpha\in\mathbf{R})$.

指数函数 $y=a^{x}(a>0$ 且 $a\neq 1)$.

对数函数 $y=\log_{a}x(a>0$ 且 $a\neq 1)$.

三角函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$.

反三角函数 $y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\operatorname{arccot} x$.

以上函数统称为基本初等函数.

2. 复合函数

定义 1.1.7　设函数 $y=F(u)$ 的定义域为 U_1，函数 $u=\Phi(x)$ 的值域为 U_2，其中 $U_2\subseteq U_1$，则 y 通过变量 u 成为 x 的函数，这个函数称为由函数 $y=F(u)$ 和函数 $u=\Phi(x)$ 构成的**复合函数**，记为 $y=F[\Phi(x)]$，其中变量 u 称为中间变量.

小试牛刀

例 1.1.9　写出下列函数构成的复合函数：

(1) $y=\ln u$ 和 $u=x^{4}$；　　(2) $y=u^{3}$，$u=\sin v$ 和 $v=\dfrac{x}{2}$.

解　(1) 因为 $y=\ln u$ 而 $u=x^{4}$，满足定义 1.1.7 中的复合条件，u 是中间变量，所以 $y=\ln u=\ln x^{4}$.

(2) 因为 $y=u^{3}$ 而 $u=\sin v$，$v=\dfrac{x}{2}$，满足定义 1.1.7 中的复合条件，u，v 是中间变量

所以 $y=u^{3}=\sin^{3}v=\sin^{3}\dfrac{x}{2}$.

小提示

并非任何两个函数都可构成复合函数.

如：函数 $y=\arcsin u$ 与 $u=3+x^{2}$ 就不能复合成一个复合函数，因为 $y=\arcsin x$ 的定义域 $U_1=[-1,1]$，$u=3+x^{2}$ 的值域 $U_2=[3,+\infty]$，显然 $U_2\not\subseteq U_1$，所以不能复合.

例 1.1.10　指出下列各复合函数的复合过程.

(1) $y=\tan(3x+2)$；　(2) $y=\mathrm{e}^{\cos x}$；　(3) $y=\sqrt[3]{(x^{2}-1)^{2}}$.

解　(1) $y=\tan(3x+2)$ 是由 $y=\tan u$，$u=3x+2$ 复合而成.

(2) $y=\mathrm{e}^{\cos x}$ 是由 $y=\mathrm{e}^{u}$，$u=\cos x$ 复合而成的.

(3) $y=\sqrt[3]{(x^{2}-1)^{2}}$ 是由 $y=u^{\frac{2}{3}}$，$u=x^{2}-1$ 复合而成的.

大展身手

例 1.1.11　指出下列各复合函数的复合过程.

(1) $y=\sin^{2}(2x+5)$；　　(2) $y=7\cot\sqrt{1-x^{2}}$.

解 (1) $y=\sin^2(2x+5)$ 是由 $y=u^2, u=\sin v, v=2x+5$ 复合而成.

(2) $y=7\cot\sqrt{1-x^2}$ 是由 $y=7\cot u, u=\sqrt{v}, v=1-x^2$ 复合而成.

3. 初等函数

定义 1.1.8 由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合所构成并且可用一个式子表示的函数,称为**初等函数**.

如:$y=\sqrt{1-x^2}, y=\sin^2 x$.

五、经济中几种常见的函数

1. 需求函数、供给函数

1.1 需求函数

需求量是指在一定时间内,消费者对某种商品有支付能力而且愿意购买的商品数量.需求量受到诸多因素的影响,如该商品的市场价格、季节、消费者的偏好等,其中市场价格是影响需求量的一个主要因素.为了便于讨论,假设商品的需求量仅考虑受市场价格的影响,因此,可以把商品的需求量看着是该商品价格的函数,称为**需求函数**.用 Q 表示商品的需求量,p 表示商品的价格,则需求函数为

$$Q=Q(p).$$

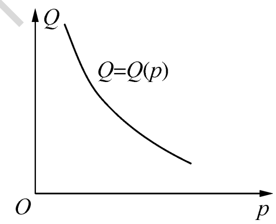


图 1－8

通常降低商品的价格会使需求量增加,提高商品的价格会使需求量减少(如图 1－8).

需求函数 $Q=Q(p)$ 的反函数,就是**价格函数**,记作 $P=P(q)$,也反映商品的价格与需求的关系.

小提示

当价格为因变量时,用大写 P 来表示,而当它为自变量时,则用小写 p 来表示;同理当需求量为因变量时,用大写 Q 来表示,而当它为自变量时,则用小写 q 来表示.

常见的需求函数有以下几种类型:

(1) 线性需求函数:$Q=a-bp(a>0, b>0)$;

(2) 二次需求函数:$Q=a-bp-cp^2(a>0, b\geqslant 0, c>0)$;

(3) 指数需求函数:$Q=Ae^{-bp}(A>0, b>0)$.

小试牛刀

例 1.1.12 某品牌玩具在市场上销售,公司希望通过调整价格来预测市场需求变化.已知当售价为每件 70 元时,市场需求量为 3.1 万件,若该品牌玩具每件降低 3 元,需求量将增加 0.03 万件,试求(1) 该品牌玩具的线性需求函数;(2) 当该品牌玩具的售价为 75 元时,市场需求量是多少?

解 (1) 设线性需求函数为 $Q=a-bp(a>0, b>0)$.

由题意知 :$Q+0.03=a-b(p-3)$,把 $Q=a-bp$ 代入,得 $a-bp+0.03=a-b(p-$

3)，所以 $b=0.01$.

把 $Q=3.1, b=0.01, p=70$ 代入 $Q=a-bp$，得 $3.1=a-0.01\times70$，所以 $a=3.8$.

因此该品牌玩具的线性需求函数为 $Q=3.8-0.01p$.

(2) 当 $p=75$ 元时，市场需求量为

$$Q=3.8-0.01\times75=3.05(\text{万件}).$$

1.2　供给函数

供给是指在某一特定时期内，经营者在一定价格条件下愿意并可能出售的产品量，其中包括新提供的商品和已有的存货. 供给是与需求相对应的概念，需求是就市场中的消费者而言，供给是就市场中的生产销售者而言. 某种商品的市场供给量 S 也受商品价格 p 的制约，价格上涨将刺激生产者向市场提供更多的商品，供给量增加；反之，价格下跌将使供给量减少(如图 1－9). 在假定其他因素不变的条件下，供给量 S 也可看成价格 p 的函数，称为**供给函数**，记作

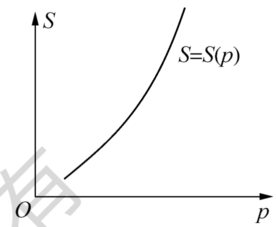


图 1－9

$$S=S(p).$$

小提示

一般地，需求函数是价格的单调减函数，供给函数是价格的单调增函数.

当市场上某种商品的需求量与供给量相等时，需求量与供给量持平. 此时该商品市场处于平衡状态，称为**供需平衡**，**这时商品的价格称为市场平衡价格**或**均衡价格**，记作 p_0，对应的需求量称为**均衡量**记作 Q_0(如图 1－10).

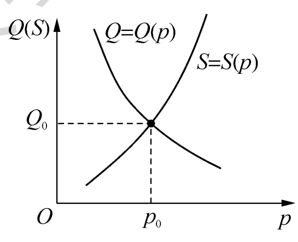


图 1－10

小提示

当市场价格 $p>p_0$ 时，供应量大于需求量，即商品“供过于求”，会导致商品价格下降. 当市场价格 $p<p_0$ 时，供应量小于需求量，即商品“供不应求”，会导致商品价格上升.

小试牛刀

例 1.1.13　某地特色农产品“绿源有机大米”在本地市场销售，农户与经销商需根据市场供需调整种植和定价策略. 已知该大米的供给函数是 $S=\dfrac{2}{3}p-4$，需求函数是 $Q=50-$

$\frac{4}{3}p$，现需计算市场平衡状态下的均衡价格 p_0 和均衡量 Q_0，以帮助农户合理规划生产.

解 据题意，$\frac{2}{3}p_0-4=50-\frac{4}{3}p_0$，所以均衡价格 $p_0=27$.

此时均衡量 $Q_0=50-\frac{4}{3}\times 27=14$.

2. 成本函数、收入函数与利润函数

2.1 成本函数

总成本是指生产某种一定数量产品需要的费用，它包括固定成本和可变成本. **固定成本**是指在短时间内不发生变化或不明显地随产品数量增加而变化的费用，例如厂房、设备、一般管理费及管理人员的工资等. **可变成本**是指随产品数量的变化而变化的费用，如原材料、燃料及生产工人的工资等.

一般用 C 表示总成本，用 C_0 表示固定成本，C_1 表示可变成本，q 表示产量，那么**总成本函数**为

$$C(q)=C_0+C_1(q),$$

其中固定成本 C_0 与产量 q 无关，可变成本 $C_1(q)$ 随产量 q 的增加而增加.

平均成本是指生产每个单位的成本，**平均成本函数**记为 $\bar{C}(q)$，即

$$\bar{C}(q)=\frac{C(q)}{q}.$$

小提示

一般情况下，总成本函数是一个单调递增函数，平均成本函数是一个单调递减函数，即随着产品产量的增加总成本越来越大，平均成本越来越小.

2.2 收入函数

总收入是指企业销售一定数量的产品所获得的全部收入，它等于产品的销售价格与销售数量的乘积.

一般用 R 表示收入，p 表示价格，q 表示销量，那么**总收入函数**为

$$R(q)=pq.$$

小提示

在以后的讨论中，一般把实际问题理想化，假设：产量＝销量＝需求量.

2.3 利润函数

总收入函数 $R(q)$ 与总成本函数 $C(q)$ 的差值称为**利润函数**，记作 $L(q)$，即

$$L(q)=R(q)-C(q).$$

小提示

当 $L=R-C>0$ 时，生产者盈利；当 $L=R-C<0$ 时，生产者亏损；$L=R-C=0$ 时，生产者盈亏平衡.

小试牛刀

例 1.1.14　某手工作坊专门生产手工精油香皂，主打天然环保理念. 作坊的固定成本(如设备租金、基础原料采购)为每月 200 元，每生产一块香皂需额外投入 10 元(包括精油、包装等). 根据市场调研该香皂的产量函数 为 $Q=50-2p$，现需建立该香皂的收入函数和利润函数，帮助作坊优化定价策略.

解　收入函数：$R(p)=(50-2p)p=-2p^2+50p$.

成本函数：$C(p)=200+10(50-2p)=-20p+700$.

利润函数：$L(p)=R(p)-C(p)=-2p^2+50p-(-20p+700)=-2p^2+70p-700$.

大展身手

例 1.1.15　某小型手工艺品工作室生产手工陶瓷杯，主打个性化定制. 已知手工陶瓷杯的成本函数为 $C(q)=12+3q+q^2$. 若陶瓷杯售价为每件 11 元时，(1) 分析该手工陶瓷杯的盈亏情况；(2) 若每天销售 10 件该手工陶瓷杯，为了不亏本销售，单价应定为多少才合适？

解　(1) 利润函数 $L(q)=R(q)-C(q)=11q-(12+3q+q^2)=-q^2+8q-12$.

由 $L(q)=0$，即 $-q^2+8q-12=0$，得两个盈亏平衡点 $q_1=2$ 和 $q_2=6$.

当 $q<2$ 或 $q>6$ 时，有 $L(q)<0$，这时是亏损的；

当 $2<q<6$ 时，有 $L(q)>0$，这时是盈利的.

(2) 设定价为每件 p 元，则利润函数为

$$L(q)=R(q)-C(q)=pq-(12+3q+q^2).$$

为了不亏本销售，有 $L(10)\geqslant 0$，即 $10p-(12+30+100)\geqslant 0$，$p\geqslant 14.2$.

因此，此时的销售单价应不低于 14.2 元.

习题 1.1

小试牛刀

1. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\sqrt{x-2}+\dfrac{1}{x-3}+\ln(5-x)$；　　(2) $y=\arcsin\dfrac{x-1}{2}$.

2. 确定下列函数的奇偶性.

(1) $f(x)=\dfrac{x^8\cos x}{1+x^2}$；　　(2) $f(x)=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$；

(3) $f(x)=x^4+2^x-3$.

3. 求下列函数的反函数.

(1) $y=\dfrac{x-1}{x+2}(x\neq -2)$； (2) $y=e^x+1$.

4. 求值.

(1) $\arcsin\left(-\dfrac{1}{2}\right)$； (2) $\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

5. 指出下列函数的复合过程.

(1) $y=\cos x^2$； (2) $y=\sin^5 x$；

(3) $y=\sqrt{3x-1}$.

6. 某工厂生产某产品的总成本函数为 $C(q)=q^3-9q^2+33q+10$，该产品的价格函数为 $P=75-q$，求(1) 产量为 10 时的平均成本；(2) 产量为 10 时的利润.

大展身手

7. 设 $f(x)=\begin{cases}2+x & x\leqslant 0\\ 2^x & x>0\end{cases}$，求 $f(\Delta x)-f(0)$(Δx 表示一个数).

8. 求值.

(1) $\tan\left(\arcsin\dfrac{2}{3}\right)$； (2) $\sin\left(2\arccos\dfrac{1}{3}\right)$.

9. 已知函数 $f(x)$ 是奇函数，当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f(x)=x^2-x+1$. 求当 $x\in(-\infty,0)$ 时，函数 $f(x)$ 的表达式.

10. 指出下列函数的复合过程.

(1) $y=e^{\cos 3x}$； (2) $y=\arcsin\sqrt{x^2-1}$；

(3) $y=5^{\ln(x^2+2)}$.

11. 某工厂每天生产 q 件服装的总成本为 $C(q)=\dfrac{1}{9}q^2+q+\dfrac{800}{9}$(元)，该种服装独家经营市场，需求量为 $Q=75-3p$. 问每天生产多少件时盈亏持平，此时每件服装的价格为多少元？

第二节 极限的概念

应用案例 1

设有一圆，半径为 R，如图 1－11 所示. 首先作内接正六边形，把它的面积记为 S_1；再作内接正十二边形，其面积记为 S_2；如此下去，每次边数加倍，一般地，把内接正 $6\times 2^{n-1}$ 形的面积记为 S_n. 这样就得到一系列内接正 $6\times 2^{n-1}$ 多边形的面积

$$S_1, S_2, S_3, \cdots, S_n \cdots$$

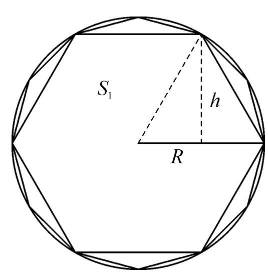


图 1－11

它们构成一列有次序的数，当 n 越大时，内接正多边形的面积与圆面积的误差就越小，那么当 n 取多大时，可以忽略 S_n 与圆面积的误差，进而表示圆的面积呢？

应用案例 2

假设某个经济体系中存在总量为 a 的不良资产，且这些不良资产均匀分布在体系中. 现在采取一种策略，即从外部引入优质资产，同时从体系内部排出部分资产，以此来稀释不良资产的比例. 假设在这个过程中，经济体系的总体规模保持不变，且每周能够排除不良资产残留量的 $\frac{1}{5}$. 试问这种策略能否有效地清理经济体系中的不良资产？

一、数列的极限

1. 数列的概念

定义 1.2.1　自变量为正整数的函数 $u_n=f(n)(n=1,2,3,\cdots)$，其函数值按自变量从小到大排列的一列数

$$u_1,u_2,u_3,\cdots u_n,\cdots$$

称为**数列**，记为 $\{u_n\}$. 数列中的每一个数称为**数列的项**，第 n 项 u_n 称为数列的**通项或一般项.**

数列对应着数轴上一个点列，可看作一动点在数轴上依次取点 $u_1,u_2,u_3,\cdots,u_n,\cdots$（如图 1－12 所示）.

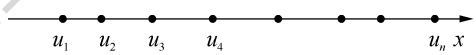


图 1－12

若数列 $\{u_n\}$ 满足 $u_n\leqslant u_{n+1}(n=1,2,3,\cdots)(n=1,2,3,\cdots)$，则称为单调递增数列；若满足 $u_n\geqslant u_{n+1}(n=1,2,3,\cdots)$，则称为单调递减数列. 这两种数列统称为单调数列.

如果对于数列 $\{u_n\}$，存在一个正常数 M，使得 $|u_n|\leqslant M(n=1,2,3,\cdots)$，则称数列 $\{u_n\}$ 为有界数列.

例如，$\{u_n\}:3,\frac{5}{2},\frac{7}{3},\cdots,2+\frac{1}{n},\cdots$　　为有界单调递减数列；

$\{u_n\}:0,\frac{1}{2},\frac{2}{3},\cdots,1-\frac{1}{n},\cdots$　　为有界单调递增数列；

$\{u_n\}:1,2,1,\frac{3}{2},1,\cdots,1+\frac{1+(-1)^n}{n},\cdots$　　为有界非单调数列.

2. 数列的极限

观察上述例子可以发现，当 n 无限增大时，数列各项呈现出确定的变化趋势，即无限趋近于一个确定的常数，这就是极限现象.

定义 1.2.2　对于数列 $\{u_n\}$，当 n 无限增大时，如果 u_n 无限地趋近于一个确定的常数 A，那么就称 A 为**数列 $\{u_n\}$ 的极限**，此时亦称数列 $\{u_n\}$ 收敛于 A，记为

$$\lim_{n\to\infty}u_n=A \quad 或 \quad u_n\to A(n\to\infty).$$

小提示

若数列 $\{u_n\}$ 没有极限，则称数列 $\{u_n\}$ 是发散的.

小试牛刀

例 1.2.1 问下列数列的极限是否存在？

(1) $\left\{\dfrac{1}{3^n}\right\}$；　　(2) $\left\{\dfrac{n+1}{n}\right\}$；　　(3) $\left\{\dfrac{1+(-1)^n}{2}\right\}$.

解 (1) 当 n 无限增大时，$\dfrac{1}{3^n}$ 无限接近于 0，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{3^n}=0$；

(2) 当 n 无限增大时，$\dfrac{n+1}{n}$ 无限接近于 1，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n}=1$；

(3) 当 n 取奇数时 $u_n=0$，当 n 取偶数时 $u_n=1$，显然随着 n 的无限增大，$\dfrac{1+(-1)^n}{2}$ 没有无限趋近于一个确定的常数，所以数列 $\left\{\dfrac{1+(-1)^n}{2}\right\}$ 没有极限.

小提示

极限 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=A$ 是指数列的项数无限增大时，通项无限趋近于常数 A；或者说通项 u_n 与常数 A 的距离 $|u_n-A|$ 无限地趋近于 0.

大展身手

例 1.2.2 【应用案例 1】中如何表示圆的面积？（如图 1-11）

解 设内接正多边形的边数为 $6\times2^{n-1}$，将圆心与圆内接正多边形各边顶点相连接，则得到 $6\times2^{n-1}$ 个全等的等腰三角形，每一个三角形的面积均为

$$\frac{1}{2}Rh=\frac{1}{2}R\left(R\sin\frac{2\pi}{6\times2^{n-1}}\right)=\frac{1}{2}R^2\sin\frac{\pi}{3\times2^{n-1}}.$$

所以，$S_n=\dfrac{6\times2^{n-1}}{2}R^2\sin\dfrac{\pi}{3\times2^{n-1}}=3\times2^{n-1}R^2\sin\dfrac{\pi}{3\times2^{n-1}}$.

于是圆的面积可表示为 $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}3\times2^{n-1}R^2\sin\dfrac{\pi}{3\times2^{n-1}}$.（此极限的求解见例 1.4.19）

例 1.2.3 【应用案例 2】中清理不良资产问题.

解 第 1 周污染物的残留量为 $\dfrac{4}{5}a$；

第 2 周污染物的残留量为 $\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{4}{5}a=\left(\dfrac{4}{5}\right)^2a$；

第 3 周污染物的残留量为 $\dfrac{4}{5}\cdot\left(\dfrac{4}{5}\right)^2a=\left(\dfrac{4}{5}\right)^3a$；

……

第 n 周污染物的残留量为 $\left(\frac{4}{5}\right)^n a$；

所以当 $n\to\infty$，$\left(\frac{4}{5}\right)^n a$ 的极限值为 0，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n a=0$.

从计算结果看，要想把不良资产清理干净，需要足够长的时间，这个代价太大了，因此，我们要增强安全意识，谨防不良资产的入侵.

有界数列与收敛数列有怎样的关系呢？我们不加证明地给出下列定理.

定理 1.2.1　单调有界数列必定收敛.

定理 1.2.2　收敛数列必定有界.

二、函数的极限

1. $x\to\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限

函数的自变量 $x\to\infty$ 是指 $|x|$ 无限增大，它包含以下两种情况.

(1) x 取正值而无限增大，记作 $x\to+\infty$；

(2) x 取负值而它的绝对值无限增大，记作 $x\to-\infty$.

例如，考察当 $x\to\infty$ 时，函数 $y=\frac{1}{x}$ 的变化趋势. 由图 1－13 可知，当自变量 x 的绝对值无限增大时，相应的函数值 y 无限地逼近于常数 0.

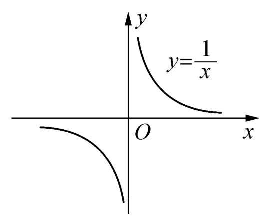


图 1－13

定义 1.2.3　如果当 $|x|$ 无限增大（即 $x\to\infty$）时，函数 $f(x)$ 无限地趋近于一个确定的常数 A，那么就称数 A 为当 **$x\to\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限**，记作

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A(x\to\infty).$$

根据定义 1.2.3，有 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$.

定义 1.2.4　如果当 $x\to+\infty$ 时，函数 $f(x)$ 无限地趋近于一个确定的常数 A，那么就称数 A 为当 **$x\to+\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限**，记作

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A(x\to+\infty).$$

定义 1.2.5　如果当 $x\to-\infty$ 时，函数 $f(x)$ 无限地趋近于一个确定的常数 A，那么就称数 A 为当 **$x\to-\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限**，记作

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A(x\to-\infty).$$

定理 1.2.3　$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 存在的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 都存在且相等，即

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}f(x)=A.$$

证明从略.

小试牛刀

例 1.2.4 讨论函数 $y=\arctan x$ 当 $x\to\infty$ 时的极限.

解 根据函数 $y=\arctan x$ 的图形变化趋势易见.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 不存在.

2. $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限

记号 $x\to x_0$ 表示 x 无限趋近于 x_0，包含 x 从大于 x_0 和 x 从小于 x_0 的方向趋近于 x_0 两种情况：

(1) $x\to x_0^+$ 表示 x 从大于 x_0 的方向趋近于 x_0；

(2) $x\to x_0^-$ 表示 x 从小于 x_0 的方向趋近于 x_0.

例如，考察当 $x\to 2$ 时，函数 $f(x)=\dfrac{2(x^2-4)}{x-2}$ 的变化趋势.

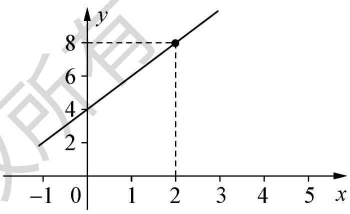


图 1－14

由图 1－14 不难看出，当 $x\to 2$ 时，$f(x)$ 趋于常数 8.

定义 1.2.6 如果当 $x\to x_0(x\neq x_0)$ 时，函数 $f(x)$ 无限地趋近于一个确定的常数 A，那么就称数 A 为当 $\boldsymbol{x\to x_0}$ **时的函数 $f(x)$ 的极限**，记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A(x\to x_0).$$

由定义 1.2.6，$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2(x^2-4)}{x-2}=8$.

定义 1.2.7 如果当 $x\to x_0^+$ 时，函数 $f(x)$ 无限地趋近于一个确定的常数 A，那么就称数 A 为当 $x\to x_0$ 时的函数 $f(x)$ 的**右极限**，记作

$$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A \quad 或 \quad f(x+0)=A.$$

如果当 $x\to x_0^-$ 时，函数 $f(x)$ 无限地趋近于一个确定的常数 A，那么就称数 A 为当 $x\to x_0$ 时的函数 $f(x)$ 的**左极限**，记作

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A \quad 或 \quad f(x-0)=A.$$

定理 1.2.4 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 都存在且相等，即

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim_{x\to x_0^-}f(x)=\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A.$$

证明从略.

小智囊

由定义易得 $\lim\limits_{x\to x_0}C=C$；$\lim\limits_{x\to x_0}x=x_0$.

小试牛刀

例 1.2.5　求 $\lim\limits_{x\to 1}(x^2+1)$.

解　函数 $f(x)=x^2+1$ 的图形如图 1－15 所示，显然，当 $x\to 1$ 时，$x^2+1\to 2$，所以

$$\lim_{x\to 1}(x^2+1)=2.$$

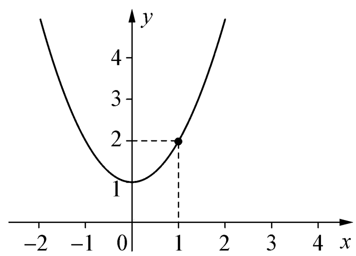


图 1－15

大展身手

例 1.2.6　已知 $f(x)=\begin{cases}x^2 & x<3\\ 3x & x>3\end{cases}$，求 $\lim\limits_{x\to 3}f(x)$.

解　函数 $f(x)$ 的图形如图 1－16 所示.

因为 $\lim\limits_{x\to 3^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}x^2=9$，$\lim\limits_{x\to 3^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}3x=9$，即 $\lim\limits_{x\to 3^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}f(x)=9$，所以 $\lim\limits_{x\to 3}f(x)=9$.

例 1.2.7　已知 $f(x)=\begin{cases}x^2+1 & x<0\\ x-1 & x\geqslant 0\end{cases}$，求 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

解　函数 $f(x)$ 的图形如图 1－17 所示.

因为 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x^2+1)=1$，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x-1)=-1$，即 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在.

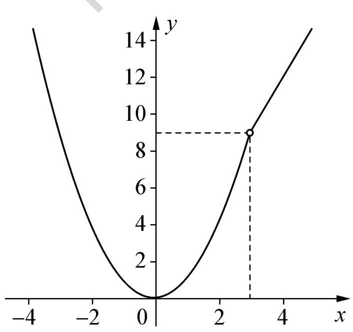


图 1－16

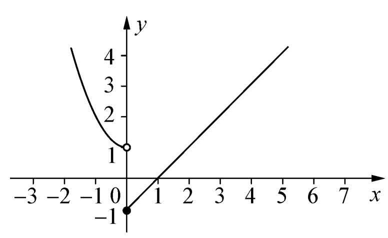


图 1－17

小提示

求分段函数在分段点处的极限，通常要分别考察其左右极限.

3. 极限的性质

性质 1.2.1（唯一性） 若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = B$，则 $A = B$.

性质 1.2.2（有界性） 若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，则存在 x_0 的某一空心邻域 $\hat{U}(x_0, \delta)$，在 $\hat{U}(x_0, \delta)$ 内函数 $f(x)$ 有界.

性质 1.2.3（保号性） 若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，且 $A > 0$（或 $A < 0$），则存在 x_0 的某一空心邻域 $\hat{U}(x_0, \delta)$，在 $\hat{U}(x_0, \delta)$ 内函数 $f(x) > 0$（或 $f(x) < 0$）.

推论 1.2.1 若在 x_0 的某一空心邻域 $\hat{U}(x_0, \delta)$ 内，函数 $f(x) \geqslant 0$（或 $f(x) \leqslant 0$）且 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，则 $A \geqslant 0$（或 $A \leqslant 0$）.

习题 1.2

小试牛刀

1. 观察下列数列的变化趋势，对收敛数列写出它们的极限.

(1) $\left\{2 + \dfrac{1}{n^2}\right\}$； (2) $\left\{\dfrac{1-n}{2n-1}\right\}$；

(3) $\{(-1)^n n\}$； (4) $\left\{\dfrac{n+1}{n+2}\right\}$.

2. 绘出下列函数的图形，并求出指定的极限.

(1) $y = e^x\ (x \to -\infty)$； (2) $y = \ln x\ (x \to 1)$；

(3) $y = 5 - \dfrac{1}{x}\ (x \to 2)$； (4) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}\ (x \to -1)$.

大展身手

3. 判断下列命题是否正确？若不正确举例说明.

(1) 收敛数列一定是单调数列.

(2) 若 $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = |A|$，则 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

4. 已知函数 $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$，讨论 $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ 是否存在？

5. 证明函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x < 1 \\ 0 & x = 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$，当 $x \to 1$ 时的极限不存在.

6. 你夜间走在街道上，假如距你 x 米远的正前方有一盏高 H 米的路灯随着你距离路灯

越来越近，你会发现身后的影子越来越短，当你走到路灯的正下方发现影子不见了．试用数学知识解释一下其中的原因．

第三节　无穷小与无穷大

应用案例

某骑行爱好者计划从 A 市骑行到 B 市进行环保宣传活动，从 A 市到 B 市以 30 km/h 的速度完成．活动结束后，她需尽快返回 A 市参加紧急会议，希望整个往返行程的平均速度达到 60 km/h．现需计算返程所需的最低骑行速度，并分析其可行性．

一、无穷小量

1．无穷小量的定义

定义 1.3.1　如果当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时，函数 $f(x)$ 的极限为 0，那么就称函数 $f(x)$ 为 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的**无穷小量**，简称为**无穷小**．记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=0\ (\text{或}\lim_{x\to\infty}f(x)=0).$$

例如，因为 $\lim\limits_{x\to 1}(x^3-1)=0$，所以函数 x^3-1 是当 $x\to 1$ 时的无穷小量．又如，因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-x}=0$，所以函数 e^{-x} 是当 $x\to+\infty$ 时的无穷小量．

小提示

(1) 无穷小量是与自变量 x 的变化过程紧密相关的，因此，必须指明自变量 x 的变化过程．

(2) 无穷小量表达的是量的变化状态，而不是量的大小，不能与绝对值很小的常数混为一谈．

(3) 0 是唯一可作为无穷小量的常数．

(4) 当 $x\to x_0^+$，$x\to x_0^-$，$x\to+\infty$，$x\to-\infty$ 时，可得到相应的无穷小量定义．

小试牛刀

例 1.3.1　自变量在怎样的变化过程中，下列函数为无穷小量．

(1) $y=3x-1$；　　　　(2) $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$．

解　(1) 因为 $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}}(3x-1)=0$，所以当 $x\to\dfrac{1}{3}$ 时，$3x-1$ 为无穷小．

(2) 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^x=0$，所以当 $x\to+\infty$ 时，$\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ 为无穷小．

2. 函数、极限与无穷小量的关系

定理 1.3.1 在自变量的同一变化过程 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）中，函数 $f(x)$ 具有极限 A 的充分必要条件是 $f(x) = A + \alpha$（其中 A 为常数，α 是无穷小）.

证明 （以 $x \to x_0$ 为例）

必要性 设 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，由定义 1.2.6 可知，当 $x \to x_0$ 时，$f(x) - A \to 0$.

设 $f(x) - A = \alpha$，则 $f(x) = A + \alpha$ 且有 $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha = 0$.

充分性 设 $f(x) = A + \alpha$，$\lim\limits_{x \to x_0} \alpha = 0$，则 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0}(A + \alpha) = A$.

对于 $x \to \infty$ 等情形，可以类似地证明.

3. 无穷小量的性质

在自变量的同一变化过程中，无穷小量具有下列重要性质.

性质 1.3.1 有限个无穷小量的代数和仍然是无穷小量.

性质 1.3.2 有限个无穷小量的乘积仍然是无穷小量.

性质 1.3.3 有界函数与无穷小量的乘积是无穷小量.

性质 1.3.4 常数与无穷小量的乘积是无穷小量.

小提示

无数个无穷小量的和未必是无穷小量.

例如，当 $n \to \infty$ 时，$\frac{1}{n^2}, \frac{2}{n^2}, \cdots, \frac{n}{n^2}$ 都是无穷小量，但是 $\lim\limits_{n \to \infty}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2}\right) = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{n(n+1)}{2n^2} = \lim\limits_{n \to \infty}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2}$.（此极限用本章第四小节的知识即可求解）

小试牛刀

例 1.3.2 计算 $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{\cos n}{n}$.

解 因为 $\frac{\cos n}{n} = \frac{1}{n} \cdot \cos n$，而 $\frac{1}{n}$ 是 $n \to \infty$ 时的无穷小量，$\cos n$ 是有界函数. 根据无穷小量的性质 1.3.3，可知 $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{\cos n}{n} = 0$.

二、无穷大量

定义 1.3.2 如果当 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）时，函数 $f(x)$ 的绝对值无限增大，那么称函数 $f(x)$ 为当 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）时的**无穷大量**，简称**无穷大**，记作

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty \ (\text{或} \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty).$$

如：

当 $x \to 0$ 时，$\left|\frac{1}{x}\right|$ 无限增大，所以 $\frac{1}{x}$ 是当 $x \to 0$ 时的无穷大量，记作 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty$.

当 $x\to\infty$ 时，$|x|$ 无限增大，所以 x 是当 $x\to\infty$ 时的无穷大量，记作 $\lim\limits_{x\to\infty}x=\infty$.

小提示

(1) 在定义 1.3.2 中当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$) 时，函数 $f(x)$ 只取正值(或只取负值)，那么称函数 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$) 时的正(负)无穷大量，简称正(负)无穷大，记作

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=+\infty\left(\text{或}\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=-\infty\right).$$

(2) 当 $x\to x_0^+,x\to x_0^-,x\to+\infty,x\to-\infty$ 时，可得到相应的无穷大量定义.

例如，当 $x\to+\infty$ 时，2^x 取正值而无限增大，所以 2^x 是当 $x\to+\infty$ 时的正无穷大量，记作 $\lim\limits_{x\to+\infty}2^x=+\infty$.

当 $x\to0^+$ 时，$\ln x$ 取负值而无限减小，所以 $\ln x$ 是 $x\to0^+$ 时的负无穷大量，记作 $\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=-\infty$.

小提示

(1) 无穷大量是与自变量 x 的变化过程紧密相关的，因此，必须指明自变量 x 的变化过程.

(2) 无穷大量表达的是量的变化状态，而不是量的大小，不可把绝对值很大的常数说成是无穷大量.

(3) 如果函数 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$) 时的无穷大量，那么它的极限是不存在的，但为了描述函数的这种变化趋势，也说"函数的极限是无穷大".

三、无穷小量与无穷大量的关系

定理 1.3.2　在自变量的同一变化过程中，如果函数 $f(x)$ 为无穷大量，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷小量；反之，如果函数 $f(x)$ 为无穷小量，且 $f(x)\neq0$，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷大量.

小试牛刀

例 1.3.3　指出函数 $f(x)=\dfrac{1}{x-3}$ 中，x 在怎样的变化过程是无穷小量？怎样的变化过程是无穷大量？

解　因为当 $x\to3$ 时，$x-3$ 为无穷小量，

所以当 $x\to3$ 时，函数 $f(x)=\dfrac{1}{x-3}$ 为无穷大量.

因为当 $x\to\infty$ 时，$x-3$ 为无穷大量；

所以当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)=\dfrac{1}{x-3}$ 为无穷小量.

大展身手

例 1.3.4 【应用案例】中的速度求解.

解 假设 A,B 两地的距离为 S，从 B 到 A 的速度为 V，往返的平均速度为 $\bar{V}$，从 A 到 B 的时间为 t_1，从 B 到 A 的时间为 t_2，则

$$t_1=\frac{S}{30},t_2=\frac{S}{V}.$$

往返 A,B 两地所花费的时间为

$$t_1+t_2=\frac{S}{30}+\frac{S}{V}.$$

往返 A,B 两地的平均速度为

$$\bar{V}=\frac{2S}{t_1+t_2}=\frac{2S}{\dfrac{S}{30}+\dfrac{S}{V}}=\frac{60}{1+\dfrac{30}{V}}.$$

在 $\bar{V}=\dfrac{60}{1+\dfrac{30}{V}}$ 中，只有当 V 是无穷大量即 $V\to\infty$，才有 $\bar{V}=60$，即 $\bar{V}=\lim\limits_{V\to\infty}\dfrac{60}{1+\dfrac{30}{V}}=60$. 也就是返程速度需无限大才能满足平均速度 60 km/h 的要求，这在实际中无法实现.

习题 1.3

小试牛刀

1. 指出下列函数在相应的自变量的趋向下是无穷大量，还是无穷小量？

(1) $\dfrac{2+x}{3x}(x\to 0)$； (2) $e^{-x}(x\to+\infty)$；

(3) $\ln x(x\to+\infty)$； (4) $\tan x(x\to 0)$；

(5) $\cot x(x\to 0)$； (6) $2^{\frac{1}{x}}(x\to 0^-)$.

2. 计算下列函数的极限.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arctan 2x}{3x}$； (2) $\lim\limits_{x\to 0}x^3\cos\dfrac{1}{x}$.

大展身手

3. 当 x 趋向何值时，下列函数分别为无穷大量、无穷小量.

(1) $y=\log_{\frac{1}{2}}(x-1)$； (2) $y=3^{x+2}$.

第四节　极限的运算

应用案例

某医疗科技公司推出了一款创新型智能健康手环，主打实时监测血糖和心率功能. 产品上市初期因技术领先和精准营销迅速走红，销量激增. 但随着时间的推移，市场逐渐饱和，且竞争对手推出类似产品，导致销量增速放缓. 已知销量 y 与时间 t 的函数关系为 $y=\dfrac{200t}{t^2+1000}$，试分析该智能健康手环长期销售前景，为公司的战略调整提供依据.

一、极限的运算法则

前面只能计算一些较简单的函数的极限，而实际问题中的函数却要复杂得多，因此，我们有必要了解和掌握极限的运算法则.

1. 极限的四则运算法则

设 $\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，则有

法则 1.4.1　$\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$.

法则 1.4.2　$\lim[f(x)g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=AB$.

法则 1.4.3　$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}(B\neq 0)$.

小提示

(1) 对每一个法则而言，“lim”表示自变量的同一个变化过程.

(2) 法则 1.4.1 和法则 1.4.2 可以推广到有限多个函数的情形.

推论 1.4.1　常数可以提到极限号前，即

$$\lim[C\cdot f(x)]=C\cdot\lim f(x)=CA(C\text{ 为常数}).$$

推论 1.4.2　m 为正整数，那么

$$\lim[f(x)]^m=[\lim f(x)]^m=A^m.$$

例如：$\lim\limits_{x\to x_0}x^m=(\lim\limits_{x\to x_0}x)^m=x_0^m$.

小试牛刀

例 1.4.1　计算 $\lim\limits_{x\to 1}(4x^2+5x-3)$.

解　$\lim\limits_{x\to 1}(4x^2+5x-3)=\lim\limits_{x\to 1}4x^2+\lim\limits_{x\to 1}5x-\lim\limits_{x\to 1}3=4\lim\limits_{x\to 1}x^2+5\lim\limits_{x\to 1}x-3=4+5-3=6$.

小智囊

$\lim\limits_{x\to x_0}(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0)=a_nx_0^n+a_{n-1}x_0^{n-1}+\cdots+a_1x_0+a_0$，

即当 $x\to x_0$ 时多项式函数的极限等于该函数在 x_0 处的函数值.

例 1.4.2 计算 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{4x^2-3x+1}{6x-5}$.

解 当 $x\to -1$ 时，$(6x-5)\to -11$（分母的极限不为 0），由法则 1.4.3，得

$$\lim_{x\to -1}\frac{4x^2-3x+1}{6x-5}=\frac{\lim\limits_{x\to -1}(4x^2-3x+1)}{\lim\limits_{x\to -1}(6x-5)}=\frac{4(-1)^2-3(-1)+1}{6(-1)-5}=-\frac{8}{11}.$$

例 1.4.3 计算 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-4}{x-1}$.

解 因为 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x-4}=0$，即 $\dfrac{x-1}{x-4}$ 是当 $x\to 1$ 时的无穷小量，根据无穷大量与无穷小量的关系可知，它的倒数 $\dfrac{x-4}{x-1}$ 是当 $x\to 1$ 时的无穷大量，即 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-4}{x-1}=\infty$.

大展身手

例 1.4.4 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}\right)$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right]=\lim\limits_{n\to\infty}1-\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n=1-0=1$.

2. 复合函数极限的运算法则

定理 1.4.1 设函数 $y=f[\varphi(x)]$ 由函数 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$ 复合而成. 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0$，且在 x_0 的附近（除 x_0 外）$\varphi(x)\neq u_0$，又有 $\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$，那么

$$\lim_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=\lim_{u\to u_0}f(u)=A.$$

证明从略.

小试牛刀

例 1.4.5 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\tan 2x$.

解 令 $u=2x$，则函数 $y=\tan 2x$ 可视为由 $y=\tan u$，$u=2x$ 构成的复合函数. 因为当 $x\to 0$ 时，$u=2x\to 0$，且 $u\to 0$ 时 $\tan u\to 0$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}\tan 2x=\lim\limits_{u\to 0}\tan u=0$.

例 1.4.6 计算 $\lim\limits_{x\to\infty}4^{\frac{1}{x}}$.

解 令 $u=\dfrac{1}{x}$，因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$，且 $\lim\limits_{u\to 0}4^u=1$，所以 $\lim\limits_{x\to\infty}4^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{u\to 0}4^u=1$.

小提示

例 1.4.5、例 1.4.6 中，熟练以后可以不必写出中间变量.

3. 未定式求极限

一般地，如果所给函数在自变量的某种趋向下分子、分母的极限均为 0(或无穷大)，人们常称这类极限为“$\frac{0}{0}$”$\left(\text{或“}\frac{\infty}{\infty}\text{”}\right)$型未定式极限. 这时不能直接应用商的极限运算法则，而应先根据具体情况作适当的恒等变换，使之符合条件，然后再运用极限的运算法则.

小试牛刀

例 1.4.7　计算 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-x-2}$.

解　当 $x\to -1$ 时，所给函数的分子、分母的极限均为 0，即为“$\frac{0}{0}$”型未定式，法则 1.4.3 不能用. 但它们都有趋向于 0 的公因子 $(x+1)$，所以可以约去这个极限为零的公因子，从而

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2-2x-3}{x^2-x-2}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x-3)}{(x+1)(x-2)}=\lim_{x\to -1}\frac{x-3}{x-2}=\frac{-1-3}{-1-2}=\frac{4}{3}.$$

例 1.4.8　计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x}-1}{x}$.

解　这是“$\frac{0}{0}$”型未定式，可先用分子有理化再消去极限为零的公因子.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1-x}-1)(\sqrt{1-x}+1)}{x(\sqrt{1-x}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{x(\sqrt{1-x}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{\sqrt{1-x}+1}=-\frac{1}{2}.$$

例 1.4.9　计算 $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^2-x+2}{x^2+2x+2}$.

解　这是“$\frac{\infty}{\infty}$”型未定式，分子、分母同除以分子、分母中自变量的最高次幂，得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-x+2}{x^2+2x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}}{1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{x^2}}=3.$$

例 1.4.10　计算 $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^2-x+1}{x^3-2x-3}$.

解 这是“$\dfrac{\infty}{\infty}$”型未定式，分子、分母同除以分子、分母中自变量的最高次幂，得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-x+1}{x^3-2x-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}{1-\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{3}{x^3}}=\frac{0}{1}=0.$$

例 1.4.11 计算 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3-x+1}{3x^2-x+3}$.

解 因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-x+3}{5x^3-x+1}=0$，所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3-x+1}{3x^2-x+3}=\infty$.

小智囊

一般地，当 $x\to\infty$ 时，有理分式 $(a_0\neq 0,b_0\neq 0)$ 的极限有以下结果：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}=\begin{cases}\infty & m<n\\ \dfrac{a_0}{b_0} & m=n\ (a_0\neq 0,b_0\neq 0).\\ 0 & m>n\end{cases}$$

例 1.4.12 计算 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3}{1-x^3}-\dfrac{1}{1-x}\right)$.

解
$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{3}{1-x^3}-\frac{1}{1-x}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{3-(1+x+x^2)}{(1-x)(1+x+x^2)}=\lim_{x\to 1}\frac{(2+x)(1-x)}{(1-x)(1+x+x^2)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{2+x}{1+x+x^2}=1.$$

例 1.4.13 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x}-\sqrt{x^2+1})$.

解
$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x}-\sqrt{x^2+1})=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(\sqrt{x^2-x})^2-(\sqrt{x^2+1})^2}{\sqrt{x^2-x}+\sqrt{x^2+1}}\right)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-x-1}{\sqrt{x^2-x}+\sqrt{x^2+1}}\right)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-1-\dfrac{1}{x}}{\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}+\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}}\right)=-\frac{1}{2}.$$

小提示

遇到其他类型的未定式极限(如上面的“$\infty-\infty$”型)，一般通过恒等变形(如通分或有理化等)转化为“$\dfrac{0}{0}$”或“$\dfrac{\infty}{\infty}$”等类型.

大展身手

例 1.4.14　已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2}{x-1}-ax-b\right)=0$，求常数 a，b.

解　由于 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2}{x-1}-ax-b\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(1-a)x^2+(a-b)x+b+2}{x-1}=0$.

所以，$1-a=0$，$a-b=0$，即 $a=1$，$b=1$.

例 1.4.15　【应用案例】——产品销量变化趋势.

解　智能健康手环长期销售量是对远期销售前景的一个预测，即求 $\lim\limits_{t\to\infty}y$.

$$\lim_{t\to\infty}y=\lim_{t\to\infty}\frac{200t}{t^2+1000}=0.$$

随着时间的推移，该产品的销售量越来越低，并最终趋近于零. 因此，企业需提前采取创新或市场扩展策略以应对衰退.

二、两个重要极限

1. 第一个重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

我们先来叙述函数极限的夹逼定理，然后再证明 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

定理 1.4.2(函数极限的夹逼定理)　如果函数 $f(x)$，$g(x)$，$h(x)$ 在同一变化过程中满足 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$，且 $\lim g(x)=\lim h(x)=A$，那么

$$\lim f(x)=A.$$

现在证明 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

证明　因为 $\dfrac{\sin(-x)}{-x}=\dfrac{-\sin x}{-x}=\dfrac{\sin x}{x}$，即 x 改变符号时，$\dfrac{\sin x}{x}$ 的值不变，所以只要讨论 x 由正值趋于零的情形就可以了.

作单位圆，设圆心角 $\angle AOB$ 的弧度数为 $x\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$（如图 1-18).

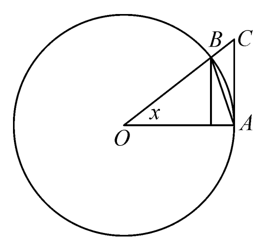


图 1-18

因为扇形 AOB 的面积大于$\triangle AOB$ 的面积而小于$\triangle AOC$ 的面积（AC 为该圆在 A 点的切线)，所以有

$$\frac{1}{2}\sin x<\frac{1}{2}x<\frac{1}{2}\tan x.$$

各式同除以正值 $\dfrac{1}{2}\sin x$，得

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}，即\quad \cos x<\frac{\sin x}{x}<1.$$

显然 $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$，且 $\lim\limits_{x\to 0}1=1$，由定理 1.4.2 即得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

小提示

(1) 若所求极限是“$\frac{0}{0}$”且含有三角函数可以考虑用第一个重要极限来计算.

(2) 推广：如果 $\lim\varphi(x)=0$，那么 $\lim\frac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{\varphi(x)\to 0}\frac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)}=1$.

小试牛刀

例 1.4.16 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1\cdot 1=1.$

例 1.4.17 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{2x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\frac{2}{3}\cdot 3x}=\frac{3}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}=\frac{3}{2}\cdot 1=\frac{3}{2}.$

小智囊

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{bx}=\frac{a}{b}(a\neq 0,b\neq 0)$.

例 1.4.18 $\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\sin\frac{3}{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\sin\frac{3}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{3}{x}}{\frac{3}{x}}\cdot 3=3\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\frac{3}{x}}{\frac{3}{x}}=3.$

例 1.4.19 $\lim\limits_{n\to\infty}3\times 2^{n-1}R^2\sin\frac{\pi}{3\times 2^{n-1}}$（第二小节【应用案例 1】中圆的面积）.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}3\times 2^{n-1}R^2\sin\frac{\pi}{3\times 2^{n-1}}=\pi R^2\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{3\times 2^{n-1}}}{\frac{\pi}{3\times 2^{n-1}}}\cdot\pi=\pi R^2.$

例 1.4.20 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\sin 3x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\sin 3x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{\sin 4x}{4x}\cdot 4x}{\dfrac{\sin 3x}{3x}\cdot 3x}=\dfrac{4}{3}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\sin 4x}{4x}}{\dfrac{\sin 3x}{3x}}=\dfrac{4}{3}$.

大展身手

例 1.4.21 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\right)^2=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{\frac{x}{2}\to 0}\left(\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\right)^2=\dfrac{1}{2}\cdot 1=\dfrac{1}{2}$.

例 1.4.22 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x-\sin x}{3x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x-\sin x}{3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cos 2x\sin x}{3x}=\dfrac{2}{3}\lim\limits_{x\to 0}\cos 2x\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=\dfrac{2}{3}\cdot 1\cdot 1=\dfrac{2}{3}$.

小提示

$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$.

2. 第二个重要极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$

这是“1^∞”未定式的极限，列出下表以探求当 $x\to+\infty$ 时，

函数 $f(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ 的变化趋势(表中的数值除 $x=1$ 外，都是近似值).

表 1-1

x	1	2	10	1000	10000	100000	1000000	…
$f(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$	2	2.25	2.594	2.717	2.7181	2.7182	2.71828	…

从表 1-1 中可以看出，当取 x 正值并无限增大时，$f(x)$ 是逐渐增大的，但是不论 x 如何增大，$f(x)$ 的值总不会超过 3，即当 $x\to+\infty$ 时，由单调有界数列必定收敛可以证明函数 $f(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ 是趋于一个确定的数 2.718281828…，但这个数是一个无理数，即自然对数的底数 e.

同样当 $x\to-\infty$ 时，函数 $f(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ 有类似的变化趋势，只是它是逐渐减小而趋向于 e.

综上所述，得到第二个重要极限

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}.$$

小提示

(1)“1^{∞}”的幂指函数的极限可以考虑用第二个重要极限来计算.

(2) 令 $x=\frac{1}{u}$，则 $x\to\infty$ 时，$u\to 0$，则 $\lim\limits_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}=\mathrm{e}$.

(3) 推广：若 $\lim\varphi(x)\to\infty$，则 $\lim\left(1+\frac{1}{\varphi(x)}\right)^{\varphi(x)}=\lim\limits_{\varphi(x)\to\infty}\left(1+\frac{1}{\varphi(x)}\right)^{\varphi(x)}=\mathrm{e}$；

或若 $\lim\varphi(x)=0$，则 $\lim(1+\varphi(x))^{\frac{1}{\varphi(x)}}=\lim\limits_{\varphi(x)\to 0}(1+\varphi(x))^{\frac{1}{\varphi(x)}}=\mathrm{e}$.

小试牛刀

例 1.4.23 计算 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{5x}$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{5x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{5}=\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{5}=\mathrm{e}^{5}$.

例 1.4.24 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-\frac{x}{3}}\right)^{-\frac{x}{3}(-3)}=\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-\frac{x}{3}}\right)^{-\frac{x}{3}}\right]^{-3}=\mathrm{e}^{-3}$.

例 1.4.25 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$.

解 令 $u=(1+x)^{\frac{1}{x}}$，且当 $x\to 0$ 时，$u\to\mathrm{e}$. 所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{u\to\mathrm{e}}\ln u=\ln\mathrm{e}=1.$$

例 1.4.26 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x}-1}{x}$.

解 令 $\mathrm{e}^{x}-1=u$，则 $x=\ln(1+u)$，且当 $x\to 0$ 时，$u\to 0$. 所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x}-1}{x}=\lim_{u\to 0}\frac{u}{\ln(1+u)}=\lim_{u\to 0}\frac{1}{\ln(1+u)^{\frac{1}{u}}}=1.$$

小智囊

例 1.4.25 和 1.4.26 的结论可作为公式使用.

大展身手

例 1.4.27 计算 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2-x}{3-x}\right)^{x+2}$.

解 令 $\frac{2-x}{3-x}=1+u$，则 $x=3+\frac{1}{u}$，且 $x\to\infty$ 时，$u\to 0$. 所以

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2-x}{3-x}\right)^{x+2}=\lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}+5}=\lim_{u\to 0}\left[(1+u)^{\frac{1}{u}}(1+u)^{5}\right]=\mathrm{e}\cdot 1=\mathrm{e}.$$

例 1.4.28　计算 $\lim\limits_{x\to 0}(1+\tan x)^{\cot x}$.

解　令 $\tan x=u$，则当 $x\to 0$ 时，$u\to 0$. 所以

$$\lim_{x\to 0}(1+\tan x)^{\cot x}=\lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}=\mathrm{e}.$$

三、等价无穷小的替换

我们已经知道，在自变量的同一变化过程中的两个无穷小量的和与积仍然是这个过程中的无穷小量，但是两个无穷小量的商却要复杂得多. 例如，当 $x\to 0$ 时，x，x^2 和 $\sin x$ 都是无穷小量，而 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x}=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x^2}=\infty$.

两个无穷小量的比值的极限不同，反映了不同的无穷小量趋于零时的“快慢”差异，以下通过无穷小量的比较来衡量不同的无穷小量逼近于零的快慢程度，并且它将为极限的运算提供较为简捷的途径.

定义 1.4.1　设在自变量的同一变化过程中，α，β 都为无穷小量.

(1) 如果 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=0$，则称 α 是 β 的**高阶无穷小量**，亦称 β 是 α 的**低阶无穷小量**，记作 $\alpha=o(\beta)$.

(2) 如果 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=\infty$，即 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0$，则称 β 是 α 的**高阶无穷小量**，亦称 α 是 β 的**低阶无穷小量**，记作 $\beta=o(\alpha)$.

(3) 如果 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=k(k\neq 0)$，则称 α 与 β 是**同阶无穷小量**.

特别地，当 $k=1$ 时，即 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=1$，则称 α 与 β 是**等价无穷小量**，记作 $\alpha\sim\beta$.

小提示

在自变量的同一变化过程中，同阶无穷小量可以想象为它们趋向于 0 的快慢成一种“倍数”关系；等价无穷小量是指它们趋向于 0 的速度“相同”；若 α 是 β 的高阶无穷小量，则意味着 α 比 β 趋向于 0 的速度要快得多.

如：

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x}=0$ 故当 $x\to 0$ 时，x^2 是 x 的高阶无穷小量，记作 $x^2=o(x)(x\to 0)$.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{5x^2}=\dfrac{1}{5}$，故当 $x\to 0$ 时，x^2 与 $5x^2$ 是同阶无穷小量.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{2^x}}{\frac{1}{3^x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3}{2}\right)^x=\infty$，故当 $x\to+\infty$ 时，$\dfrac{1}{2^x}$ 是 $\dfrac{1}{3^x}$ 的低阶无穷小量.

小试牛刀

例 1.4.29　$x \to 1$ 时，无穷小 $1-x$ 和 $1-x^2$，$\frac{1}{2}(1-x^2)$ 是否等价？

解　因为 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-x}{1-x^2}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{1+x}=\frac{1}{2}$，$\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-x}{\frac{1}{2}(1-x^2)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{2}{1+x}=1$.

所以，当 $x \to 1$ 时，$1-x$ 和 $\frac{1}{2}(1-x^2)$ 是等价无穷小量.

大展身手

例 1.4.30　证明当 $x \to 0$ 时，$(1+x)^n-1 \sim nx(n \in \mathbf{N}_+)$.

解　因为 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^n-1}{nx}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{C}_n^1x+\mathrm{C}_n^2x^2+\cdots+\mathrm{C}_n^nx^n}{nx}=1$，

所以当 $x \to 0$ 时，$(1+x)^n-1 \sim nx(n \in \mathbf{N}_+)$.

小智囊

(1) 当 $x \to 0$ 时，$\sin x \sim x$，$\tan x \sim x$，$\arcsin x \sim x$，$\arctan x \sim x$，$\ln(1+x) \sim x$，$\mathrm{e}^x-1 \sim x$，$1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$.

(2) 若 $\lim\varphi(x)=0$，则 $\sin\varphi(x) \sim \varphi(x)$，$\tan\varphi(x) \sim \varphi(x)$，$\arctan\varphi(x) \sim \varphi(x)$，$\ln[1+\varphi(x)] \sim \varphi(x)$，$\mathrm{e}^{\varphi(x)}-1 \sim \varphi(x)$，$1-\cos\varphi(x) \sim \frac{1}{2}[\varphi(x)]^2$.

定理 1.4.3(等价无穷小量替换)　设 $\alpha,\alpha',\beta,\beta'$ 是 $x \to x_0$(或 ∞) 时的无穷小量，且 $\alpha \sim \alpha'$，$\beta \sim \beta'$，则当极限 $\lim\frac{\alpha'}{\beta'}$ 存在时，极限 $\lim\frac{\alpha}{\beta}$ 也存在，且 $\lim\frac{\alpha}{\beta}=\lim\frac{\alpha'}{\beta'}$.

证明　$\lim\frac{\alpha}{\beta}=\lim\left(\frac{\alpha}{\alpha'}\cdot\frac{\alpha'}{\beta'}\cdot\frac{\beta'}{\beta}\right)=\lim\frac{\alpha}{\alpha'}\cdot\lim\frac{\alpha'}{\beta'}\cdot\lim\frac{\beta'}{\beta}=\lim\frac{\alpha'}{\beta'}$.

小提示

灵活运用等价无穷小量替换可为极限计算提供极大的方便.

小试牛刀

例 1.4.31　计算 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{7x}$.

解　因为 $\sin 5x \sim 5x(x \to 0)$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{7x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x}{7x}=\frac{5}{7}$.

例 1.4.32　计算 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{\mathrm{e}^x-1}$.

解　因为 $\ln(1+x)\sim x$，$e^x-1\sim x(x\to0)$，所以 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)}{e^x-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{x}=1$.

大展身手

例 1.4.33　计算 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\tan2x\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)$.

解　先作变量代换，令 $u=\dfrac{\pi}{4}-x$，当 $x\to\dfrac{\pi}{4}$ 时，$u\to0$，从而有 $\tan u\sim u$，所以

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\tan2x\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\lim_{u\to0}\tan2\left(\frac{\pi}{4}-u\right)\tan u=\lim_{u\to0}\cot2u\cdot\tan u=\lim_{u\to0}\frac{\tan u}{\tan2u}=\lim_{u\to0}\frac{u}{2u}=\frac{1}{2}.$$

例 1.4.34　计算 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$.

解

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x\cdot\dfrac{1-\cos x}{\cos x}}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{1}{\cos x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{x(1-\cos x)}{x^3}=1\cdot\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

小提示

在分子或分母为和式时，通常不能将和式中的某一项或若干项以其等价无穷小量替换，而应将分子或分母加以整体替换；若分子或分母为几个因子的乘积，则可将其中某个或某些因子以其等价无穷小量替换，即乘积因子才能作无穷小量替换.

习题 1.4

小试牛刀

1. 计算下列各题中的极限.

(1) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2+5}{x-3}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}$；

(3) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}$；

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+3x-5}{2x^3+x+8}$；　　(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-9x^2+8x+7}{10x^2+9x+8}$；

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x(x+5)}{(x+2)(x+3)}$；　　(8) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x}{3-x}-\dfrac{3}{2x}\right)$；

(9) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x}{x^2-4}-\dfrac{1}{x-2}\right)$;

(10) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x+100}-\sqrt{x})$;

(11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 5x}$;

(12) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan kx}{x}$;

(13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^3 x}{\sin x^3}$;

(14) $\lim\limits_{x\to+\infty}2^x\sin\dfrac{1}{2^x}$;

(15) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{5}{x}\right)^{-2x}$;

(16) $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}$;

(17) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}$;

(18) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-2x)}{e^x-1}$.

大展身手

2. 计算下列各题中的极限.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}\right)$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin ax}{\sqrt{1-\cos x}}(a\neq 0)$;

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}$;

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^{2x+1}$;

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1+5x}$;

(7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(h+x)-\ln h}{x}$;

(8) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\cot^2 x}$.

3. 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ax^2+bx+6}{3x-4}=2$，求 a，b 的值.

4. 已知当 $x\to 0$ 时，$ax^b\sim(\tan x-\sin x)$，求 a，b 的值.

5. 某一产品价格满足 $p(t)=20-20e^{-0.5t}$，请你对该产品价格作一个长期预测.

第五节　函数的连续性

应用案例

某快递公司为优化物流成本并适应不同客户需求，制定了分段邮费政策. 针对小型包裹、中型包裹和大型包裹，分别设定差异化的收费标准. 已知政策如下：当邮件的重量小于等于 1 kg 时邮费为 5 元，当邮件的重量大于 1 kg 小于 15 kg 时每千克邮费为 5 元，当邮件的重量大于等于 15 kg 时超过部分邮费按 25 元计算，且每个邮件的重量不超过 20 kg. 求邮件邮寄费用 y（单位：元）与重量 x（单位：g）的函数关系式，并用图形表示上述函数关系.

解　据题意函数关系式为

$$y=\begin{cases}5 & 0<x\leqslant 1\\ 5x & 1<x<15\\ 100 & 15\leqslant x\leqslant 20\end{cases}.$$

考察此分段函数在区间(0,20]各点的极限,发现:

当 $0<x_0<1$ 时, $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)=5$,即函数在 x_0 处的极限值等于 x_0 处的函数值.

当 $x_0=1$ 时, $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=f(1)=5$,即函数在 x_0 处的极限值等于 x_0 处的函数值.

当 $1<x_0<15$ 时, $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)=5x_0$,即函数在 x_0 处的极限值等于 x_0 处的函数值.

当 $x_0=15$ 时, $\lim\limits_{x\to 15^-}f(x)=75$, $\lim\limits_{x\to 15^+}f(x)=100$, 即该点处极限不存在.

当 $15<x_0<20$ 时, $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)=100$,即函数在 x_0 处的极限值等于 x_0 处的函数值.

当 $x_0=20$ 时, $\lim\limits_{x\to 20^-}f(x)=100$,即函数在 x_0 处的左极限值等于 x_0 处的函数值. 函数图像如图 1-19 所示.

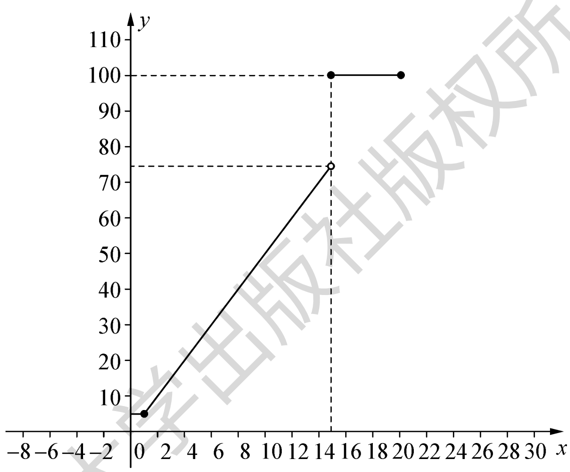


图 1-19

从图 1-19 中发现曲线在点 $x_0=15$ 处是断开的,在点 $x_0=1$ 时是连在一起的. 如何用数学语言来描述着这种不同呢?

一、函数在某点处的连续性

定义 1.5.1　如果函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义,且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$, 则称函数 $y=f(x)$ 在点 **x_0 处连续**,称**点 x_0** 为函数 $y=f(x)$ 的**连续点**.

小提示

函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续必须同时满足以下三个条件:

(1) 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处有定义;

(2) 极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在;

(3) 极限值等于函数值,即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

显然,【应用案例】中 $f(x)$ 在点 $x_0=1$ 处是连续的,在点 $x_0=15$ 处是不连续的.

相对于函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处的左、右极限概念,我们有函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处左右连续的概念.

定义 1.5.2 如果函数 $y=f(x)$ 在区间 $(x_0-\delta,x_0]$ 上有定义,且 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$,则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处**左连续**.如果函数 $y=f(x)$ 在区间 $[x_0,x_0+\delta)$ 上有定义,且 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$,则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处**右连续**.

显然,【应用案例】中在点 $x_0=15$ 处是右连续的,在点 $x_0=20$ 处是左连续的.

小试牛刀

例 1.5.1 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}x^2 & x\geqslant 0\\ 1-x^3 & x<0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处的连续性.

解 显然 $f(0)=0$. 又因为 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(1-x^3)=1$,$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}x^2=0$. 即当 $x\to 0$ 时,虽然函数 $f(x)$ 的左、右极限都存在,但不相等,从而当 $x\to 0$ 时函数 $f(x)$ 的极限不存在,所以函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处不连续.

例 1.5.2 证明函数 $f(x)=\begin{cases}1+\cos x & x<\dfrac{\pi}{2}\\ \sin x & x\geqslant\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$ 在点 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 处连续.

解 显然 $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$. 又因为 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(1+\cos x)=1+\cos\dfrac{\pi}{2}=1$,$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\sin x=\sin\dfrac{\pi}{2}=1$,即 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}f(x)=1$,有 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}f(x)=f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$. 所以函数 $f(x)$ 在点 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 处连续.

在例 1.5.2 中亦有 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(1+\cos x)=1+\cos\dfrac{\pi}{2}=f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$,

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\sin x=\sin\frac{\pi}{2}=1=f\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

也就是函数 $f(x)$ 在点 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 处既左连续又右连续.

小提示

$y=f(x)$ 在点 x_0 处连续的充要条件是 $y=f(x)$ 在点 x_0 处既左连续又右连续.

大展身手

例 1.5.3 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\tan 2x}{x} & x\neq 0\\ k & x=0\end{cases}$ 当 k 取何值时,函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处

连续.

解　$f(0)=k,\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{x}=2$,由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,所以$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$,从而得 $k=2$.

若引入增量的概念,函数在某点的连续性还可以有别的定义形式.

如果函数 $y=f(x)$ 的自变量 x 由 x_0 变到 x,我们称差值 $x-x_0$ 为自变量 x 在 x_0 处的改变量或增量,通常用符号 Δx 表示,即 $\Delta x=x-x_0$. 此时相应的函数值由 $f(x_0)$ 变到 $f(x)$,我们称差值 $f(x)-f(x_0)$ 为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的改变量或增量,记作 Δy,即 $\Delta y=f(x)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$. 增量的几何意义如图 1-20 所示.

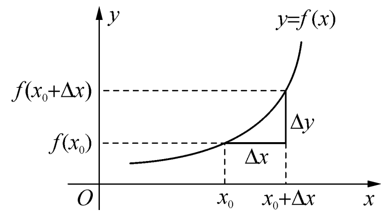


图 1-20

定义 1.5.3　设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义,且 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$,则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处**连续**,称点 x_0 为函数 $y=f(x)$ 的**连续点**.

二、函数的间断点及其分类

1. 间断点的概念

定义 1.5.4　如果函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处不连续,则称 $y=f(x)$ 在点 x_0 处间断,并称点 x_0 为 $y=f(x)$ 的**间断点**.

小提示

$y=f(x)$ 在 x_0 处连续必须同时满足三个条件:

(1) 函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处有定义;

(2) 极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在;

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

如果这三个条件中有一个不满足,$y=f(x)$ 在 x_0 处就不连续.

2. 间断点的分类

根据函数在间断点附近的变化特性,将间断点分为以下两种类型.

定义 1.5.5　设 x_0 是 $y=f(x)$ 的间断点,若 $y=f(x)$ 在点 x_0 的左、右极限都存在,则称点 x_0 为 $y=f(x)$ 的**第一类间断点**. 若 $y=f(x)$ 在点 x_0 的左、右极限至少有一个不存在,则称点 x_0 为 $y=f(x)$ 的**第二类间断点**.

小试牛刀

例 1.5.4　讨论点 $x=0$ 是否是函数 $f(x)=\begin{cases}x+1 & x<0\\ x^2-1 & x\geqslant 0\end{cases}$ 的间断点.

解　因为 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=1,\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=-1$,故 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在,但左右极限都存在,所以 $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点.

小提示

左、右极限存在但不相等的间断点，称为跳跃间断点.

例 1.5.5 讨论点 $x=-1$ 是否是函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x+1} & x\neq -1\\ -1 & x=-1\end{cases}$ 的间断点.

解 因为 $\lim\limits_{x\to -1}f(x)=-2\neq f(-1)$，所以 $x=-1$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点.

小提示

(1) 左、右极限存在且相等的间断点，称为可去间断点.
(2) 第一类间断点分为跳跃间断点和可去间断点.

例 1.5.6 讨论点 $x=0$ 是否是函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 的间断点.

解 因为函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在点 $x=0$ 处无定义，且 $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty$，$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$，即函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在点 $x=0$ 处左右极限都不存在，所以 $x=0$ 是它的第二类间断点.

大展身手

例 1.5.7 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}e^x & x<0\\ x+1 & 0<x\leqslant 1\\ \dfrac{x-1}{1-\sqrt{2-x}}+1 & x>1\end{cases}$ 在 $x=0$ 和 $x=1$ 的连续性，并判别间断点的类型.

解 显然函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处无定义，$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}e^x=1$，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x+1)=1$，所以 $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的第一类间断点中的可去间断点.

$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x+1)=2$，$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{x-1}{1-\sqrt{2-x}}+1\right)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left[\dfrac{(x-1)(1+\sqrt{2-x})}{x-1}+1\right]=\lim\limits_{x\to 1^+}(1+\sqrt{2-x}+1)=3$，所以 $x=1$ 是函数 $f(x)$ 的第一类间断点中的跳跃间断点.

三、函数在区间上的连续性

定义 1.5.6 如果函数 $y=f(x)$ 在开区间 (a,b) 内每一点都是连续的，则称函数 $y=f(x)$ 在开区间 (a,b) 内**连续**，也称 $y=f(x)$ 是 (a,b) 内的**连续函数**. 如果函数 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有定义，在开区间 (a,b) 内连续，且在区间的左端点 $x=a$ 处右连续，在右端点 $x=b$ 处左连续，即 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=f(a)$，$\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=f(b)$，则称函数 $y=f(x)$ 在闭区

间 $[a,b]$ 上连续，也称 $y=f(x)$ 是**闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数**.

小提示

连续函数的图形是一条连续不间断的曲线.

根据函数在一点连续的定义及函数极限的运算法则，可以证明连续函数的和、差、积、商仍然是连续函数.

定理 1.5.1　若函数 $f(x)$，$g(x)$ 在点 x_0 处连续，则函数 $f(x)\pm g(x)$，$f(x)\cdot g(x)$，$\dfrac{f(x)}{g(x)}(g(x_0)\neq 0)$ 在点 x_0 处都连续.

证明　因为 $f(x)$，$g(x)$ 在点 x_0 处连续，即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=g(x_0)$.

从而由极限的运算法则，得到

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim_{x\to x_0}f(x)\pm\lim_{x\to x_0}g(x)=f(x_0)\pm g(x_0),$$

所以函数 $f(x)\pm g(x)$ 在点 x_0 处连续.

后两个结论可类似地加以证明，且和、差、积的情况可以推广到有限个函数的情形.

定理 1.5.2（复合函数的连续性）　函数 $y=f[\varphi(x)]$ 由 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 复合而成. 设函数 $u=\varphi(x)$ 在点 x_0 处连续，$y=f(u)$ 在 u_0 处连续，且 $u_0=\varphi(x_0)$，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在点 x_0 处连续，即

$$\lim_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=f[\lim_{x\to x_0}\varphi(x)]=f[\varphi(x_0)].$$

证明从略.

小提示

计算 $\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]$ 时，只要满足定理 1.5.2 的条件，可转化为计算 $f[\varphi(x_0)]$，从而使得计算简化.

定理 1.5.3　若函数 $y=f(x)$ 在某区间上单值、单调且连续，则它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 在对应的区间上也单值、单调且连续，并且它们的单调性相同，即它们同为递增或同为递减函数.

证明从略.

由于 $y=C$（C 为常数）是连续函数，且基本初等函数在其定义域内连续. 根据定理 1.5.1 和定理 1.5.2，我们可以得到下面的重要定理.

定理 1.5.4　初等函数在其定义区间内是连续的.

小智囊

如果函数 $y=f(x)$ 是初等函数，而且点 x_0 是其定义区间内的一点，那么一定有 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

小试牛刀

例 1.5.8 计算 $\lim\limits_{x\to \mathrm{e}}\arctan(\ln x)$.

解 因为 $y=\arctan(\ln x)$ 是初等函数，且 $x=\mathrm{e}$ 是它的定义区间内的一点，由定理 1.5.4，有

$$\lim_{x\to \mathrm{e}}\arctan(\ln x)=\arctan(\ln \mathrm{e})=\arctan 1=\frac{\pi}{4}.$$

例 1.5.9 计算 $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x}-2}$.

解 所给函数是初等函数，但它在 $x=4$ 处无定义，故不能直接应用定理 1.5.4. 易见这是一个“$\dfrac{0}{0}$”型的极限问题. 经过分子分母分别有理化，可转化为一个在 $x=4$ 处的连续函数，再计算其极限. 即

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x}-2}=\lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{2x+1}-3)(\sqrt{2x+1}+3)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{2x+1}+3)(\sqrt{x}+2)}=\lim_{x\to 4}\frac{(2x-8)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{2x+1}+3)}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{2(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{2x+1}+3}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}.$$

大展身手

例 1.5.10 讨论函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x(x+1)}$ 的连续性.

解 因为 $f(x)$ 是初等函数，其定义域为 $(-\infty,-1)\cup(-1,0)\cup(0,+\infty)$，因此，函数在 $(-\infty,-1)\cup(-1,0)\cup(0,+\infty)$ 内连续，而在点 $x=0$，$x=-1$ 处间断.

在点 $x=0$ 处，因为 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-1}{x(x+1)}=\infty$，所以 $x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点.

在点 $x=-1$ 处，因为 $\lim\limits_{x\to -1}f(x)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x(x+1)}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x-1}{x}=2$，所以 $x=-1$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点，且为可去间断点.

小提示

讨论函数的连续性，要指出其连续区间，若有间断点，应进一步指出间断点的类型.

四、闭区间上连续函数的性质

闭区间上的连续函数有一些重要性质，这些性质在直观上比较明显，因此，我们将不加证明地直接给出下面结论.

定理 1.5.5(最大值和最小值定理)　若函数 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则

(1) 在 $[a,b]$ 上至少存在一点 ξ_1，使得对于任何 $x\in[a,b]$，恒有 $f(\xi_1)\geqslant f(x)$；

(2) 在 $[a,b]$ 上至少存在一点 ξ_2，使得对于任何 $x\in[a,b]$，恒有 $f(\xi_2)\leqslant f(x)$.

$f(\xi_1)$，$f(\xi_2)$ 分别称为函数 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上的最大值和最小值.

从几何直观上看，因为闭区间上的连续函数的图形是包括两端点的一条不间断的曲线，必定有最高点 P 和最低点 Q，而点 P，Q 的纵坐标就是函数的最大值和最小值(如图 1－21 所示).

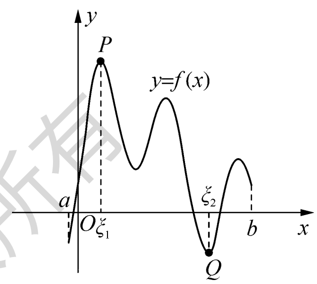


图 1－21

若函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内连续，则它在 (a,b) 内未必能取得最大值和最小值. 例如，函数 $f(x)=x^2$ 在区间(0,1)内连续，但它在(0,1)内无最大值和最小值. 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 内有间断点，也未必能取得最大值和最小值. 例如，函数

$$f(x)=\begin{cases}-x+1 & 0\leqslant x<1\\ 1 & x=1\\ -x+3 & 1<x\leqslant 2\end{cases}$$

在闭区间[0,2]上有间断点 $x=1$，函数 $f(x)$ 在闭区间[0,2]上既无最大值又无最小值(如图 1－22 所示).

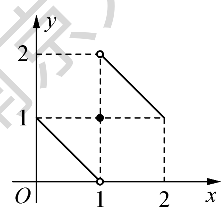


图 1－22

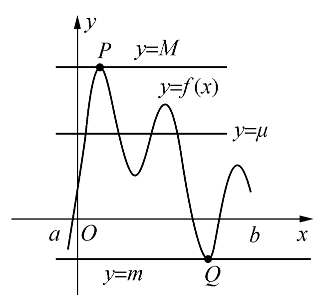


图 1－23

推论 1.5.1　若函数 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则它在闭区间 $[a,b]$ 上有界.

定理 1.5.6(介值定理)　若 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，m 与 M 分别是 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上的最小值和最大值，μ 是介于 m 与 M 之间的任一实数，即 $m\leqslant\mu\leqslant M$，则在 $[a,b]$ 上至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=\mu$.

定理 1.5.6 的几何意义：介于两条水平直线 $y=m$ 与 $y=M$ 之间的任一条直线 $y=\mu$，与曲线 $y=f(x)$ 至少有一个交点(如图 1－23).

推论 1.5.2(方程根的存在定理)　若 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)\cdot f(b)<0$，则方程 $f(x)=0$ 在 (a,b) 内至少有一个根，即至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使

$f(\xi)=0$.

推论 1.5.2 的几何意义：一条连续曲线，若其上的点的纵坐标由负值变到正值或由正值变到负值时，则曲线至少要穿越 x 轴一次(如图 1－23).

小提示

(1) 使 $f(x)=0$ 的点称为函数 $y=f(x)$ 的零点；

(2) 推论 1.5.2 又称为零点定理.

小试牛刀

例 1.5.11 证明方程 $x^5-4x+2=0$ 在区间 $(1,2)$ 内至少有一个实根.

证明 设 $f(x)=x^5-4x+2$，显然它在闭区间 $[1,2]$ 上连续，且 $f(1)=-1<0$，$f(2)=26>0$，由推论 1.5.2 可知，至少存在一点 $\xi\in(1,2)$，使得 $f(\xi)=0$. 这表明所给方程在(1,2)内至少有一个实根.

大展身手

例 1.5.12 某个巡逻小分队定期派人到山上巡逻，每两天一个来回. 有一次轮到小魏巡逻，第一天早上 6:00 从山下的驻地出发，当天下午 4:00 到达山顶驻地. 长官在下午 1:15 左右联系小魏，小魏报告了所在地(距鹰场 100 m). 第二天早上 6:00 沿原路下山，长官仍在下午 1:15 左右联系小魏，小魏继续报告所在地，竟发现是昨天报告的同一个位置(距鹰场 100 m). 小魏心想，自己竟然在两天的同一时刻经过了同一个地方. 真是太巧！请思考这是一个巧合吗？

解 如图 1－24 所示，设山下驻地与山顶驻地之间的路程为 L，$f(t)$ 表示时刻 $t(t\in[6,16])$ 小魏离开山下驻地走过的路程，显然 $f(t)$ 是区间$[6,16]$上的连续函数，且 $f(6)=0$，$f(16)=L$. $g(t)$ 表示小魏第二天下山时在与前一天相同时刻尚未走完的路程，可知 $g(t)$ 是区间$[6, 16]$上的连续函数，且有 $g(6)=L$，$g(16)=0$.

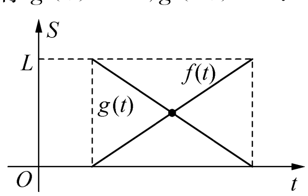


图 1－24

要证明在这条路上存在这样一个点，小魏在两天的同一时刻都经过此点，即证明存在 $\xi\in[6,16]$，使 $f(\xi)=g(\xi)$.

构造辅助函数 $\varphi(t)$，$\varphi(t)=f(t)-g(t)$，则 $\varphi(t)$ 在区间$[6,16]$上连续，且有

$$\varphi(6)\varphi(16)=[f(6)-g(6)][f(16)-g(16)]=-L^2<0.$$

由推论 1.5.2 可知，一定存在 $\xi\in(6,16)$，使 $\varphi(\xi)=0$，即 $f(\xi)=g(\xi)$.

习题 1.5

小试牛刀

1. 计算下列函数的极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 1}[\sin(\ln x)]$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{2\sin x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos(\sqrt{x-100}-\sqrt{x})$；　　(4) $\lim\limits_{x\to 0}[\sin\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}]$.

2. 讨论下列函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否连续？若不连续，指出是哪一类间断点.

(1) $f(x)=\begin{cases} x+\dfrac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$；　　(2) $f(x)=\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}$.

3. 证明方程 $x^3+2x-6=0$ 至少有一个根介于 1 和 3 之间.

4. 设函数 $f(x)=\sin x-x^2\cos x$，证明至少存在一点 $\xi\in\left(\pi,\dfrac{3}{2}\pi\right)$，使得 $f(\xi)=0$.

大展身手

5. 讨论函数 $f(x)=\dfrac{x^2+5x+6}{x^2+x-6}$ 的连续性.

6. 设函数 $f(x)=\begin{cases} e^{-x} & x<0 \\ a^2+x & x\geqslant 0 \end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，求 a 的值.

7. 设函数 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\cos x}{x+2} & x\geqslant 0 \\ \dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{a-x}}{x} & x<0 \end{cases}$ $(a>0)$，问当 a 为何值时 $x=0$ 是 $f(x)$ 的间断点？是第几类间断点？

第六节　极限在经济分析中的简单应用

应用案例

某投资者王女士手中有闲置资金 200000 元，打算进行一年期的投资，她咨询了两家金融机构，有两种产品可以选择. 一种是一年期定期存款产品，年利率 5%，年底一次性支付利息，本金和利息到期后一次性返还；另一种是年化利率 4.9%，按月复利计息，每月利息自动滚入本金继续投资. 王女士希望比较两种产品一年后的本利和，以确定选择收益更高的产品.

要解决这个问题,我们首先来了解几个概念.

一、计息制简介

1. 本金

本金是指存入银行或从银行贷出的资金总额.

2. 利息

利息是指投入本金所额外获得的资金.

3. 利息率

利息率,简称"利率",是指一定时期内利息额同本金额的比率,即

$$利率=利息/本金.$$

小提示

按计算日期的不同,利率分别为年利率、月利率、日利率等.假设

年利率$=12\times$月利率$=365\times$日利率.

月利率$=\dfrac{1}{12}\times$年利率$=30\times$日利率.

日利率$=\dfrac{1}{30}\times$月利率$=\dfrac{1}{365}\times$年利率.

利率用百分数或千分数表示,习惯上分别称为"分"或"厘".如年利率五分即 5%,表示 1000 元存款存一年,利息为 50 元;月利率八厘写成 8‰,表示 1000 元存一个月可得利息 8 元.银行的利率都以年利率的形式给出,例如,假设半年期整存整取年利率为 3.05%,则半年整存整取的期利率为 $3.05\%\div 2=1.525\%$;二年期整存整取年利率为 3.75%,而二年期整存整取的期利率为 $3.75\%\times 2=7.50\%$.

二、单利模型

1. 单利公式

若本金在上期产生的利息不再加入本期本金计算利息,就叫**单利**.

现有本金(现值)为 A_0 元,年利率为 r,年数为 t.

一年后的本利和为　$A_1=A_0(1+r)$.

二年后的本利和为　$A_2=A_0(1+r)+A_0r=A_1=A_0(1+2r)$.

……

t 年后的本利和为　$A_t=A_0(1+tr)$.

小提示

目前我国银行的定期存款实行的就是单利计息的方法.

小智囊

称 $A_t = A_0(1+tr)$ 为单利公式.

小试牛刀

例 1.6.1　大学生小张计划在三年后毕业时购买一台笔记本电脑.为达成目标,他将勤工俭学攒下的 3000 元存入银行,选择三年期定期存款,年利率 5%,以单利计息,试求小张到期时的本利和.

解　以单利方式计算的话,$A_3 = 3000(1+5\% \times 3) = 3450$(元).

所以到期时的本利和为 3450 元.

2. 单利的现值公式

由例 1.6.1 可知,按照年利率 5%,用单利制计算 3000 元本金在 3 年内的利息为 450 元,那么反过来,如果按照单利计算 3 年后的 3450 元相当于现在的多少资金呢?这就所指的"**贴现**"问题.**现值**是在给定的利率水平下,未来某时间点的资金折算到现在时刻的价值,此时利率 r 称为贴现率.单利制的现值公式为

$$A_0 = \frac{A_t}{1+tr}.$$

小智囊

称 $A_0 = \dfrac{A_t}{1+tr}$ 为单利的现值公式.

例 1.6.2　小王 2 年后想用 20000 元购买一辆汽车,在年利率为 4% 的情况下,按单利制计算,小王现在应一次性存入多少钱?

解　用单利制的现值公式 $A_0 = \dfrac{20000}{1+4\% \times 2} \approx 18519$(元).

三、复利模型

1. 复利公式

若本金在上期产生的利息也纳入本期本金计算利息,就叫**复利**,即俗称的利滚利.

虽然单利计息法简单,但是没有完全将资金利用起来,没有考虑利息还可以作为本金生出更多的利息.对于投资者而言,每一期收到的利息都会进行再投资,因此,复利法是更为科学的计算投资收益的方法.在财务管理中,一般也都用复利计息法进行计算.

以银行贷款为例,用 A_0 表示本金(现值),r 表示年利率,年数为 t.

一年后本利和为 $A_1 = A_0 + A_0 r = A_0(1+r)$.

二年后的本利和为 $A_2 = A_1 + A_1 r = A_1(1+r) = A_0(1+r)^2$.

……

t 年后的本利和为 $A_t = A_0(1+r)^t$.

小智囊

(1) 称 $A_t = A_0(1+r)^t$ 为复利公式.

(2) 若一年分 n 期计息，t 年后的本利和为 $A_t = A_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$.

小试牛刀

例 1.6.3 白领夫妻小李和小王计划三年后购买首套房，为稳健增值，他们将闲置的 10 万元投资某银行复利型理财产品，年化收益率 5%，那么 3 年后的本利和为多少?

解 3 年后的本利和为 $A_3 = 10000(1+5\%)^3 \approx 11576$(元).

大展身手

例 1.6.4 【应用案例】——投资问题

解 若选第一种产品：一年支付一次红利，年利率是 5%，那么一年末的本利和为 $200000(1+5\%)=210000$(元).

若选第二种产品：一年分 12 个月(12 期)，年利率是 4.9%，按复利支付红利，那么一年末的本利和为 $200000\left(1+\frac{4.9\%}{12}\right)^{12} \approx 200000 \times 1.0501 = 210020$(元)，第二种产品收益更高. 尽管年利率比第一种产品稍微低一些，但在这一年中，投资者不仅可用本金获取利息，而且可用利息赚取利息.

2. 复利的现值公式

$$A_0 = \frac{A_t}{(1+r)^t}.$$

小智囊

称 $A_0 = \frac{A_t}{(1+r)^t}$ 为复利的现值公式.

小试牛刀

例 1.6.5 张女士将一笔资金存入银行，银行的一年期存款利率为 1.45%，一年到期不取款则由银行自动转存，即将上一年的本金和利息一起作为本金存入一年期的定期存款. 张女士在第 3 年末总共取得本利和 10441.34 元，问他最初存入的资金数额是多少?

解 由题意可知是复利计息求现值的问题，则

$$A_0 = \frac{10441.34}{(1+1.45\%)^3} \approx 10000(\text{元}).$$

四、连续复利

1. 连续复利公式

某些情况下，现值在无限短的时间内按照复利计息，称为**连续复利**. 计息的“期”的时间间隔无限缩短，即此刻的利息在下一刻马上计入本金，产生利息.

现有本金(现值)为 A_0 元，年利率为 r，若以复利计息，t 年末的复利终值为 $A_t=A_0(1+r)^t$.

若每年分 n 期计息，t 年末的本利和为 $A_t=A_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$，由于连续复利的计息的期无限缩短，即每年的计息的次数 $n\to\infty$，则 t 年末的本利为

$$A_t=\lim_{n\to\infty}A_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}=A_0\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{n}\right)^{\frac{n}{r}rt}=A_0\mathrm{e}^{rt}.$$

小智囊

称 $A_t=A_0\mathrm{e}^{rt}$ 为连续复利公式.

小试牛刀

例 1.6.6 小王 2024 年 1 月 10 日购买一辆汽车，贷款 20 万元，以连续复利计息，年利率 4%. 2033 年 1 月 10 日到期一次还本付息，试确定贷款到期时还款总额.

解 由连续复利公式，2033 年 1 月 10 日到期一次还本付息总额为 $A_9=20\mathrm{e}^{0.04\times 9}\approx 20\times 1.4333=28.666$(万元).

2. 连续复利的现值公式

$$A_0=\frac{A_t}{\mathrm{e}^{rt}}.$$

小智囊

称 $A_0=\frac{A_t}{\mathrm{e}^{rt}}$ 为复利的现值公式.

小试牛刀

例 1.6.7 张先生计划在 10 年后为他的女儿准备大学教育基金，预计需要 12000 元. 他考虑将一笔钱投资到银行的不同理财产品中，两种产品的年利率都是 6%，其中一种产品按复利计息，每季度计息一次；另一种产品则是按连续复利计息. 张先生想知道这两种方式下，他现在需要分别投资多少钱，才能确保 10 年后刚好有足够的资金.

解 (1) 用公式 $A_0=\dfrac{A_t}{\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}}$，其中 $A_t=120000$，$n=4$，$r=0.06$，于是有 $A_0=$

$$\frac{120000}{\left(1+\frac{0.06}{4}\right)^{4\times 10}} \approx \frac{120000}{1.81402} \approx 66151.4(\text{元}).$$

(2) 用公式 $A_0=\frac{A_t}{\mathrm{e}^{rt}}$，其中 $A_t=120000, t=10, r=0.06$，于是有 $A_0=\frac{120000}{\mathrm{e}^{0.06\times 10}} \approx \frac{120000}{1.82212} \approx 65857.4(\text{元})$.

习题 1.6

小试牛刀

1. 小张将一笔资金存入民营银行，存款方式为三年定期，已如年利率为 4.5%，按照单利计息，到期时他可以获得本利和 6810 元，求他最初存入银行的本金.

2. 将 1 万元资金存入银行，年利率为 3.2%，按单利制、复利制和连续复利分别计息，计算 10 年后的本利和各为多少?

3. 某人想将一笔闲置资金一次性存入银行，准备 3 年后买一部价值 500000 元的小汽车，假设银行的存款年利率为 5%，他应该存入多少资金?

(1) 按每年计息 4 次；

(2) 按连续复利计息.

大展身手

4. 如果 3 个月存款的年利率为 1.1%，半年期存款的年利率为 1.3%，一年期存款的年利率为 1.5%. 两年期存款的年利率为 2.1%. 若设定好存款到期将自动转存为同样期限的存款，现有 5 万元，比较两年后这 4 种存期的利息收益.

5. 假定固定年利率为 8%，若按复利计算是选择现在接受 6000 元的馈赠，还是等到 7 年后接受 10000 元?

本章结构图

- 函数、极限、连续
  - 函数
    - 定义
    - 性质
      - 有界性
      - 单调性
      - 奇偶性
      - 周期性
    - 分类
      - 初等函数
      - 非初等函数
    - 几种常见的经济函数
  - 极限
    - 概念
      - 数列的极限
      - 函数的极限
    - 无穷小量和无穷大量
      - 定义
      - 性质
      - 关系
    - 求极限的方法
  - 连续
    - 定义
      - 点连续
      - 区间连续
    - 间断点
      - 第一类
      - 第二类
    - 定理
      - 最值定理
      - 介值定理
      - 零点定理
    - 初等函数的连续性
  - 极限在经济中的应用
    - 单利模型
    - 复利模型
    - 连续复利

趣味阅读(一)

拿破仑的玫瑰花

在1797年阳春三月,新婚不久的拿破仑将军与他的夫人约瑟芬受邀参观卢森堡大公国的第一国立小学.在参观结束之际,拿破仑在即兴告别演说中,向该校校长赠送了一束价值3个金路易的玫瑰花,并郑重承诺:“为了答谢贵校对我,尤其是对我夫人约瑟芬的盛情款待,我不仅今天呈献上一束玫瑰花,并且在未来的日子里,只要我们法兰西存在一天,每年的今天我都将派人送给贵校一束价值相等的玫瑰花,作为法兰西与卢森堡友谊的象征.”

然而,历史的发展往往充满了变数.拿破仑随后陷入了连绵的战争和政治漩涡中,最终因失败而被流放到圣赫勒那岛.在流放期间,他自然无法兑现对卢森堡的承诺,这一承诺也逐渐被人们遗忘.然而,令人意想不到的是,在187年后的1984年底,卢森堡政府旧事重提,向法国政府提出了关于这一承诺的索赔要求.他们坚持认为,法国要么从1797年起,以3个金路易作为一束玫瑰花的本金,按照5厘复利计算,全数还清这笔“玫瑰花外债”;要么在法国各大报刊上公开承认拿破仑是个言而无信的小人.这一要求引起了广泛的关注和讨论,因为3个金路易的“玫瑰花债项”本息经过长时间的累积,数目惊人.

面对这一突如其来的索赔要求,法国政府面临了巨大的舆论压力和道德困境.最终,法国政府选择站在了诚信的一边,他们承诺“法国将始终不渝地对卢森堡大公国的中小学教育事业予以支持和赞助,来兑现拿破仑将军的那一诺千金的‘玫瑰花’信誓”.这一决定不仅为这场旷日持久的争议画上了句号,也展示了法国政府对于诚信和承诺的尊重与坚守.

在拿破仑玫瑰花事件中,卢森堡政府要求法国政府按照拿破仑的承诺,从1797年起以3个金路易作为一束玫瑰花的本金,按5厘复利计算,全数还清这笔“玫瑰花外债”.这里涉及了复利计算的概念.复利计算是一种常用的计算利息的方法,它不仅考虑了本金产生的利息,还考虑了利息本身所产生的利息.在拿破仑玫瑰花事件的背景下,如果法国政府从1797年开始按照5厘的年利率进行复利计算,那么随着时间的推移,利息会不断累积,使得债务总额呈现出指数级的增长.通过复利计算,我们可以看到拿破仑的一个即兴承诺如何在长时间后变成一笔巨额的债务.这不仅是一个历史事件,也是一个生动的数学案例,展示了复利计算的强大力量和长期影响.

从数学的角度理解拿破仑玫瑰花事件还可以引发我们对于数学在现实生活中的应用的思考.数学不仅仅是一门抽象的学科,它在实际生活中有着广泛的应用.无论是金融投资、保险计算还是其他领域,复利计算都是一个重要的数学工具.通过深入理解和应用数学知识,我们可以更好地理解和应对现实生活中的各种复杂问题.

单元测试一(基础题)

一、选择题(每题 3 分,共 24 分)

1. 函数 $f(x)=\sqrt{3-x}+\sin\sqrt{x}$ 的定义域是(　　).

A. $[0,1]$　　B. $[0,1]\cup[1,3]$　　C. $(0,+\infty)$　　D. $[0,3]$

2. 下列函数中奇函数的是(　　).

A. $y=\cos x$　　B. $y=x+\sin x$

C. $y=e^{x}$　　D. $y=2+\tan x$

3. 下列函数在 $(0,+\infty)$ 上单调增加的是(　　).

A. $y=x^{-2}$　　B. $y=\tan x$

C. $y=2^{x}$　　D. $y=\log_{0.5}x$

4. 已知函数 $y=-\sqrt{x-1}$,那么它的反函数是(　　).

A. $y=x^{2}+1(x\in\mathbf{R})$　　B. $y=x^{2}+1(x\leqslant 0)$

C. $y=x^{2}+1(x>0)$　　D. 没有反函数

5. 函数 $y=\sqrt[5]{\ln\sin^{3}x}$ 的复合过程是(　　).

A. $y=\sqrt[5]{u},u=\ln v,v=\omega^{3},\omega=\sin x$　　B. $y=\sqrt[5]{u^{3}},u=\ln\sin x$

C. $y=\sqrt[5]{\ln u^{3}},u=\sin x$　　D. $y=\sqrt[5]{u},u=\ln v,v=\sin x$

6. 下列 x 的哪种变换趋势使 $y=\sin\dfrac{1}{x}$ 为无穷小(　　).

A. $x\to 0$　　B. $x\to\dfrac{1}{\pi}$　　C. $x\to\pi$　　D. $x\to 2\pi$

7. $x\to 0$ 时,无穷小量 $e^{2x}-1$ 是 $\sin x$ 的(　　)无穷小量.

A. 等价　　B. 高阶　　C. 低阶　　D. 同阶非等价

8. 函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x(x^{2}-1)}$ 的第二类间断点的个数为(　　).

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

二、填空题(每空 3 分,共 24 分)

1. 设函数 $y=f(x)$ 由 $y=\sin u,u=a^{v},v=\sqrt{x}$ 复合而成,则 $f(x)=$________.

2. 函数 $y=x^{2}-\dfrac{1}{2}x$,当 $x=1,\Delta x=0.5$ 时的增量 $\Delta y=$________.

3. 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^{3}+4x^{2}+1}{ax^{m}+x^{2}+\sqrt{2}}=\dfrac{3}{5}$,则 $m+a=$________.

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-2)^{3}(2x-1)^{2}}{x^{5}+1}=$________.

5. 设 $\lim\limits_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{2}{x}$,则常数 $a=$________.

6. 若函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{2}-4}{x+2} & x\neq -2\\ C & x=-2\end{cases}$ 在实数范围内连续,那么 $\lim\limits_{x\to -2}f(x)=$________;

$C=$________.

7. 已知某产品的总成本函数为 $C(q)=q^2+3q+50$(元),则产量为 10 件时的平均本 $\bar{C}(10)=$________.

三、计算题(每题 5 分,共 30 分)

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{10}$.

2. $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x+\cos x}{\cos 2x}$.

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+9})$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(h-x)-\ln h}{x}(h>0)$.

四、解答题

1. (8 分)设函数

$$f(x)=\begin{cases}x+1 & x>1\\ 2 & |x|\leqslant 1.\\ 1-x & x<-1\end{cases}$$

(1) 作出函数的图像;

(2) 讨论函数在 $x=\pm 1$ 的连续性;

(3) 指出函数的连续区间.

2. (7 分)设函数 $f(x)=\sin x, g(x)=\cos x$,证明:至少存在一点 $\xi\in(0,5\pi)$,使得 $f(\xi)=g(\xi)$.

3. (7 分)设某商品的销售价格为 p(元)时,生产量 $q=20-\dfrac{p}{4}$. 已知工厂生产该商品的成本函数为 $C(q)=120+10q+q^2$(元),试求该商品销售利润函数.

单元测试一(提升题)

一、选择题(每题 3 分,共 24 分)

1. 下列各对函数中是同一函数的是(　　).

A. $f(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{x+3}$ 与 $y=x-1$　　B. $f(x)=\ln x^3$ 与 $y=3\ln x$

C. $f(x)=\ln x^{10}$ 与 $y=10\ln x$　　D. $f(x)=(1-\cos^2 x)^{\frac{1}{2}}$ 与 $y=\sin x$

2. 函数 $y=x\dfrac{a^x-1}{a^x+1}(a>0$ 且 $a\neq 1)$ 是(　　).

A. 偶函数　　B. 奇函数　　C. 非奇非偶函数　　D. 奇偶函数

3. 函数 $y=2^{\frac{1}{x}}$ 在 $x=0$ 处(　　).

A. 有定义　　B. 极限存在　　C. 左极限存在　　D. 右极限存在

4. 无穷多个无穷小量之和(　　).

A. 必是无穷小量　　B. 必是无穷大量　　C. 必是有界量　　D. 不能确定

5. 设当 $x\to 0$ 时,函数 $f(x)=\ln(1+kx^2)$ 与 $g(x)=1-\cos x$ 是等价无穷小,则常数 k 的值为(　　).

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. 1　　D. 2

6. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$,则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的(　　).

A. 可去间断点　　B. 第二类间断点

C. 连续点　　D. 跳跃间断点

7. 若函数 $f(x)=\begin{cases}e^{\frac{1}{x}}, & x<0\\ a+\cos x, & x\geqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续,则常数 $a=$(　　).

A. 0　　B. 1　　C. -1　　D. -2

8. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-a}{x-2} & x\neq 2\\ b & x=2\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续,a,b 为常数,则 $a-b=$(　　).

A. -2　　B. 0　　C. 2　　D. 4

二、填空题(每空 3 分,共 24 分)

1. 已知 $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}+3$,则 $f(x)=$________.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n^2+1)+(n^2+2)+\cdots+(n^2+n)}{n(n+1)(n+2)}=$________.

3. 已知 $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3-ax^2-x+4}{x+1}=b$,则 $a+b=$________.

4. 函数 $f(x)=\ln\arcsin x$ 的定义域为________.

5. $\lim\limits_{x\to 0}(bx+1)^{\frac{1}{x}}=e^2$,则 $b=$________.

6. 若 $x\to 0$ 时,$(1-\cos x)$ 与 $a\sin^2\frac{x}{2}$ 是等价无穷小量,则 $a=$________.

7. 已知某产品的需求函数为 $Q=8-5p$(p 为价格,单位:元;Q 为需求量,单位 t)则该产品需求量为 6 t 时的总收益为________,平均收益为________.

三、计算题(每题 5 分,共 25 分)

1. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$.　　2. $\lim\limits_{n\to\infty}2^n\sin\dfrac{x}{2^n}$.

3. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{x^2-\pi^2}$.　　4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin 2x}$.

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3}{2x+1}\right)^{x+2}$.　　6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}$.

四、解答题

1. (9 分)给 $f(0)$ 补充定义,使得 $f(x)=\ln(1+2x)^{\frac{3}{x}}$ 在 $x=0$ 处连续.

2. (9 分)求函数 $f(x)=\dfrac{\sin x(x^2-3x+2)}{|x|(x^2-1)}$ 的间断点,并说明其类型.

3. (9 分)某人想将一笔闲置资金进行理财,准备 4 年后买一部价值 100000 元的汽车,假设该理财产品的年利率为 5%,按照连续复利计算,他应该存入多少资金?

第二章　一元函数微分学

扫码可见本章教学资源
(含微课、自测题及课后参考答案)

得进一寸进一寸，得进一尺进一尺，不断积累，飞跃必来，突破随之.

——华罗庚(1910－1985)，中国现代著名数学家

数学故事

华罗庚是新中国现代数学的开山鼻祖.他是中国解析数论、矩阵几何学、自守函数论等很多方面研究的创始人与奠基者，也是我国进入世界著名数学家行列最杰出的代表者.他的研究成果被国际数学界命名为“华氏定理”“布劳威尔-加当-华定理”“华氏算子”“华氏不等式”等.他一生为我们留下了两百多篇学术论文，10部专著，其中8部被国外翻译出版，有些已列入20世纪经典著作之列.他是美国科学院历史上第一个当选为外籍院士的中国学者.他还当选为联邦德国巴伐利亚科学院院士，法国南锡大学、美国伊利诺斯大学与香港中文大学授予他荣誉博士学位.他被列为芝加哥科学技术博物馆中当今88个数学伟人之一.

导数概念是变量的变化速度在数学上的抽象，在理论上和实践上有着广泛的应用.本章将从寻找曲线的切线斜率、探索经济类函数的变化率和分析函数增量的近似表达式入手，抽象出导数与微分这两个微分学的基本概念，进而讨论函数的微分法，最后应用导数研究函数的各种性质.

学习目标

1. 了解导数的概念，理解导数的几何意义；了解可导和连续的关系；掌握导数的四则运算法则和复合函数的求导法则，掌握基本初等函数的导数公式表；了解高阶导数的概念；能熟练计算初等函数的一阶和二阶导数.

2. 了解微分的概念；理解可微和可导的关系；掌握微分的计算；掌握隐函数和参数方程的求导方法.

3. 掌握罗尔定理与拉格朗日中值定理的内容及其应用；了解柯西中值定理.

4. 熟练掌握应用洛必达法则求解“$\frac{0}{0}$”型未定式的极限和“$\frac{\infty}{\infty}$”型未定式的极限的方法，掌握其他可转化为“$\frac{0}{0}$”型或“$\frac{\infty}{\infty}$”型的未定式的极限的求解方法.

5. 熟练掌握用导数判定函数单调性及求解函数极值的方法，掌握求解函数最值的方

法，并能解决经济分析等实际工作中的最值问题.

6. 理解曲线凹凸性及拐点的概念，熟练掌握应用二阶导数判定函数凹凸性的方法，会求函数的拐点，会求水平、铅直渐近线，会作一般函数的图像.

7. 能运用函数导数的知识解决一些实际问题，提高在经济问题中进行数学建模并解决问题的能力.

第一节　导数的概念

应用案例

某科技公司生产一款畅销的智能手环. 经过市场调研和生产数据拟合，其总成本函数(单位：万元)为：$C(q)=500+100q-0.1q^2$，其中 q 为生产的手环数量(单位：千台). 那么如何估算生产第 $n(n\geqslant 1)$ 千台手环时的近似成本？另外，生产此产品的单位成本是如何变化的？

一、引例

1. 切线的斜率

在确定曲线的切线斜率之前先要介绍什么叫曲线的切线. 在初等数学里，将切线定义为与曲线只交一点的直线. 这种定义只适合少数几种曲线，如圆、椭圆等，这对高等数学中研究的曲线就不适合了. 因此，我们定义曲线的切线如下.

定义 2.1.1　点 P_0 是曲线 L 上的一个定点，点 P 是一个动点，当点 P 沿着曲线 L 无限趋向于点 P_0 时，如果割线 PP_0 的极限位置 P_0T 存在，则称直线 P_0T 为曲线 L 在点 P_0 处的**切线**.

设曲线 L 的方程为 $y=f(x)$(如图 2－1 所示)，在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处的附近任取一点 $P(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$，那么割线 PP_0 的斜率为

$$\tan\varphi=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

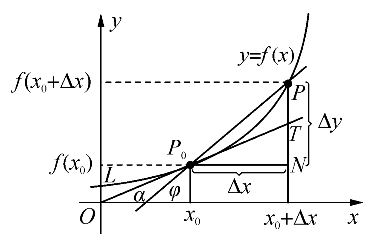


图 2－1

如果当点 P 沿曲线无限趋向于点 P_0 时，割线 PP_0 的极限位置存在，即点 P_0 处的切线存在，此时 $\Delta x\to 0$，$\varphi\to\alpha$，割线 PP_0 斜率 $\tan\varphi$ 趋向于切线 P_0T 的斜率 $\tan\alpha$，即

$$\tan\alpha=\lim_{\varphi\to\alpha}\tan\varphi=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.\qquad(2-1)$$

在数量上，它表示函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处的变化率.

2. 经济学中单位产品的成本变化

设成本函数为 $C=C(q)$，其中 q 为产量，那么当产量为 q_0 时，再生产一个单位的产品时

所增加的成本是多少?

假设产量为 q_0 时,产量的改变量为 Δq,则成本的改变量为 $\Delta C=C(q_0+\Delta q)-C(q_0)$,而 $\dfrac{\Delta C}{\Delta q}=\dfrac{C(q_0+\Delta q)-C(q_0)}{\Delta q}$ 表示此时成本的平均变化率.

当 $\Delta q\to 0$ 时,若

$$\lim_{\Delta q\to 0}\frac{\Delta C}{\Delta q}=\lim_{\Delta q\to 0}\frac{C(q_0+\Delta q)-C(q_0)}{\Delta q}\tag{2-2}$$

存在,那么称此极限为当产量为 q_0 时,再生产一个单位的产品时所增加的成本.

上述的两个例子的实际意义不同,但从数量关系上分析,式(2-1)和式(2-2)都是相同的,都是要求函数在某一点处的变化率,研究的都是函数在某一点处的函数的增量与自变量增量比值的极限问题.我们把它们抽象成导数定义.

二、导数的定义

1. 某点处的导数

定义 2.1.2　函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 某邻域内有定义.给 x_0 以增量 Δx($x_0+\Delta x$ 仍然在上述邻域内),函数 y 相应地有增量

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0).$$

如果 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 存在,则称此极限值为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数.记作 $f'(x_0)$,或 $y'\big|_{x=x_0}$,或 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=x_0}$,即

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

此时也称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导.如果上述极限不存在,则称函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处不可导或导数不存在.

小提示

若设 $x=x_0+\Delta x$,则有 $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

2. 某点处的左、右导数

定义 2.1.3　如果 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 存在,则称此极限值为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的**左导数**,记作 $f'_-(x_0)$,即:$f'_-(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

如果 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 存在,则称此极限值为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的**右**

导数，记作 $f'_{+}(x_0)$，即：$f'_{+}(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^{+}}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

小提示

若设 $x=x_0+\Delta x$，则有

$$f'_{-}(x_0)=\lim_{x\to x_0^{-}}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},\quad f'_{+}(x_0)=\lim_{x\to x_0^{+}}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

3. 可导的充要条件

函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导的充要条件是 $f'_{-}(x_0)$ 和 $f'_{+}(x_0)$ 都存在且相等，即

$$f'(x_0)\text{ 存在}\Leftrightarrow f'_{-}(x_0)=f'_{+}(x_0).$$

小提示

此结论可用于判断分段函数在分段点处的可导性.

4. 导函数的定义

定义 2.1.4 如果函数 $y=f(x)$ 在开区间 (a,b) 内每一点可导，则称函数 $y=f(x)$ 在开区间 (a,b) 内可导. 这时，由开区间 (a,b) 内所有点处的导数构成一个新的函数，把这一新函数称为 $y=f(x)$ 在开区间 (a,b) 内的**导函数**. 记作 $f'(x)$，或 y'，或 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，即

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

小提示

(1) 在不会发生混淆的情况下，导函数简称为导数.

(2) $f'(x)$ 和 $f'(x_0)$ 是函数与函数值的关系，即 $f'(x_0)$ 是 $f'(x)$ 在点 x_0 处的函数值. 因此，如果 $f'(x)$ 已知，要求 $f'(x_0)$，只要把 $x=x_0$ 代入 $f'(x)$ 中求函数值即可.

5. 求导举例

根据导数的定义，求函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数的步骤如下：

(1) 求函数的增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$；

(2) 求比值 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$；

(3) 求极限 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

小提示

求函数 $y=f(x)$ 的导函数的步骤与上述类似，只要将 x_0 换成 x.

小试牛刀

例 2.1.1　求函数 $f(x)=x^2$ 在 $x=1$ 处的导数，即求 $f'(1)$.

解　第一步　求 Δy，$\Delta y=f(1+\Delta x)-f(1)=(1+\Delta x)^2-1^2=2\Delta x+(\Delta x)^2$.

第二步　求 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$，$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{2\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=2+\Delta x(\Delta x\neq 0)$.

第三步　求极限，$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2+\Delta x)=2$.

所以 $f'(1)=2$.

例 2.1.2　求函数 $f(x)=C$（C 为常数）的导数.

解　$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=C-C=0$，

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=0$，

从而有 $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=0$.

即 $(C)'=0$（常数的导数恒等于 0）.

例 2.1.3　求函数 $f(x)=\cos x$ 的导数.

解　$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=\cos(x+\Delta x)-\cos x=-2\sin\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right)\sin\dfrac{\Delta x}{2}$.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}=-\lim_{\Delta x\to 0}\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=-\sin x.$$

即 $(\cos x)'=-\sin x$.

小智囊

仿照例 2.1.3 可以求得 $(\sin x)'=\cos x$.

大展身手

例 2.1.4　求函数 $f(x)=\ln x$ 当 $x\in(0,+\infty)$ 的导数.

解　$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\ln(x+\Delta x)-\ln x}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\dfrac{\Delta x}{x}}{\Delta x}=\dfrac{1}{x}$.

即 $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$.

小智囊

仿照例 2.1.4 可以求得 $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}(a>0,且\ a\neq 1)$.

例 2.1.5 求函数 $f(x)=x^n(n\in\mathbf{N}_+)$ 的导数.

解 $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=(x+\Delta x)^n-x^n=C_n^1x^{n-1}\Delta x+C_n^2x^{n-2}(\Delta x)^2+\cdots+C_n^n(\Delta x)^n$,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}[C_n^1x^{n-1}+C_n^2x^{n-2}\Delta x+\cdots+C_n^n(\Delta x)^{n-1}]=C_n^1x^{n-1}=nx^{n-1}.$$

即 $(x^n)'=nx^{n-1}(x\in\mathbf{N}_+)$.

三、导数的几何意义

根据导数定义及曲线的切线斜率的求法，函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数的几何意义就是曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x_0,f(x_0))$ 处的切线斜率（如图 2-2 所示），即 $\tan\alpha=f'(x_0)$.

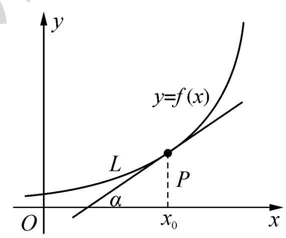


图 2-2

由此可知，曲线 $y=f(x)$ 上点 P 处的切线方程为

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0).$$

法线方程为

$$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0),f'(x_0)\neq 0.$$

小试牛刀

例 2.1.6 求曲线 $y=x^2$ 在点 (1,1) 处的切线和法线的方程.

解 从例 2.1.1 知 $f'(1)=2$，即点 (1,1) 处的切线斜率为 2，所以曲线 $y=x^2$ 在点 (1,1) 处的切线方程为 $y-1=2(x-1)$，即 $y=2x-1$.

法线方程为 $y-1=-\dfrac{1}{2}(x-1)$，即 $y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}$.

大展身手

例 2.1.7 求曲线 $y=\ln x$ 上平行于直线 $y=x+1$ 的切线.

解 设曲线 $y=\ln x$ 上过点 (x_0,y_0) 处的切线平行于直线 $y=x+1$，已知直线的斜率为 1，根据导数的几何意义及导函数与导数的关系，有 $(\ln x)'\Big|_{x=x_0}=\dfrac{1}{x_0}=1$，即 $x_0=1$，代入 $y=\ln x$ 中得 $y_0=0$.

所以曲线在点 (1,0) 处的切线平行于直线 $y=x+1$，该切线方程为 $y=x-1$.

四、导数的经济学意义

由导数的定义以及引例 2 可知：成本函数 $C=C(q)$ 在产量 q_0 处的导数 $C'(q_0)=$

$\lim\limits_{\Delta q \to 0} \dfrac{\Delta C}{\Delta q} = \lim\limits_{\Delta q \to 0} \dfrac{C(q_0 + \Delta q) - C(q_0)}{\Delta q}$ 表示的是在产量为 q_0 的基础上再生产一个单位的产品时增加的成本，通常我们称成本函数 $C = C(q)$ 的导数 $C'(q)$ 为边际成本，记为 MC.

若收益函数为 $R = R(q)$（其中 q 为销售量），则 $R'(q)$ 为边际收益，其经济意义是：销售量为 q_0 的基础上再销售一个单位的产品时，增加的收益约为 $R'(q_0)$.

小提示

经济学中其他经济函数的边际函数含义是类似的，不再赘述.

小试牛刀

例 2.1.8　利用导数的定义和经济意义，求解【应用案例】.

解　由导数的经济意义，生产第 $n(n \geqslant 1)$ 千台手环时的近似成本即为 $(n-1)$ 处的边际成本 $C'(n-1)$.

下面利用导数的定义求边际成本，即成本函数 $C(q) = 500 + 100q - 0.1q^2$ 的导数.

因为：$\Delta C = C(q + \Delta q) - C(q) = 100\Delta q - 0.2q \cdot \Delta q - 0.1\Delta q^2$，

$\dfrac{\Delta C}{\Delta q} = 100 - 0.2q - 0.1\Delta q$，

$\lim\limits_{\Delta q \to 0} \dfrac{\Delta C}{\Delta q} = \lim\limits_{\Delta q \to 0}(100 - 0.2q - 0.1\Delta q) = 100 - 0.2q$，

从而有 $C'(q) = 100 - 0.2q$.

那么 $C'(n-1) = 100 - 0.2(n-1) = -0.2n + 100.2$.

即生产第 $n(n \geqslant 1)$ 千台手环时的近似成本为 $-0.2n + 100.2$.

且由边际成本的表达式可以看出，产量越大，单位成本越小.

五、可导与连续的关系

函数在点 x_0 处连续是指 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$ 或 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$；而函数在 x_0 处可导是指极限 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 或 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ 存在. 那么，这两种极限具有怎样的关系呢？

定理 2.1.1　如果函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可导，则 $y = f(x)$ 在点 x_0 处连续.

证明　因为 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可导，所以

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0).$$

由函数极限与无穷小的关系可知，$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha$（$\alpha$ 为 $\Delta x \to 0$ 时的无穷小），

于是
$$\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x,$$

从而
$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} [f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x] = 0.$$

即函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处连续.

小提示

逆命题不一定成立.

小试牛刀

例 2.1.9 讨论函数 $y=|x|$ 在 $x=0$ 处的连续性与可导性.

解 $\Delta y=f(0+\Delta x)-f(0)=|0+\Delta x|-|0|=|\Delta x|$,

因为 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to 0}|\Delta x|=0$,从而 $y=|x|$ 在 $x=0$ 处连续.

因为
$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{-\Delta x}{\Delta x}=-1,\ \lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1,$$

所以在 $x=0$ 处,左、右导数不相等.

从而 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 不存在,即在 $x=0$ 处 $y=|x|$ 不可导.

大展身手

例 2.1.10 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+x & x\leqslant 1\\ 2x & x>1\end{cases}$ 在 $x=1$ 处的连续性与可导性.

解 $x=1$ 是函数的分段点,讨论其连续性与可导性时,一般情况下,均需对其左右两侧情况分别加以讨论. 先求在 $x=1$ 处的 Δy.

当 $\Delta x<0$ 时,$\Delta y=f(1+\Delta x)-f(1)=(1+\Delta x)^2+(1+\Delta x)-2=3\Delta x+(\Delta x)^2$,

当 $\Delta x>0$ 时,$\Delta y=f(1+\Delta x)-f(1)=2(1+\Delta x)-2=2\Delta x$,

易见 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\Delta y=0$,故 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$.

所以函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续.

因为 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{3\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}(3+\Delta x)=3$,

$\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{2\Delta x}{\Delta x}=2$.

从而 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\neq\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

所以函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处不可导.

习题 2.1

小试牛刀

1. 利用导数定义求函数 $y=x^3$ 在 $x=1$ 处的导数.

2. 利用导数定义求函数 $y=\dfrac{1}{1-x}$ 在 $x=0$ 处的导数.

3. 求曲线 $y=\sqrt{x}$ 在点 $(4,2)$ 处的切线方程和法线方程.

4. 利用导数定义求函数 $f(x)=(x+1)(x+2)\cdots(x+n)(n\in\mathbf{N}_+)$ 在 $x=-1$ 处的导数.

5. 已知函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导,利用导数定义确定下列各题中的系数 k.

(1) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=kf'(x_0)$;

(2) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0-2h)-f(x_0)}{h}=kf'(x_0)$;

(3) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+a\Delta x)-f(x_0-a\Delta x)}{\Delta x}=kf'(x_0)$($a$ 为不等于 0 的常数).

大展身手

6. 求曲线 $y=x^3$ 上与直线 $x-y=5$ 平行的切线方程.

7. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2 & x\geqslant c\\ ax-c^2 & x<c\end{cases}$.

(1) 求 $x=c$ 处的右导数;

(2) 当 a 取何值时,函数 $f(x)$ 在 $x=c$ 处可导.

8. 如果 $f(x)$ 为偶函数,且 $f'(0)$ 存在,证明 $f'(0)=0$.

9. 设函数 $g(x)$ 在 $x=a$ 处连续,证明函数 $f(x)=(x-a)g(x)$ 在 $x=a$ 处可导,并求 $f'(a)$.

10. 已知 $f(x)=\begin{cases}\sin x & x<0\\ x & x\geqslant 0\end{cases}$,求 $f'(x)$.

11. 设 $f(x)$ 是实数集上可导的奇函数,且 $\lim\limits_{n\to\infty}nf\left(\dfrac{2}{n}\right)=1$,则 $f'(0)=$________.

12. 证明函数 $f(x)=x\,|\,x\,|=\begin{cases}-x^2 & x<0\\ x^2 & x\geqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导.

13. 某商店销售某种品牌的手机,其销售量 Q(台)与销售价格 p(元)之间的关系如下:

$$Q=1000-\frac{p}{2}.$$

求当销量 $Q=400$ 时,若再多卖出一部手机,该商店收益大约增加多少元?

第二节　导数的计算

应用案例

某智能手机制造商分析新款机型的定价策略.已知该手机的总销售收入 R(万元)是其市场销量 q(千台)的函数,记为 $R=R(q)$.根据市场调研,销量 q 受零售价格 p(万元/台)

影响，满足需求关系 $q=q(p)$.

公司财务部门测算发现，在当前销售水平下，销量每增加 1 千台，总销售收入将增加 50 万元. 同时，市场团队预估，价格每下调 0.1 万元/台，销量可提升 0.2 千台.

问题：若公司决定进一步降低价格，总销售收入随价格下降的瞬时变化率是多少？

一、导数的四则运算法则

法则 2.2.1 若函数 $u=u(x)$，$v=v(x)$ 都在点 x 处可导，则 $u(x)\pm v(x)$ 在点 x 处也可导，且 $[u(x)\pm v(x)]'=u'(x)\pm v'(x)$.

法则 2.2.2 若函数 $u=u(x)$，$v=v(x)$ 都在点 x 处可导，则 $u(x)\cdot v(x)$ 在点 x 处也可导，且 $[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$.

法则 2.2.3 若函数 $u=u(x)$，$v=v(x)$ 都在点 x 处可导，且在点 x 处 $v(x)\neq 0$，则 $\dfrac{u(x)}{v(x)}$ 在点 x 处也可导，且 $\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]'=\dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$.

证明 上述三个公式的证明思路都类似，我们只证第三个.

令 $y=\dfrac{u(x)}{v(x)}$，则

$$\Delta y=\frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)}-\frac{u(x)}{v(x)}=\frac{u(x+\Delta x)v(x)-u(x)v(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)v(x)}$$
$$=\frac{[u(x+\Delta x)-u(x)]v(x)-u(x)[v(x+\Delta x)-v(x)]}{v(x+\Delta x)v(x)}=\frac{\Delta u v(x)-u(x)\Delta v}{v(x+\Delta x)v(x)},$$

从而

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\dfrac{\Delta u}{\Delta x}v(x)-u(x)\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v(x+\Delta x)v(x)}.$$

因为

$$u'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x},v'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x},$$

所以根据极限的四则运算法则有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{\Delta u}{\Delta x}v(x)-u(x)\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v(x+\Delta x)v(x)}=\frac{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x}\cdot v(x)-u(x)\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}v(x+\Delta x)v(x)}=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)},$$

即

$$\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]'=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}.$$

推论 2.2.1 $(u_1(x)\pm u_2(x)\pm\cdots\pm u_n(x))'=u'_1(x)\pm u'_2(x)\pm\cdots\pm u'_n(x)$.

推论 2.2.2 $(Cu(x))'=Cu'(x)$（C 为常数）.

推论 2.2.3 $\left[\dfrac{1}{u(x)}\right]'=-\dfrac{u'(x)}{[u(x)]^2}$.

推论 2.2.4 $(u(x)v(x)w(x))'=u'(x)v(x)w(x)+u(x)v'(x)w(x)+u(x)v(x)w'(x)$.

小试牛刀

例 2.2.1　设 $f(x)=2x^4+5\sin x-4$，求 $f'(x)$.

解　$f'(x)=2(x^4)'+5(\sin x)'-(4)'=8x^3+5\cos x$.

例 2.2.2　设 $f(x)=x\ln x$，求 $f'(x)$.

解　$f'(x)=(x\ln x)'=(x)'\ln x+x(\ln x)'=1\cdot\ln x+x\cdot\dfrac{1}{x}=\ln x+1$.

例 2.2.3　某公司从过去统计数字中推知，t 个月的总销售量(万元)由下式给出：

$$Q(t)=0.03t^3+0.5t^2+2t+3.$$

(1) 求 $Q'(t)$；

(2) 求 $Q(5)$ 和 $Q'(5)$（精确到小数点后两位）；

(3) 简短说明(2)中计算结果的经济意义.

解　(1) $Q'(t)=(0.03t^3+0.5t^2+2t+3)'=0.09t^2+t+2$；

(2) $Q(5)=0.03\times5^3+0.5\times5^2+2\times5+3=29.25$，

$Q'(5)=0.09\times5^2+5+2=9.25$；

(3) $Q(5)=29.25$ 表示 5 个月的总销售量为 29.25 万元.

$Q'(5)=9.25$ 表示第 6 个月的销售量约为 9.25 万元.

大展身手

例 2.2.4　设 $f(x)=\cot x$，求 $f'(x)$.

解　$(\cot x)'=\left(\dfrac{\cos x}{\sin x}\right)'=\dfrac{(\cos x)'\sin x-(\sin x)'\cos x}{\sin^2 x}=-\dfrac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x}=-\csc^2 x$.

即

$$(\cot x)'=-\csc^2 x.$$

同理可得：

$$(\tan x)'=\sec^2 x.$$

例 2.2.5　设 $f(x)=\sec x$，求 $f'(x)$.

解　根据推论 2.2.3，有

$$f'(x)=(\sec x)'=\left(\frac{1}{\cos x}\right)'=-\frac{(\cos x)'}{\cos^2 x}=\frac{\sin x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{\cos x}=\sec x\cdot\tan x,$$

即

$$(\sec x)'=\sec x\tan x.$$

同理可得

$$(\csc x)'=-\csc x\cot x.$$

二、反函数的求导法则

法则 2.2.4　如果单调函数 $x=\varphi(y)$ 在区间 I_y 内可导，且 $\varphi'(y)\neq0$，则 $x=\varphi(y)$ 的反函数 $y=f(x)$ 在对应的区间 I_x 内也可导，且

$$f'(x)=\left.\frac{1}{\varphi'(y)}\right|_{y=f(x)},$$

即反函数的导数等于原来函数的导数之倒数.

证明从略.

小试牛刀

例 2.2.6 求函数 $y=\arcsin x$ 的导数.

解 因为 $y=\arcsin x$ 是 $x=\sin y, y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 的反函数,所以

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{(\sin y)'}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

即
$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

同理可得
$$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

例 2.2.7 求函数 $y=a^x(a>0,a\neq 1)$ 的导数.

解 因为函数 $y=a^x(a>0,a\neq 1)$ 的反函数是 $x=\log_a y$,所以

$$(a^x)'=\frac{1}{(\log_a y)'}=\frac{1}{\frac{1}{y\ln a}}=y\ln a=a^x\ln a,$$

即
$$(a^x)'=a^x\ln a.$$

三、基本初等函数的导数公式

由前面所举的大量例题可见,基本初等函数的求导公式和求导法则在初等函数的求导运算中是非常重要的,必须牢牢记住,熟练掌握. 为便于查阅,我们将基本初等函数的求导公式汇总如下:

$(C)'=0.$ $\qquad$ $(x^\mu)'=\mu x^{\mu-1}.$

$(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x.$ $\qquad$ $(a^x)'=a^x\ln a.$

$(\ln x)'=\frac{1}{x}.$ $\qquad$ $(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}.$

$(\sin x)'=\cos x.$ $\qquad$ $(\cos x)'=-\sin x.$

$(\tan x)'=\sec^2 x.$ $\qquad$ $(\cot x)'=-\csc^2 x.$

$(\sec x)'=\sec x\tan x.$ $\qquad$ $(\csc x)'=-\csc x\cot x.$

$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$ $\qquad$ $(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}.$ $\qquad$ $(\operatorname{arccot} x)'=-\frac{1}{1+x^2}.$

四、复合函数的求导法则

法则 2.2.5(链式法则) **若函数 $y=f(u), u=\varphi(x)$ 均可导,则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$**

也可导,且 $y'_x=y'_u\cdot u'_x$,或 $y'_x=f'(u)\cdot\varphi'(x)$,或 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

证明　设变量 x 有增量 Δx,相应地变量 u 有增量 Δu,从而 y 有增量 Δy. 由于 u 可导,所以 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta u=0$. 于是

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x},$$

即

$$y'_x=y'_u\cdot u'_x.$$

推论 2.2.5　设 $y=f(u),u=\varphi(v),v=\psi(x)$ 均可导,则复合函数 $y=f\{\varphi[\psi(x)]\}$ 也可导,且

$$y'_x=y'_u\cdot u'_v\cdot v'_x.$$

小提示

(1) 公式可以推广至有限次复合情形. 常称之为复合函数的链式法则.

(2) 求复合函数的导数时,要分清复合过程,认准中间变量.

小试牛刀

例 2.2.8　设 $y=\cos^3 x$,求 y'.

解　$y=\cos^3 x$ 是由 $y=u^3,u=\cos x$ 复合而成,而 $y'_u=3u^2,u'_x=-\sin x$,所以

$$y'_x=y'_u\cdot u'_x=3u^2(-\sin x)=-3\cos^2 x\sin x.$$

例 2.2.9　设 $y=(2x-3)^5$,求 y'.

解　$y=(2x-3)^5$ 是由 $y=u^5,u=2x-3$ 复合而成,而 $y'_u=5u^4,u'_x=2$,所以

$$y'_x=y'_u\cdot u'_x=10u^4=10(2x-3)^4.$$

小提示

复合函数求导熟练后,中间变量可以不必写出.

例 2.2.10　设 $y=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$,求 y'.

解　先用除法的求导公式,遇到复合函数时,再用链式法则.

$$y'=\frac{(x)'\sqrt{1-x^2}-x(\sqrt{1-x^2})'}{(\sqrt{1-x^2})^2}=\frac{\sqrt{1-x^2}-x\cdot\dfrac{1}{2}\dfrac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}=\frac{(1-x^2)+x^2}{\sqrt{1-x^2}(1-x^2)}=\frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

大展身手

例 2.2.11 已知 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$，求 $f'(x)$.

解 当 $x\neq 0$ 时，$f'(x)=2x\sin\dfrac{1}{x}+x^2\cos\dfrac{1}{x}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)=2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}$.

当 $x=0$ 时，$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x}-0}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$.

所以，$f'(x)=\begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$.

例 2.2.12 求解【应用案例】中总销售收入随价格下降的瞬时变化率.

解 总销售收入随价格下降的瞬时变化率即为 $\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}p}$. 由条件可知：$\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}q}=50$ ，$\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}p}=-2$，由复合函数的链式法则有：

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}p}=\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}q}\cdot\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}p}=-2\times 50=-100.$$

上式所表示的经济意义是：价格每下降 1 万元/台，总销售收入将增加 100 万元(负号表示价格与收入变化方向相反). 因此，降价策略在当前水平下将加速收入增长.

五、高阶导数

如果可导函数 $y=f(x)$ 的导函数 $y'=f'(x)$ 仍然可导，那么我们就可以对其继续求导，对此我们给出如下定义.

定义 2.2.1 若可导函数 $y=f(x)$ 的导函数 $y'=f'(x)$ 仍然可导，则称 $y'=f'(x)$ 的导数为函数 $y=f(x)$ 的**二阶导数**，记作 y'' 或 $f''(x)$ 或 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$，即

$$y''=(y')' \quad 或 \quad y''=[f'(x)]' \quad 或 \quad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right).$$

相应地，称 $f'(x)$ 为函数 $y=f(x)$ 的**一阶导数**.

类似地，若 $f''(x)$ 仍然可导，则称 $f''(x)$ 的导数 $[f''(x)]'$ 为函数 $y=f(x)$ 的**三阶导数**，记作 y'''，或 $f'''(x)$，或 $\dfrac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}$，…….

一般地，若函数 $y=f(x)$ 的 $n-1$ 阶导函数仍然可导，则称 $n-1$ 阶导函数的导数为函数 $y=f(x)$ 的 ***n* 阶导数**，记作 $y^{(n)}$，或 $f^{(n)}(x)$，或 $\dfrac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}$，即

$$y^{(n)}=[y^{(n-1)}]'，或\ f^{(n)}(x)=[f^{(n-1)}(x)]'，或\frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}x^{n-1}}\right).$$

函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的 n 阶导数记作 $y^{(n)}(x_0)$，或 $f^{(n)}(x_0)$，或 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}\right|_{x=x_0}$.

小提示

函数 $y=f(x)$ 的二阶及二阶以上的导数统称为函数 $y=f(x)$ 的**高阶导数**.

小试牛刀

例 2.2.13　求函数 $y=-x^4+4x^3-2x^2+3x-1$ 的四阶导数 $y^{(4)}$ 和五阶导数 $y^{(5)}$.

解　$y'=-4x^3+12x^2-4x+3$,

$y''=(y')'=-(4\cdot 3)x^2+24x-4$,

$y'''=(y'')'=-(4\cdot 3\cdot 2)x+24$,

$y^{(4)}=(y''')'=-4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=-4!, y^{(5)}=0$.

小智囊

一般地，若 $y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$，则 $y^{(n)}=a_0n!, y^{(n+1)}=0$.

例 2.2.14　求函数 $y=3^x$ 的 n 阶导数 $\dfrac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}$.

解　$y'=3^x\ln 3, y''=(y')'=3^x\ln 3\cdot\ln 3=3^x(\ln 3)^2$,

$y'''=(y'')'=3^x\ln 3\cdot(\ln 3)^2=3^x(\ln 3)^3$, …… ,

$y^{(n)}=3^x(\ln 3)^n$.

小智囊

$(\mathrm{e}^x)^{(n)}=\mathrm{e}^x$.

大展身手

例 2.2.15　求函数 $y=\dfrac{1}{1+x}$ 的 n 阶导数 $(n\in\mathbf{N}_+)$.

解　$y'=-\dfrac{1}{(1+x)^2}, y''=\dfrac{1\cdot 2}{(1+x)^3}, y'''=-\dfrac{1\cdot 2\cdot 3}{(1+x)^4}, y^{(4)}=\dfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{(1+x)^5}$,

以此类推，可得　$y^{(n)}=(-1)^n\dfrac{n!}{(1+x)^{n+1}}$.

例 2.2.16　求函数 $y=\sin x$ 的 n 阶导数 $\dfrac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}$.

解　$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\cos x=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$,

$\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+2\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)$,

$$\frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}x^3}=\cos\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+3\cdot\frac{\pi}{2}\right),\cdots\cdots,$$

$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

小提示

求函数的 n 阶导数的关键是寻求各阶导数表达形式的规律.在计算中应注意对各阶导数的表达形式进行适当的恒等变形,以利于发现其规律.

习题 2.2

小试牛刀

1. 求下列函数的导数.

(1) $y=x^2\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x^3}$;

(2) $y=2x^3-x^{-2}+\sin\frac{\pi}{5}+\ln 3$;

(3) $y=\mathrm{e}^3+\frac{\pi^2}{x}+a\ln a$;

(4) $y=x^3\ln x\tan x$;

(5) $y=2^x\mathrm{e}^x-\frac{\log_a x}{\ln x}$;

(6) $y=\mathrm{e}^x\sin x$;

(7) $y=(1+x^2)\arctan x$;

(8) $y=\frac{\sin^2 x}{1+\cos x}$;

(9) $y=\frac{x\ln x}{x+\ln x}$;

(10) $u=v^2\arctan v-\operatorname{arccot} v$.

2. 求下列函数的导数.

(1) $y=\sin x^3$;

(2) $s=\mathrm{e}^{-2t}$;

(3) $y=\operatorname{arccot}\sqrt{x}$;

(4) $y=\arcsin 2x$;

(5) $y=\arctan\frac{1-x}{1+x}$;

(6) $y=\sec^2 x$.

(7) $y=\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})$.

3. 求下列函数在指定点处的导数.

(1) $y=\sqrt{2}\cos x+x\sin x$, $x=\frac{\pi}{4}$;

(2) $y=\sqrt[3]{1+\cos 3x}$, $x=\frac{\pi}{6}$.

4. 一个汽车销售商利用电视广告来促进汽车销售,由以往的记录得到每个月所作广告量 q 与汽车销售量 Q 之间的关系如下:

$$Q=-0.005q^3+0.45q^2-1.5q+200.$$

试用导数计算当每个月所做广告从 10 次增加到 11 次时,汽车销售的近似增加量.

大展身手

5. 求下列函数的导数.

(1) $y=\sqrt{x+\sqrt{x}}$；　　(2) $y=\tan\sqrt[3]{1+x^2}$；

(3) $y=\ln\tan\dfrac{x}{2}-\cot x\ln(1+\sin x)-x$；　　(4) $y=\ln[\ln(\ln x)]$；

(5) $y=\ln\arctan\sqrt{x}$；　　(6) $y=\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$；

(7) $y=\dfrac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\dfrac{a^2}{2}\arcsin\dfrac{x}{a}(a>0)$.

6. 已知 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\sin x^2 & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$，求 $f'(x)$.

7. 求下列各函数的二阶导数 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

(1) $y=\cos x\mathrm{e}^x$；　　(2) $y=(\arcsin x)^3$；

(3) $y=\mathrm{e}^{-4x}\sin 2x$.

8. 求下列函数的 n 阶导数 $y^{(n)}$.

(1) $y=\mathrm{e}^{kx}(k\neq 0)$；　　(2) $y=\dfrac{1}{1-x}$.

9. 某公司对外销售一种电视产品，其成本函数为

$$C(q)=1000+200q-0.1q^2,$$

其中 q 为可销售的电视机台数，试求：

(1) 该公司销售第 101 台电视机的准确成本；

(2) 利用边际成本概念计算销售第 101 台电视机的近似成本.

第三节　函数的微分

应用案例

某新能源汽车电池工厂生产动力电池包的总成本函数为 $C(q)=0.2q^2+10q+500$，其中 q 为日产量(单位：百台)，$C(q)$ 为当日总成本(单位：万元).

那么日产量从当前 $q_0=1$(百台)计划增加 $\Delta q=0.01$(百台)时，总成本变化的近似值是多少？

一、微分的概念

1. 引例——【应用案例】中的总成本变化的近似值

当日产量为 q_0，产量的增量为 Δq 时，总成本的增量为：

$\Delta C=C(q_0+\Delta q)-C(q_0)=0.2(q_0+\Delta q)^2+10(q_0+\Delta q)+500-(0.2q_0^2+10q_0+500)=(0.4q_0+10)\Delta q+0.2\Delta q^2$.

从上式可以看出 ΔC 由两部分组成:第一部分 $(0.4q_0+10)\Delta q$ 是 Δq 的线性函数,第二部分 $0.2\Delta q^2$ 是 Δq 的高阶无穷小(当 $\Delta q\to 0$ 时).

例如【应用案例】中当 $q_0=1,\Delta q=0.01$ 时,第一部分 $(0.4q_0+10)\Delta q=0.104$,第二部分 $0.2\Delta q^2=0.00002$. 很显然,第二部分非常小,而且当 $|\Delta q|$ 越小时,第二部分也越小,甚至可以忽略不计. 因此,当 $|\Delta q|$ 很小时,成本的改变量 ΔC 就可以第一部分来近似代替.

抛开引例的实际背景,即可以得到微分的定义.

2. 某点处微分的定义

定义 2.3.1 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义,如果函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 可以表示为 $\Delta y=A\Delta x+\alpha$,其中 A 与 Δx 无关,α 是 Δx 的高阶无穷小量,则称 $A\Delta x$ 为函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处的**微分**. 记作 $\mathrm{d}y$,即

$$\mathrm{d}y|_{x=x_0}=A\Delta x.$$

这时,也称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 可微.

3. 微分与导数的关系

上式中 A 是什么?它与函数 $y=f(x)$ 有什么关系?下面的定理就能回答这个问题.

定理 2.3.1 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可微,则函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导,且 $A=f'(x_0)$. 反之,如果函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导,则 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可微.

证明 如果 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可微,则有 $\Delta y=A\Delta x+\alpha$,其中 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\alpha}{\Delta x}=0$.

于是
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{A\Delta x+\alpha}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(A+\frac{\alpha}{\Delta x}\right)=A,$$

即
$$y=f(x)\text{ 在点 }x_0\text{ 处可导,且 }A=f'(x_0).$$

反之,若 $y=f(x)$ 在 x_0 处可导,即 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)$,则有

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)+\beta$,其中 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\beta=0$(由定理 1.3.1 可得),

即
$$\Delta y=f'(x_0)\Delta x+\beta\Delta x.$$

因为 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\beta\Delta x}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\beta=0$,所以函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 可微,且 $\mathrm{d}y=f'(x_0)\Delta x$,$A=f'(x_0)$.

小提示

(1) 定理 2.3.1 亦可叙述为:函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处可微的充分必要条件是函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处可导.

(2) 如果函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可微,则函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续.

小试牛刀

例 2.3.1　求函数 $y=3x^2$ 在 $x_0=1$，$\Delta x=0.1$ 时的改变量及微分.

解　$\Delta y=3(x_0+\Delta x)^2-3x_0^2=3\times1.1^2-3\times1^2=0.63$.

因为 $y'=6x$，所以当 $\Delta x=0.1$ 时函数在点 $x_0=1$ 处的微分为：

$$\mathrm{d}y|_{x=1}=y'|_{x=1}\Delta x=6\times0.1=0.6.$$

4. 微分的几何意义

函数在某点处的增量与微分之间的几何关系可用图 2-3 来表示.

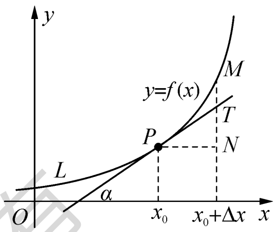


图 2-3

如图 2-3 所示，$NM=\Delta y$，$NT=PN\tan\alpha=f'(x_0)\Delta x$，所以 $\mathrm{d}y|_{x=x_0}=NT$. 即函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的微分 $\mathrm{d}y|_{x=x_0}$ 就是函数 $y=f(x)$ 在点 P 处的切线的纵坐标在相应 x_0 处的增量，而 Δy 就是曲线 $y=f(x)$ 的纵坐标在点 x_0 处的增量.

小提示

(1) 当 $|\Delta x|$ 很小时，$|\Delta y-\mathrm{d}y|$ 比 $|\Delta x|$ 小很多.

(2) 当 $|\Delta x|$ 很小时，线段 PT 的长近似等于曲线段 $\overset{\frown}{PM}$ 的长.

5. 函数的微分

如果函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内每一点处都可微，则称 $f(x)$ 是 (a,b) 内的可微函数. 函数 $y=f(x)$ 在任意点 x 处的微分称为函数的微分，记作 $\mathrm{d}y$，即 $\mathrm{d}y=f'(x)\Delta x$.

对于函数 $y=x$ 来说，有 $\mathrm{d}y=\mathrm{d}x=(x)'\cdot\Delta x=\Delta x$. 因此，我们可以用 $\mathrm{d}x$ 代替 Δx，即 $\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x$.

小提示

函数的微分 $\mathrm{d}y$ 与自变量的微分 $\mathrm{d}x$ 之商等于该函数的导数 $f'(x)$，因此，导数 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 又称为微商.

二、基本初等函数的微分公式

由 $\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x$ 和基本初等函数的导数公式，很容易得到基本初等函数的微分公式.

$\mathrm{d}C=0$.	$\mathrm{d}x^{\mu}=\mu x^{\mu-1}\mathrm{d}x$.
$\mathrm{d}\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.	$\mathrm{d}a^x=a^x\ln a\,\mathrm{d}x$.
$\mathrm{d}\ln x=\frac{1}{x}\mathrm{d}x$.	$\mathrm{d}\log_a x=\frac{1}{x\ln a}\mathrm{d}x$.
$\mathrm{d}\sin x=\cos x\,\mathrm{d}x$.	$\mathrm{d}\cos x=-\sin x\,\mathrm{d}x$.
$\mathrm{d}\tan x=\sec^2 x\,\mathrm{d}x$.	$\mathrm{d}\cot x=-\csc^2 x\,\mathrm{d}x$.

$\mathrm{d}\sec x=\sec x\tan x\,\mathrm{d}x$.　　$\mathrm{d}\csc x=-\csc x\cot x\,\mathrm{d}x$.

$\mathrm{d}\arcsin x=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.　　$\mathrm{d}\arccos x=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

$\mathrm{d}\arctan x=\dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$.　　$\mathrm{d}\,\mathrm{arccot}\, x=-\dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

三、微分的运算

由 $\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x$ 和求导法则,很容易得到微分的运算法则.

1. 微分的四则运算法则

设函数 $u=u(x)$,$v=v(x)$ 可微,则

法则 2.3.1　$\mathrm{d}(u\pm v)=\mathrm{d}u\pm\mathrm{d}v$.

法则 2.3.2　$\mathrm{d}(uv)=u\,\mathrm{d}v+v\,\mathrm{d}u$.

法则 2.3.3　$\mathrm{d}\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{v\,\mathrm{d}u-u\,\mathrm{d}v}{v^2}\,(v\neq 0)$.

证明　上述三个公式证法均类似,我们只证第二个,其余由读者自行证明.

$$\mathrm{d}(uv)=(uv)'\mathrm{d}x=(u'v+uv')\mathrm{d}x=u'v\,\mathrm{d}x+uv'\mathrm{d}x.$$

因为 $u'\mathrm{d}x=\mathrm{d}u$,$v'\mathrm{d}x=\mathrm{d}v$, 所以有 $\mathrm{d}(uv)=u\,\mathrm{d}v+v\,\mathrm{d}u$.

推论 2.3.1　当 v 为常数 C 时,则 $\mathrm{d}(Cu)=C\,\mathrm{d}u$.

推论 2.3.2　$\mathrm{d}\left(\dfrac{1}{v}\right)=-\dfrac{1}{v^2}\mathrm{d}v$.

小试牛刀

例 2.3.2　设 $y=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$,求 $\mathrm{d}y$.

解　$\mathrm{d}y=\mathrm{d}\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)=\dfrac{(1+x^2)\mathrm{d}(1-x^2)-(1-x^2)\mathrm{d}(1+x^2)}{(1+x^2)^2}$

$=\dfrac{-2x(1+x^2)\mathrm{d}x-2x(1-x^2)\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}=-\dfrac{4x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$.

2. 复合函数的微分法则

法则 2.3.4　设 $y=f(u)$,$u=\varphi(x)$ 均可微,则 $y=f[\varphi(x)]$ 也可微,且

$$\mathrm{d}y=f'(u)\varphi'(x)\mathrm{d}x.$$

小提示

(1) 由于 $\mathrm{d}u=\varphi'(x)\mathrm{d}x$, 所以上式可写为 $\mathrm{d}y=f'(u)\mathrm{d}u$.

(2) 一阶微分的形式不变性:对于 $\mathrm{d}y=f'(u)\mathrm{d}u$ 不管 u 是自变量还是中间变量,函数 $y=f(u)$ 的微分形式总是 $\mathrm{d}y=f'(u)\mathrm{d}u$.

小试牛刀

例 2.3.3　设 $y=\sin 2x$，求 $\mathrm{d}y$.

解　利用微分形式不变性，有

$$\mathrm{d}y=\cos 2x\,\mathrm{d}(2x)=2\cos 2x\,\mathrm{d}x.$$

例 2.3.4　设 $y=a^{\ln\cos x}(a>0)$，求 $\mathrm{d}y$.

解　$\mathrm{d}y=a^{\ln\cos x}\ln a\,\mathrm{d}(\ln\cos x)=a^{\ln\cos x}\ln a\cdot\dfrac{1}{\cos x}\mathrm{d}(\cos x)$

$\quad=-a^{\ln\cos x}\ln a\cdot\tan x\,\mathrm{d}x.$

例 2.3.5　设 $y=\sqrt{1-x^2}\arcsin x$，求 $\mathrm{d}y$.

解　$\mathrm{d}y=\arcsin x\,\mathrm{d}\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}\arcsin x$

$\quad=\arcsin x\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}(1-x^2)+\sqrt{1-x^2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$

$\quad=-\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x-1\right)\mathrm{d}x.$

大展身手

例 2.3.6　在下列括号中填上适当的函数，使等式成立.

(1) $\mathrm{d}(\quad)=5\mathrm{d}x$；　　(2) $\mathrm{d}(\quad)=x^2\mathrm{d}x$；

(3) $\mathrm{d}(\quad)=\sin 4x\,\mathrm{d}x$；　　(4) $\mathrm{d}(\quad)=\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$.

解　(1) 由微分的四则运算法则得 $\mathrm{d}(5x)=5\mathrm{d}x$.
一般地，$\mathrm{d}(5x+C)=5\mathrm{d}x$.

(2) 由 $\mathrm{d}(x^3)=3x^2\mathrm{d}x$，得 $x^2\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}\mathrm{d}(x^3)=\mathrm{d}\left(\dfrac{1}{3}x^3\right)$，

一般地，$\mathrm{d}\left(\dfrac{1}{3}x^3+C\right)=x^2\mathrm{d}x$.

(3) 由 $\mathrm{d}(\cos 4x)=-4\sin 4x\,\mathrm{d}x$，得 $\sin 4x\,\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{4}\mathrm{d}(\cos 4x)=\mathrm{d}\left(-\dfrac{1}{4}\cos 4x\right)$，

一般地，$\mathrm{d}\left(-\dfrac{1}{4}\cos 4x+C\right)=\sin 4x\,\mathrm{d}x$.

(4) 由 当 $x>0$ 时，$\mathrm{d}(\ln|x|)=\mathrm{d}(\ln x)=\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$；当 $x<0$ 时，$\mathrm{d}(\ln|x|)=\mathrm{d}[\ln(-x)]=\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$，得 $\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\ln|x|)$.

一般地，$\mathrm{d}(\ln|x|+C)=\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$.

注：此题中的 C 均指任意常数.

四、微分在近似计算中的应用

在经济和工程问题中，经常会遇到一些复杂的计算公式，如果直接用这些公式进行计

算,既费时又费力,利用微分往往可以把一些复杂的计算公式用简单的近似公式来代替.

当函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)\neq 0$ 且 $|\Delta x|$ 很小时,有

$$\Delta y \approx \mathrm{d}y\big|_{x=x_0}=f'(x_0)\Delta x,$$

于是
$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx f'(x_0)\Delta x.$$

所以
$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x.$$

小试牛刀

例 2.3.7 计算 $\sqrt{0.98}$ 的近似值.

解 取 $f(x)=\sqrt{x}$, $x_0=1$, $\Delta x=-0.02$, 则有 $\sqrt{0.98}=f(x_0+\Delta x)=f(1-0.02)$,

所以, $f(1-0.02)\approx f(1)+f'(1)(-0.02)=\sqrt{1}+\dfrac{1}{2\sqrt{1}}(-0.02)=0.99$,

即 $\sqrt{0.98}\approx 0.99$.

例 2.3.8 计算 $\mathrm{e}^{0.02}$ 的近似值.

解 取 $f(x)=\mathrm{e}^x$, $x_0=0$, $\Delta x=0.02$, 则有 $\mathrm{e}^{0.02}=f(x_0+\Delta x)=f(0+0.02)$,

所以, $f(0+0.02)\approx f(0)+f'(0)\times 0.02=\mathrm{e}^0+\mathrm{e}^0\times 0.02=1.002$,

即 $\mathrm{e}^{0.02}\approx 1.002$.

大展身手

例 2.3.9 给一个半径为 10 cm 的球表面镀铜,铜的厚度为 0.005 cm. 问大约需要多少克铜(铜的密度为 8.9 g/cm^3)?

解 球的体积为 $V=\dfrac{4}{3}\pi r^3$, 据题意 $r_0=10$, $\Delta r=0.005$,

于是 $\Delta V\approx \mathrm{d}V\big|_{r=r_0}=V'(r_0)\Delta r=4\pi r_0^2\Delta r=4\pi\times 10^2\times 0.005\approx 6.28(\mathrm{cm}^3)$.

镀层所需铜的质量约为 $6.28\times 8.9=55.892(\mathrm{g})$.

例 2.3.10 已知某副食品公司销售面粉的利润 L 与 销量 q 之间的函数关系是:

$$L=-2q^3+30q^2,$$

求当销量从 12 变化到 12.2 时利润变化量的近似值.

解 由题意, $q_0=12$, $\Delta q=0.2$,

因为 $L'=-6q^2+60q$, 则 $L'(q_0)=L'(12)=-144$,

可得 $\Delta L\approx \mathrm{d}L=L'(q_0)\Delta q=-144\times 0.2=-28.8$.

五、隐函数的导数

前面讨论的一些函数表示为 $y=f(x)$ 的形式,这样的函数称为显函数. 但在实际问题中,还会遇到利用方程表示函数关系的情形,如 $x^2+y^2=R^2$, $\mathrm{e}^y=xy$.

一般地,如果在方程 $F(x,y)=0$ 中,当 x 取某区间内的任一值时相应的总有满足此方程的 y 值与之对应,那么就说方程 $F(x,y)=0$ 在该区间内确定了一个隐函数 $y=y(x)$.

1. 隐函数的求导方法

一种方法是:从方程 $F(x,y)=0$ 中解出 y, 化成为显式 $y=f(x)$, 然后求导. 但这种方

法很多时候行不通，因为很多隐函数不能表示成显式 $y=f(x)$. 例如 $y+x-e^{xy}=0$，就很难解出 $y=f(x)$ 来. 那么此时怎样求 y 关于 x 的导数呢？

另一种方法是：对方程 $F(x,y)=0$ 两边同时求微分，再通过恒等变形，求出 $\frac{dy}{dx}$.

小试牛刀

例 2.3.11　设方程 $x^2+y^2=R^2$（R 为常数）确定函数 $y=y(x)$，求 $\frac{dy}{dx}$.

解　方法一：我们先解出 y，然后再求导.

由 $x^2+y^2=R^2$，解得 $y=\pm\sqrt{R^2-x^2}$.

当 $y=\sqrt{R^2-x^2}$. 求导数得 $y'=\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}=-\frac{x}{y}$.

当 $y=-\sqrt{R^2-x^2}$，同理可得 $y'=\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}=-\frac{x}{y}$.

方法二：对方程两边同时求微分.

$$d(x^2+y^2)=d(R^2)，即\ 2x\,dx+2y\,dy=0.$$

由此解得

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}\ 或\ y'_x=-\frac{x}{y}.$$

小提示

两种方法算出的结果是一样的，但是方法二最后的结果形式一般既含有变量 x，又含有变量 y.

例 2.3.12　设方程 $y+x-e^y=0$ 确定函数 $y=y(x)$，求 dy.

解　方程两边求微分

$$d(y+x-e^y)=0，即\ dy+dx-de^y=0，$$
$$dy+dx-e^y dy=0，$$

移项，得 $(e^y-1)dy=dx$.

从而解得 $dy=\frac{1}{e^y-1}dx$.

例 2.3.13　设方程 $uv=e^{u+v}$ 确定函数 $u=u(v)$，求 du.

解　方程两边求微分

$$d(uv)=de^{u+v}，即\ v\,du+u\,dv=e^{u+v}(du+dv)，$$

移项，得 $(v-e^{u+v})du=(e^{u+v}-u)dv$，

从而解得 $du=\frac{e^{u+v}-u}{v-e^{u+v}}dv$.

例 2.3.14 求曲线 $x+x^2y^2-y=1$ 在点 $P(1,1)$ 的切线和法线方程.

解 方程两边求微分,得

$\mathrm{d}x+2x^2y\mathrm{d}y+2xy^2\mathrm{d}x-\mathrm{d}y=0$,从而解得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1+2xy^2}{1-2x^2y}$.

将点 $P(1,1)$ 的坐标代入,得切线的斜率 $k=-3$.

于是所求切线方程为 $y-1=-3(x-1)$,即 $3x+y-4=0$.

法线方程为 $y-1=\dfrac{1}{3}(x-1)$,即 $x-3y+2=0$.

2. 隐函数的二阶导数

下面介绍用微分求二阶导数的方法,我们知道 $\mathrm{d}y=y'\mathrm{d}x$. 如果对 y' 再求微分,那么根据微分与导数的关系,可知 $\mathrm{d}y'$ 应等于 y' 的导数乘 $\mathrm{d}x$,即

$$\mathrm{d}y'=y''\mathrm{d}x \text{ 或 } \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x}=y''.$$

这就是用微分求 y'' 的基础,即 y'' 就是 $\mathrm{d}y'$ 与 $\mathrm{d}x$ 之商.

小试牛刀

例 2.3.15 设方程 $y+x-\mathrm{e}^y=0$ 确定函数 $y=y(x)$,求 y''.

解 由例 2.3.12 知道,$y'=\dfrac{1}{\mathrm{e}^y-1}$,

两边再求微分,得 $\mathrm{d}y'=-\dfrac{\mathrm{d}(\mathrm{e}^y-1)}{(\mathrm{e}^y-1)^2}=-\dfrac{\mathrm{e}^y\mathrm{d}y}{(\mathrm{e}^y-1)^2}$,

将 $\mathrm{d}y=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^y-1}$ 代入上式得 $\mathrm{d}y'=-\dfrac{\mathrm{e}^y\mathrm{d}x}{(\mathrm{e}^y-1)^3}$,

所以 $y''=\dfrac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{\mathrm{e}^y}{(\mathrm{e}^y-1)^3}$.

3. 对数微分法

上述隐函数的微分法同样可用于求某些特殊形式的显函数的导数和微分. 有时我们会遇到表达式由幂指函数(形如 $y=u(x)^{v(x)}$ 的函数)或连乘、连除或乘方、开方表示的显函数,这类显函数直接求导或求微分很困难,或者很麻烦. 我们常用两边取对数后再利用隐函数的求导方法来求导,这种方法称为对数微分法.

小试牛刀

例 2.3.16 求函数 $y=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x(x>0)$ 的导数.

解 两边取自然对数

$$\ln y=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right),$$

两边求微分

$$\frac{1}{y}\mathrm{d}y=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x+x\cdot\frac{1}{1+\dfrac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x,$$

所以 $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}\right]=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}\right].$$

小提示

对于幂指函数 $y=u(x)^{v(x)}$ 的求导，还可以首先进行恒等变形，再用下面的方法求导：$y=u(x)^{v(x)}=\mathrm{e}^{\ln[u(x)^{v(x)}]}=\mathrm{e}^{v(x)\ln[u(x)]}$，再利用复合函数求导方法求导.

大展身手

例 2.3.17　设 $y=\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{(x-1)(x+2)}}$，求 y'.

解　两边取自然对数，得

$$\ln y=\frac{1}{3}[\ln(x+1)-\ln(x-1)-\ln(x+2)],$$

两边求微分，得

$$\frac{1}{y}\mathrm{d}y=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+1}\mathrm{d}x-\frac{1}{x-1}\mathrm{d}x-\frac{1}{x+2}\mathrm{d}x\right),$$

所以

$$y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{3}y\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}\right)=\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{x+1}{(x-1)(x+2)}}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}\right).$$

六、参数方程所确定的函数的导数

1. 参数方程的一般形式及其导数

一般情况下，参数方程

$$\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=f(t)\end{cases}(t\text{ 为参数}).$$

确定了 y 是 x 的函数(当然也可以说确定了 x 是 y 的函数)，它是通过参数 t 联系起来的. 现在来求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 或 y'_x.

由微分的定义可知 $\mathrm{d}y=f'(t)\mathrm{d}t$，$\mathrm{d}x=\varphi'(t)\mathrm{d}t$，所以

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{f'(t)\mathrm{d}t}{\varphi'(t)\mathrm{d}t},$$

消去 $\mathrm{d}t$，得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{f'(t)}{\varphi'(t)}，\text{即 } y'_x=\frac{f'(t)}{\varphi'(t)}.$$

小提示

参数方程所确定的函数 $y=y(x)$ 求导，先求 $\mathrm{d}y$（或 y'_t）和 $\mathrm{d}x$（或x'_t），然后相除即可.

小试牛刀

例 2.3.18 设椭圆参数方程 $\begin{cases}x=a\cos\theta\\ y=b\sin\theta\end{cases}$（$a>0,b>0,\theta$ 为参数）确定了函数 $y=y(x)$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解 因为 $\mathrm{d}x=-a\sin\theta\mathrm{d}\theta,\mathrm{d}y=b\cos\theta\mathrm{d}\theta$，

所以 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{b\cos\theta\mathrm{d}\theta}{-a\sin\theta\mathrm{d}\theta}=-\dfrac{b}{a}\cot\theta$.

例 2.3.19 求曲线 $\begin{cases}x=\ln\cos t\\ y=\sin t-t\cos t\end{cases}$ 在对应于 $t=0$ 的曲线上点的切线方程.

解 与 $t=0$ 对应的曲线上的点为 $O(0,0)$，且 $\mathrm{d}y=t\sin t\mathrm{d}t,\mathrm{d}x=-\tan t\mathrm{d}t$，

从而有 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{t\sin t}{-\tan t}=-t\cos t,\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=0}=0$.

所以摆线在对应于 $t=0$ 的曲线上点的切线方程为 $y=0$.

2. 参数方程所确定的函数的二阶导数

求解参数方程所确定的函数的二阶导数，依然利用 y'' 就是 $\mathrm{d}y'$ 与 $\mathrm{d}x$ 之商的思想方法，即 $y''=\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x}$.

小试牛刀

例 2.3.20 设方程 $\begin{cases}x=3\mathrm{e}^{-t}\\ y=2\mathrm{e}^{t}\end{cases}$ 确定了函数 $y=y(x)$，求 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

解 先求一阶导数 y'.

因为 $\mathrm{d}x=-3\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t,\mathrm{d}y=2\mathrm{e}^{t}\mathrm{d}t$，所以 $y'=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{2\mathrm{e}^{t}}{-3\mathrm{e}^{-t}}=-\dfrac{2}{3}\mathrm{e}^{2t}$.

两边再求微分，得 $\mathrm{d}y'=-\dfrac{4}{3}\mathrm{e}^{2t}\mathrm{d}t$，从而 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x}=\dfrac{-\dfrac{4}{3}\mathrm{e}^{2t}\mathrm{d}t}{-3\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t}=\dfrac{4}{9}\mathrm{e}^{3t}$.

大展身手

例 2.3.21 设方程 $\begin{cases}x=t+\mathrm{e}^{t}\sin t\\ y=t-\mathrm{e}^{t}\cos t\end{cases}$ 确定了函数 $y=y(x)$，求 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

解 先求一阶导数 y'.

因为 $\mathrm{d}x=(1+\mathrm{e}^{t}\sin t+\mathrm{e}^{t}\cos t)\mathrm{d}t,\mathrm{d}y=(1-\mathrm{e}^{t}\cos t+\mathrm{e}^{t}\sin t)\mathrm{d}t$，

所以 $y'=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1-\mathrm{e}^{t}\cos t+\mathrm{e}^{t}\sin t}{1+\mathrm{e}^{t}\sin t+\mathrm{e}^{t}\cos t}$，

两边再求微分，得 $\mathrm{d}y' = \dfrac{2\mathrm{e}^t(\sin t - \cos t + \mathrm{e}^t)}{(1 + \mathrm{e}^t \sin t + \mathrm{e}^t \cos t)^2}\mathrm{d}t$，

从而 $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \dfrac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x} = \dfrac{2\mathrm{e}^t(\sin t - \cos t + \mathrm{e}^t)}{(1 + \mathrm{e}^t \sin t + \mathrm{e}^t \cos t)^3}$.

习题 2.3

小试牛刀

1. 设函数 $y = 2x^2 - 3x + 1$，分别取 $\Delta x = 0.1, 0.01$，求出 Δy 与 $\mathrm{d}y$ 在 $x = 0.5$ 处的值.

2. 求下列函数的微分.

(1) $y = \sqrt{1 - x^3}$；　(2) $y = \dfrac{\cos 2x}{1 - x^2}$；

(3) $y = x\mathrm{e}^{-x^2}$；　(4) $y = \arcsin\sqrt{x}$；

(5) $y = \ln^3(1 + x^2)$；　(6) $y = \arctan\dfrac{1}{x}$；

(7) $y = \sec(x^2 - 1)$；　(8) $y = \sin\left(\dfrac{1}{2}\cos 2x\right)$；

(9) $y = \ln(x^2 + \pi^{2x})$；　(10) $y = \dfrac{1}{x}\arctan 2x$；

(11) $y = \ln[\ln(\ln x^2)]$；　(12) $y = \ln(\sqrt{x^2 + a^2} - x)$.

3. 求 $\sqrt{1.001}$ 的近似值.

4. 求由下列方程所确定的隐函数 $y = y(x)$ 的导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

(1) $y\mathrm{e}^x - \ln y = 1$；　(2) $x\cos y = \sin(x + y)$；

(3) $\arctan\dfrac{y}{x} = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$；　(4) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = a\ (a > 0)$.

5. 用对数微分法求下列函数的导数.

(1) $y = (1 - \cos x)^{\frac{1}{x}}$；　(2) $y = \left(\dfrac{x}{1 + x}\right)^x$；

(3) $y = \sqrt{\dfrac{x(x + 1)}{(x + 2)(x + 3)}}$；　(4) $y = x^{x^2}$.

6. 求曲线 $x^2 + y^4 = 10$ 在点 $P(3, 1)$ 处的切线方程和法线方程.

7. 求下列由参数方程所确定的函数 $y = y(x)$ 的导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

(1) $\begin{cases} x = at^2 \\ y = bt^3 \end{cases}$；　(2) $\begin{cases} x = \sqrt{1 + t} \\ y = \sqrt{1 - t} \end{cases}$；

(3) $\begin{cases} x = a\cos bt + b\sin at \\ y = a\sin bt - b\cos at \end{cases}$ (a, b 为常数)；(4) $\begin{cases} x = \mathrm{e}^t \sin t \\ y = \mathrm{e}^t \cos t \end{cases}$.

8. 求曲线 $\begin{cases}x=1+2t-t^2\\ y=4t^2\end{cases}$ 在点 $Q(-2,4)$ 处的切线方程和法线方程.

9. 求下列方程所确定的函数 $y=y(x)$ 的二阶导数 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

(1) $x+y=\operatorname{arccot}(x-y)$.　　(2) $\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$.

大展身手

10. 求下列函数在指定点处的微分.

(1) $y=3^{\ln(\tan x)}$, $x=\dfrac{\pi}{4}$.　　(2) $y=\mathrm{e}^x\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}}+\arcsin \mathrm{e}^x$, $x=\ln\dfrac{1}{2}$.

11. 将一个适当的函数填入下列括号内,使等式成立.

(1) $\mathrm{d}(\quad)=4x\,\mathrm{d}x$;　　(2) $\mathrm{d}(\quad)=\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x$;

(3) $\mathrm{d}(\quad)=\cos 2x\,\mathrm{d}(\quad)$;　　(4) $\mathrm{d}\sqrt{3x+1}=\dfrac{1}{2\sqrt{3x+1}}\mathrm{d}(\quad)$.

12. 设某商品的需求函数为 $Q(p)=8\mathrm{e}^{\frac{-p}{5}}$,其中 p(元)为价格,Q(千件)为月需求量.试用微分的方法求当该商品的价格从 10 元上涨到 10.25 元需求量的变化量.

13. 设函数 $y=y(x)$ 是由参数方程 $\begin{cases}x^3-xt^2+t-1=0\\ y=t^3+t+1\end{cases}$ 所确定的函数,求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=0}$.

14. 用对数微分法求下列函数的导数.

(1) $y=(\sin x)^{\tan x}-(\cos x)^{\cot x}$;　　(2) $y=\dfrac{\mathrm{e}^{2x}(x+3)}{\sqrt{(x+5)(x-4)}}$.

15. 求由下列方程所确定的函数 $y=y(x)$ 的二阶导数 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

(1) $\begin{cases}x=at\cos t\\ y=at\sin t\end{cases}$;　　(2) $\begin{cases}x=\mathrm{e}^{\cos t}\\ y=\mathrm{e}^{\sin t}\end{cases}$.

16. 设函数 $y=f(x)$ 的微分 $\mathrm{d}y=\dfrac{1}{x+1}\mathrm{d}x$. 求 $f^{(2023)}(0)$ 的值.

17. 设直线 $y=3x+m$ 是曲线 $\begin{cases}x=t^2-t+1\\ y=t^2+t-1\end{cases}$ 的一条切线,求 m 的值.

第四节　微分中值定理

应用案例

某制造企业月产量在区间[50,100]内调整,总成本函数为 $C(q)=5000+100q+5q^2+0.1q^3$(其中 q 为产量,单位:件;总成本 C 的单位:元),请问:是否存在某一生产量 $\xi\in(50,$

100)，使得该产量下的边际成本 MC 等于总成本函数在区间[50，100]内的平均变化率，并分析其经济意义.

一、微分中值定理

1. 罗尔中值定理

定理 2.4.1(罗尔定理)　如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，且在区间端点处的函数值相等，即 $f(a)=f(b)$，那么至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$.

罗尔定理的几何意义：在两个高度相同的点 A，B 间的一段连续曲线上，除端点外如果各点都有不垂直于 x 轴的切线，那么至少有一点处的切线是水平的(如图 2-4 所示)，P 点处的切线与弦 AB 平行.

证明　因为 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，由最大值与最小值定理(定理 1.5.5)知：$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必有最大值 M 和最小值 m.

如果 $M=m$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上恒为常数，从而对任意 $x\in(a,b)$，都有 $f'(x)=0$.

如果 $M\neq m$，则 M 和 m 中至少有一个不等于 $f(a)$.

不妨设 $M\neq f(a)$，则 M 必在开区间 (a,b) 内取得.

即至少有一个点 $\xi\in(a,b)$ 使 $f(\xi)=M$，以下证明 $f'(\xi)=0$.

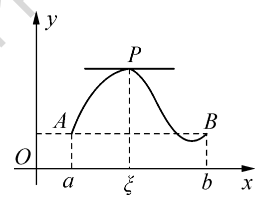


图 2-4

因为 $f(x)$ 在点 ξ 处取得最大值，所以对于任意的 Δx 只要 $\xi+\Delta x\in(a,b)$，总有

$$f(\xi+\Delta x)\leqslant f(\xi).$$

从而当 $\Delta x>0$ 时，有 $\dfrac{f(\xi+\Delta x)-f(\xi)}{\Delta x}\leqslant 0$；当 $\Delta x<0$ 时，有 $\dfrac{f(\xi+\Delta x)-f(\xi)}{\Delta x}\geqslant 0$.

由于 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导，因而有

$$f'(\xi)=f'_{+}(\xi)=\lim_{\Delta x\to 0^{+}}\frac{f(\xi+\Delta x)-f(\xi)}{\Delta x}\leqslant 0,$$

$$f'(\xi)=f'_{-}(\xi)=\lim_{\Delta x\to 0^{-}}\frac{f(\xi+\Delta x)-f(\xi)}{\Delta x}\geqslant 0.$$

所以，$f'(\xi)=0$，罗尔定理得证.

应该注意的是，罗尔定理要求函数 $f(x)$ 同时满足三个条件：在闭区间 $[a,b]$ 上连续；在开区间 (a,b) 内可导；且 $f(a)=f(b)$. 否则结论就可能不成立. 图 2-5 直观地说明了当其中一个条件不满足时，结论不能成立的例子.

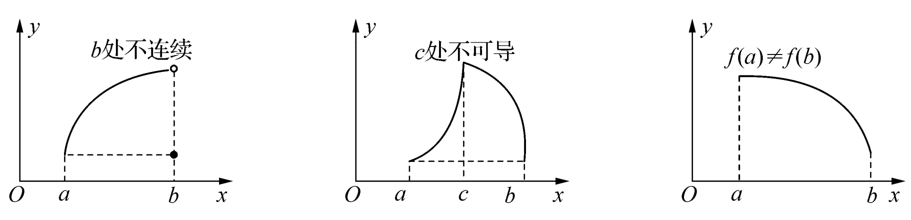


图 2-5

同时应该指出,罗尔定理的条件对于结论是充分的,但并非必要的.例如,函数

$$f(x)=\begin{cases}\sin x & 0<x\leqslant \pi\\ 1 & x=0\end{cases}$$

在 $x=0$ 处不连续,但存在 $\xi=\dfrac{\pi}{2}$,使 $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$.

小试牛刀

例 2.4.1 验证函数 $f(x)=2x^2-4x+3$ 在区间$[0,2]$上罗尔定理成立,并求出 ξ.

解 因为 $f(x)=2x^2-4x+3$ 在区间$[0,2]$上连续,在$(0,2)$可导,且 $f'(x)=4x-4$,又因为 $f(0)=f(2)=3$,所以 $f(x)$ 满足罗尔定理的三个条件.

令 $f'(x)=4x-4=0$,得 $x=1$,即存在 $\xi=1$,使 $f'(\xi)=0$.

由罗尔定理可知,如果函数 $y=f(x)$ 满足定理的三个条件,则方程 $f'(x)=0$ 在区间 (a,b) 内至少有一个实根.这个结论常被用来证明某些方程的根的存在性.

大展身手

例 2.4.2 如果方程 $ax^3+bx^2+cx=0$ 有正根 x_0,证明:方程 $3ax^2+2bx+c=0$ 必定在 $(0,x_0)$ 内有根.

证明 设 $f(x)=ax^3+bx^2+cx$,则 $f(x)$ 在 $[0,x_0]$ 上连续,$f'(x)=3ax^2+2bx+c$ 在 $(0,x_0)$ 内存在,且 $f(0)=f(x_0)=0$.所以 $f(x)$ 在 $[0,x_0]$ 上满足罗尔定理的条件.

由定理结论,在 $(0,x_0)$ 内至少存在一点 ξ,使 $f'(\xi)=3a\xi^2+2b\xi+c=0$,
即方程 $3ax^2+2bx+c=0$ 在 $(0,x_0)$ 内至少有一个根 $x=\xi$.

2. 拉格朗日中值定理

定理 2.4.2(拉格朗日定理) 如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,在开区间 (a,b) 内可导,那么至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,使得

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\quad 或\quad f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a).$$

拉格朗日中值定理的几何意义:

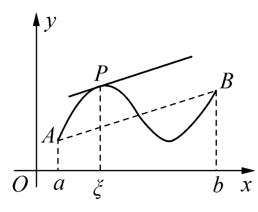


图 2-6

因为数值 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 表示连接端点 $A(a,f(a))$,$B(b,f(b))$ 的线段,即弦 AB 的斜率,而 $f'(\xi)$ 为曲线在 $P(\xi,f(\xi))$ 点处的切线斜率(如图 2-6 所示),因此此定理表示,如果函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,且除端点外,处处都有不垂直于 x 轴的切线,那么在曲线上至少有一点 $P(\xi,f(\xi))$ 处的切线与弦 AB 平行.

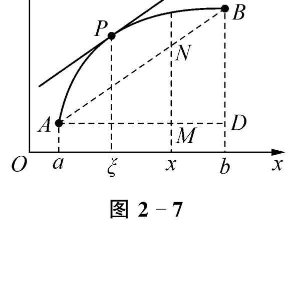


图 2-7

与罗尔定理比较,可以发现拉格朗日中值定理是罗尔定理把端点连线 AB 由水平向斜线的推广;也可以说,罗尔定理是拉格朗日定理当弦 AB 为水平时的特例.如何证明拉格朗日定理呢?从图 2-7 能把弓形 ABP (压缩)放置到水平位置,使 AB 与 AD 重合,它就是罗尔定理的几何意义.为此,需要将 $\triangle ABD$ 移掉,即在 $x\in$

$[a,b]$ 对应的 $f(x)$ 中减去对应于 $\triangle ABD$ 中的一段 MN. 具体地讲,构造一个辅助函数 $F(x)$,使

$$F(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

证明　令 $F(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$.

显然 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导,且

$F(a)=f(a)$,$F(b)=f(a)$, 即 $F(x)$ 满足罗尔定理的条件. 所以,至少存在一点 $\xi\in(a,b)$, 使 $F'(\xi)=0$, 即

$$f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0.$$

即至少存在一点 $\xi\in(a,b)$, 使得:

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

小智囊

如果一个做直线运动的物体,它的位置函数为 $s=f(t)$, 满足拉格朗日中值定理的条件,那么它介于时刻 $t=a$ 和 $t=b$ 之间的平均速度为 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. 根据拉格朗日中值定理,在某一个时刻 $t=c\in(a,b)$, 物体的瞬时速度等于上述平均速度,即 $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

比方说,一辆汽车 2 小时内行驶了 180 公里,那么汽车的速度表上至少有一个时刻读到 90 km/h.

小试牛刀

例 2.4.3　验证函数 $f(x)=x^2$ 在区间$[1,3]$上满足拉格朗日中值定理,并求 ξ.

解　显然 $f(x)=x^2$ 在$[1,3]$上连续,在$(1,3)$上可导,且 $f'(x)=2x$, 所以由拉格朗日中值定理,至少存在一点 $\xi\in(1,3)$, 使得:

$$f'(\xi)=\frac{f(3)-f(1)}{3-1},$$

即 $2\xi=4$, 求得: $\xi=2$.

例 2.4.4　求解【应用案例】.

解　总成本函数在区间$[50,100]$内的平均变化率为:

$$\frac{C(100)-C(50)}{100-50}=\frac{165000-35000}{50}=2600(\text{元 / 件}).$$

显然 $C(q)=5000+100q+5q^2+0.1q^3$ 在$[50,100]$上连续，$(50,100)$上可导，且 $MC=C'(q)=100+10q+0.3q^2$. 由拉格朗日中值定理，至少存在一点 $\xi\in(50,100)$，使得：

$$MC=C'(\xi)=\frac{C(100)-C(50)}{100-50},$$

即：$100+10\xi+0.3\xi^2=2600$，化简为：$0.3\xi^2+10\xi-2500=0$.

解此一元二次方程，并取正根，可得 $\xi\approx 76.13$.

由此可知，当产量大约为 76 件时，边际成本 MC（再生产 1 件产品而增加的成本）等于总成本函数的平均变化率，是评估生产效率和规模经济的重要参考点. 当产量 $q<76.13$ 时，边际成本低于平均变化率，可扩大产量；$q>76.13$ 时，边际成本高于平均变化，应评估是否继续增产.

大展身手

例 2.4.5 已知函数 $f(x)$ 在 R 上处处可导，且 $f(0)=-3$，$f'(x)\leqslant 5(\forall x\in\mathbf{R})$，则 $f(2)$ 的值最大可能是多少？

解 由题意，$f(x)$ 在区间$[0,2]$上满足拉格朗日中值定理的条件，所以，至少存在一点 $\xi\in(0,2)$，

使得
$$f(2)-f(0)=f'(\xi)(2-0),$$

所以
$$f(2)=f(0)+2f'(\xi).$$

由根据题意
$$f'(\xi)\leqslant 5,$$

所以
$$f(2)=-3+2f'(\xi)\leqslant -3+10=7,$$

所以，$f(2)$ 的值最大可能是 7.

推论 2.4.1 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内的导数恒为零，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上为常数.

证明 在 (a,b) 内任取两点 x_1,x_2（不妨设 $x_1<x_2$）.

因为 $[x_1,x_2]\subset(a,b)$，所以 $f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上连续，在 (x_1,x_2) 内可导. 从而由拉格朗日中值定理有

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)(x_1<\xi<x_2),$$

又因为对 (a,b) 内一切 x 都有 $f'(x)=0$. 显然 $\xi\in(a,b)$，所以 $f'(\xi)=0$，于是得

$$f(x_2)-f(x_1)=0, f(x_2)=f(x_1).$$

即函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上为常数.

以前我们证明过“常数的导数等于零”，推论 2.4.1 说明其逆命题也为真.

推论 2.4.2 若 $f'(x)\equiv g'(x)$，$x\in(a,b)$，则 $f(x)=g(x)+C(x\in(a,b)$，C 为常数).

证明　因为 $[f(x)-g(x)]'=f'(x)-g'(x)\equiv 0, x\in(a,b)$，据推论 2.4.1，得

$$f(x)-g(x)=C,$$

即：$f(x)=g(x)+C(x\in(a,b), C$ 为常数).

以前我们知道“两个函数恒等，那么它们的导数相等”. 现在又知道“如果两个函数的导数恒等，那么它们至多只相差一个常数”.

大展身手

例 2.4.6　设函数 $f(x)=\arcsin x+\arccos x$，证明：对于一切 $x\in[-1,1]$，恒有 $f(x)=\frac{\pi}{2}$.

证明　当 $x\in(-1,1)$ 时，$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=0$，由推论 2.4.1，$f(x)$ 为常函数，因为 $f(0)=\frac{\pi}{2}$，于是 $f(x)=\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$.

又因为 $f(-1)=f(1)=\frac{\pi}{2}$，所以对于一切 $x\in[-1,1]$，恒有 $f(x)=\frac{\pi}{2}$.

例 2.4.7　证明不等式 $\frac{b-a}{b}<\ln\frac{b}{a}<\frac{b-a}{a}$ 对任意 $0<a<b$ 成立.

证明　题目中不等式可恒等变形为：

$$\frac{1}{b}<\frac{\ln b-\ln a}{b-a}<\frac{1}{a}. \tag{2-3}$$

因为 $\ln x$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，所以据拉格朗日中值定理至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\frac{\ln b-\ln a}{b-a}=(\ln x)'\big|_{x=\xi}=\frac{1}{\xi},(a<\xi<b)$$

因为 $\frac{1}{b}<\frac{1}{\xi}<\frac{1}{a}$，所以(2-3)成立，于是原不等式得证.

3. 柯西中值定理

定理 2.4.3(柯西中值定理)　如果函数 $f(x)$ 和 $F(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，且 $F'(x)$ 在 (a,b) 内恒不为零，那么至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}.$$

证明从略.

习题 2.4

小试牛刀

1. 验证函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ 在区间 $[-2,2]$ 上满足罗尔定理的条件,并求出定理结论中的 ξ.

2. 验证函数 $f(x)=4x^3-5x^2+x-1$ 在区间 $[0,1]$ 上满足拉格朗日中值定理的条件,并求出定理结论中的 ξ.

3. 设 $f(x)=\dfrac{1}{(x-3)^2}$,证明:不存在 $c\in(1,4)$,使得 $f(4)-f(1)=f'(c)(4-1)$. 这是否与微分中值定理矛盾?

4. 证明下列不等式:$\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x(x>0)$.

大展身手

5. 设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导,并对任何 x 恒有 $f'(x)>g'(x)$,且 $f(a)=g(a)$. 证明当 $x>a$ 时,$f(x)>g(x)$;当 $x<a$ 时,$f(x)<g(x)$.

6. 不用求出函数 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ 的导数,说明方程 $f'(x)=0$ 有几个实根,并指出它们所在的区间.

7. 设 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,则存在常数 m,M,对于满足 $a\leqslant x_1<x_2\leqslant b$ 的任意两点 x_1,x_2,证明恒有

$$m(x_2-x_1)\leqslant f(x_2)-f(x_1)\leqslant M(x_2-x_1).$$

8. 试证明:对函数 $f(x)=px^2+qx+r(p\neq 0)$ 应用拉格朗日中值定理时所求得的点 ξ 总是位于区间的正中间.

第五节 导数的应用

应用案例

设某种产品的需求函数为 $Q=1200-5p$,其中 p 为价格(单位:元),成本函数 $C(q)=2000+80q$,其中 q 为产量(单位:件). 求产量和价格分别为多少时,该产品的利润最大,并求最大利润.

我们掌握了导数的概念后,就可以用它来研究函数的各种性质,比如说一些以前没法求解的极限、函数的单调性判定、函数极值与最值的求法等等,下面我们一一来加以解决.

一、洛必达法则

1. “$\dfrac{0}{0}$”型未定式

法则 2.5.1　设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足

(1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$;

(2) 函数 $f(x)$, $g(x)$ 在 x_0 的某个邻域内(点 x_0 可除外)可导,且 $(x)\neq 0$;

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$($A$ 可以是有限数,也可为无穷大),则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A.$$

小提示

法则 2.5.1 对于 $x\to\infty$, $x\to\pm\infty$, $x\to x_0^+$, $x\to x_0^-$ 时的“$\dfrac{0}{0}$”型未定式同样适用.

小试牛刀

例 2.5.1　求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}}{x-1}$.

解　这是“$\dfrac{0}{0}$”型未定式,由洛必达法则,得

$$\lim_{x\to 1}\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(\mathrm{e}^x-\mathrm{e})'}{(x-1)'}=\lim_{x\to 1}\frac{\mathrm{e}^x}{1}=\mathrm{e}.$$

例 2.5.2　求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{\pi}{2}-\arctan x}{\dfrac{1}{x}}$.

解　这是“$\dfrac{0}{0}$”型未定式,由洛必达法则,得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{\pi}{2}-\arctan x}{\dfrac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x\right)'}{\left(\dfrac{1}{x}\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\dfrac{1}{1+x^2}}{-\dfrac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\dfrac{1}{x^2}}=1.$$

大展身手

例 2.5.3　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}-2x}{x-\sin x}$.

解　极限是“$\dfrac{0}{0}$”型未定式,使用洛必达法则,得

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-e^{-x}-2x)'}{(x-\sin x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}.$$

上式右端的极限仍然是“$\frac{0}{0}$”型未定式，继续使用洛必达法则，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x+e^{-x}-2)'}{(1-\cos x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}.$$

上式右端的极限也仍然是“$\frac{0}{0}$”型未定式，再次使用洛必达法则，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-e^{-x})'}{(\sin x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=2.$$

小智囊

如果当 $x\to x_0$ 时，$\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 仍为“$\frac{0}{0}$”型未定式，且 $f'(x)$ 与 $g'(x)$ 仍满足法则 2.5.1 的条件，则可继续使用洛必达法则，以此类推，可得：

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{g''(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'''(x)}{g'''(x)}=\cdots.$$

2. “$\frac{\infty}{\infty}$”型未定式

法则 2.5.2 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty$；

(2) 函数 $f(x)$，$g(x)$ 在 x_0 的某个邻域内（点 x_0 可以除外）可导，且 $g'(x)\neq 0$；

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$（$A$ 为有限数，也可为无穷大），则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A.$$

小提示

与法则 2.5.1 相同，法则 2.5.2 对于 $x\to\infty$，$x\to\pm\infty$，$x\to x_0^+$，$x\to x_0^-$ 时的“$\frac{\infty}{\infty}$”型未定式同样适用，并且对使用后得到的“$\frac{\infty}{\infty}$”或“$\frac{0}{0}$”型未定式，只要符合洛必达法则的条件，就可以连续使用.

小试牛刀

例 2.5.4　求 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln\tan 2x}{\ln\tan x}$.

解　$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln\tan 2x}{\ln\tan x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2\sec^2 2x/\tan 2x}{\sec^2 x/\tan x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2\tan x}{\tan 2x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2\sec^2 x}{2\sec^2 2x}=1.$

例 2.5.5　求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{\ln x}$($n$ 为正整数).

解　$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{\ln x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{nx^{n-1}}{\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}nx^n=+\infty.$

大展身手

例 2.5.6　求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{\mathrm{e}^x}$($n$ 为自然数).

解　$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{\mathrm{e}^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{nx^{n-1}}{\mathrm{e}^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{n(n-1)x^{n-2}}{\mathrm{e}^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{n(n-1)(n-2)x^{n-3}}{\mathrm{e}^x}=\cdots=$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{n!}{\mathrm{e}^x}=0.$

小提示

由上面两个例题我们可以看到,当 $x\to+\infty$ 时,幂函数 x^n、指数函数 e^x 与对数函数 $\ln x$ 都是无穷大,但是它们趋向于无穷大的速度并不是一样,一般来说有这样的关系:$\ln x<x^n<\mathrm{e}^x$.

3. 其他类型未定式

在求 $x\to x_0$,$x\to\infty$,$x\to\pm\infty$,$x\to x_0^+$,$x\to x_0^-$ 时 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 的极限,除"$\dfrac{0}{0}$"型与"$\dfrac{\infty}{\infty}$"型未定式之外,还有下列一些其他类型的未定式.

(1)"$0\cdot\infty$"型:$f(x)$ 的极限为 0,$g(x)$ 的极限为 ∞,求 $f(x)\cdot g(x)$ 的极限;

(2)"$\infty-\infty$"型:$f(x)$,$g(x)$ 的极限均为 ∞,求 $f(x)-g(x)$ 的极限;

(3)"1^∞"型:$f(x)$ 的极限为 1,$g(x)$ 的极限为 ∞,求 $f(x)^{g(x)}$ 的极限;

(4)"0^0"型:$f(x)$,$g(x)$ 的极限均为 0,求 $f(x)^{g(x)}$ 的极限;

(5)"∞^0"型:$f(x)$ 的极限为 ∞,$g(x)$ 的极限为 0,求 $f(x)^{g(x)}$ 的极限.

这些类型的未定式,不能直接使用极限的运算法则来求解,其极限的存在与否因式而异.一般而言,可按下述方法处理:对(1)、(2)两种类型,可利用适当变换将它们化为"$\dfrac{0}{0}$"型或"$\dfrac{\infty}{\infty}$"型未定式,再用洛必达法则求极限;对(3)、(4)、(5)三种类型未定式,可以直接用 $\lim f(x)^{g(x)}=\lim\mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)}=\mathrm{e}^{\lim g(x)\ln f(x)}$ 化为"$0\cdot\infty$"型来解决问题.

小试牛刀

例 2.5.7　求 $\lim\limits_{x\to 0^+}x^3\ln x$.

解 这是“$0\cdot\infty$”型未定式，可将其化为“$\dfrac{\infty}{\infty}$”型未定式.

$$\lim_{x\to0^+}x^3\ln x=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{x^{-3}}=\lim_{x\to0^+}\frac{1/x}{-3x^{-4}}=\lim_{x\to0^+}\left(-\frac{1}{3}x^3\right)=0.$$

大展身手

例 2.5.8 求 $\lim\limits_{x\to1^+}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$.

解 这是“$\infty-\infty$”型未定式，通过“通分”将其化为 $\dfrac{0}{0}$ 型未定式

$$\lim_{x\to1^+}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=\lim_{x\to1^+}\frac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}=\lim_{x\to1^+}\frac{\ln x+1-1}{\ln x+\dfrac{x-1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to1^+}\frac{\ln x}{\ln x+1-\dfrac{1}{x}}=\lim_{x\to1^+}\frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}=\frac{1}{2}.$$

例 2.5.9 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{\sin x}$.

解 这是“$\dfrac{0}{0}$”型未定式，若使用洛必达法则，分子、分母分别求导后，化为：

$$\lim_{x\to0}\frac{\left(x^2\sin\dfrac{1}{x}\right)'}{(\sin x)'}=\lim_{x\to0}\frac{2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}}{\cos x}.$$

此式的极限不存在，因此法则 2.5.1 的第 3 个条件不满足，洛必达法则失效. 可用下面的方法求解.

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x}\cdot x\sin\frac{1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x}\cdot\lim_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}=1\cdot0=0.$$

小提示

在使用洛必达法则时，应注意如下几点：

(1) 每次使用洛必达法则时，必须检验极限是否属于或可化为“$\dfrac{0}{0}$”型或“$\dfrac{\infty}{\infty}$”型未定式；

(2) 如果有可约因子，或有非零极限的乘积因子，则可先约去或提出，然后再利用洛必达法则，以简化演算步骤；

(3) 当 $\lim\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 不存在时，并不能断定 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 不存在，此时应使用其他方法求极限.

二、函数的单调性的判定

单调性是函数的重要性态之一，它揭示了函数的变化趋势，而理解函数的变化趋势是分析问题的重要基础. 比如，我们可能会关心：随着时间推移，某产品的销量是上升还是下降？如何科学地判断一个函数的单调性呢？直观上，我们可以观察函数图像的走势，但对于复杂函数，这种方法往往不够精确. 此时，“导数”这一强大工具便派上了用场.

设函数 $f(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上的连续函数，如果 $f(x)$ 在 (a,b) 上可导且单调增加，那么曲线 $f(x)$ 上任一点处的切线与 x 轴正向的夹角都是锐角，即 $f'(x)>0$(如图 2 - 8).

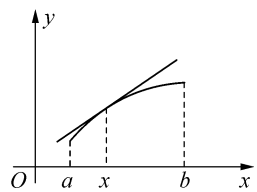


图 2 - 8

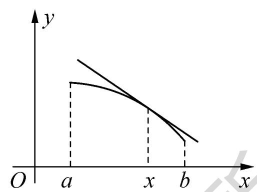


图 2 - 9

如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上为单调减少，那么曲线上任一点处的切线与 x 轴正向的夹角都是钝角，即 $f'(x)<0$(如图 2 - 9 所示). 以上结论反过来是否成立呢？

定理 2.5.1　设函数 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，则有

(1) 若在 (a,b) 内 $f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加；

(2) 若在 (a,b) 内 $f'(x)<0$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调减少.

证明　设 x_1,x_2 是 $[a,b]$ 内任意两点，且 $x_1<x_2$，则由拉格朗日中值定理有

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)(x_1<\xi<x_2).$$

若 $f'(x)>0$，则 $f'(\xi)>0$，又 $x_2-x_1>0$，所以 $f(x_2)-f(x_1)>0$，即当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$. 由于 x_1,x_2 是 $[a,b]$ 内的任意两点，所以函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加.

同理可证，若 $f'(x)<0$，则函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调减少.

有时函数在整个考察范围内并不单调，这时就需要把考察范围划分为若干个单调区间. 如图 2 - 10，在考察范围 $[a,b]$ 上，函数 $f(x)$ 并不单调，但可以划分 $[a,b]$ 为 $[a,x_1]$，$[x_1,x_2]$，$[x_2,b]$ 三个子区间，在 $[a,x_1]$，$[x_2,b]$ 上 $f(x)$ 单调增加，而在 $[x_1,x_2]$ 上 $f(x)$ 单调减少.

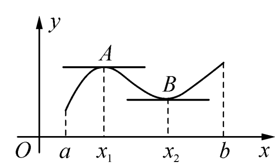


图 2 - 10

容易发现，如果 $f(x)$ 在 (a,b) 上可导，那么在单调区间的分界点处的导数为零，即 $f'(x_1)=f'(x_2)=0$. 一般称导数 $f'(x)$ 在区间内部的零点称为函数 $f(x)$ 的**驻点**. 因此，可导函数单调区间分界点为驻点.

另外，不可导的点也可能是单调区间的分界点. 比如函数 $y=|x|$，当 $x<0$ 时单调递减，当 $x>0$ 时单调递增，因此，$x=0$ 是单调区间的分界点. 由例 2.1.9 可知，此函数在 $x=0$ 处不可导.

确定函数 $f(x)$ 的单调区间的一般步骤：

第一步　求出函数 $f(x)$ 的考察范围 I(除指定范围外，一般是指函数的定义域)；

第二步　求出函数 $f(x)$ 在考察范围 I 内部的全部驻点和不可导的点；

第三步　用这些驻点和不可导的点将 I 分成若干个子区间；

第四步　确定 $f'(x)$ 在各个子区间上的符号，利用定理 2.5.1 判定函数 $f(x)$ 的单调性. 为了清楚起见，常采用列表方式.

小试牛刀

例 2.5.10　讨论函数 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-2x^2+3x-2$ 的单调性.

解　(1) 函数 $f(x)$ 的定义域 $I=(-\infty,+\infty)$；

(2) $f'(x)=x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$，令 $f'(x)=0$，得驻点为 $x_1=1, x_2=3$，无不可导点；

(3) 上述驻点将定义域 $(-\infty,+\infty)$ 划分为 3 个子区间：$(-\infty,1)$，$[1,3]$，$(3,+\infty)$；

(4) 列表确定 $f(x)$ 在每个子区间内导数的符号，根据定理 2.5.1 判断函数的单调性.

x	$(-\infty,1)$	$[1,3]$	$(3,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

（注：表中箭头 $\nearrow$、$\searrow$ 分别表示函数 $f(x)$ 在指定区间单调增加和减少，下同.）

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 和 $(3,+\infty)$ 内单调增加，在 $[1,3]$ 内单调减少.

大展身手

例 2.5.11　讨论函数 $f(x)=\dfrac{x^2}{3}-\sqrt[3]{x^2}$ 的单调性.

解　(1) 函数 $f(x)$ 的定义域 $I=(-\infty,+\infty)$；

(2) $f'(x)=\dfrac{2x}{3}-\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}=\dfrac{2}{3}\,\dfrac{(x^{\frac{2}{3}}+1)(\sqrt[3]{x}+1)(\sqrt[3]{x}-1)}{\sqrt[3]{x}}$，令 $f'(x)=0$，得驻点为 $x_1=-1, x_2=1$，此外 $f(x)$ 还有不可导点为 $x=0$；

(3) 上述驻点和不可导点将定义域 $(-\infty,+\infty)$ 划分为 4 个子区间：$(-\infty,-1)$，$(-1,0)$，$(0,1)$ 和 $(1,+\infty)$；

(4) 列表确定 $f(x)$ 在每个子区间内导数的符号，根据定理 2.5.1 判断函数的单调性：

x	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 和 $(0,1)$ 内是单调减少的，在 $(-1,0)$ 和 $(1,+\infty)$ 内是单调增加的.

应用函数的单调性，还可证明一些不等式.

例 2.5.12　证明当 $x>1$ 时，$2\sqrt{x}>3-\dfrac{1}{x}$.

证明　令 $f(x)=2\sqrt{x}-\left(3-\dfrac{1}{x}\right)$.

因为 $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{1}{x^2}(x\sqrt{x}-1)$，所以当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$，从而 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 内单调增加.

又 $f(1)=0$，所以 $f(x)>f(1)=0(x>1)$，即 $2\sqrt{x}-\left(3-\dfrac{1}{x}\right)>0$，

移项即得当 $x>1$ 时，$2\sqrt{x}>3-\dfrac{1}{x}$.

三、函数的极值

极值是函数的一种局部性态，它能帮助我们进一步把握函数的变化状况，为准确描绘函数图形提供必不可少的信息，它又是研究函数的最大值和最小值问题的关键所在.

定义 2.5.1　设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，若对于该邻域内异于 x_0 的 x 恒有

(1) $f(x)<f(x_0)$，则称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的**极大值**，x_0 称为 $f(x)$ 的**极大值点**；

(2) $f(x)>f(x_0)$，则称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的**极小值**，x_0 称为 $f(x)$ 的**极小值点**.

函数的极大值与极小值统称为函数的**极值**，使函数取得极值的点 x_0 称为函数 $f(x)$ 的**极值点**.

由定义可见，极值是函数的一个局部性概念.

从图 2-11 可以看出，若函数 $f(x)$ 在极值点处可导(如 $x_0\sim x_4$)，则图形上对应点处的切线是水平的，因此函数在这类极值点处的导数为 0，即这类极值点必定是函数的驻点. 注意图形在 x_5 所对应的点 A 处无切线，因此 x_5 是函数的不可导点，但函数在 x_5 处取得了极小值. 这说明不可导点也可能是函数的极值点.

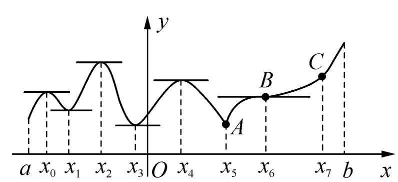


图 2-11

定理 2.5.2(极值的必要条件)　若函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导，且在 x_0 处取得极值，那么 x_0 必定是函数的驻点，即 $f'(x_0)=0$.

证明从略.

小提示

必须注意，$f(x)$ 的驻点不一定是 $f(x)$ 的极值点. 如图 2-11 上的点 x_6，尽管曲线在点 B 处有水平切线，即 x_6 是驻点 $(f'(x_6)=0)$，但函数在 x_6 处并无极值.

定理 2.5.3(极值的第一充分条件)　设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的邻域 $U(x_0,\delta)$ 内连续，空心邻域 $U(\hat{x}_0,\delta)$ 内可导，则

(1) 如果在 x_0 的左邻域内 $f'(x)>0$，在 x_0 的右邻域内 $f'(x)<0$，那么 x_0 是 $f(x)$ 的极大值点；

(2) 如果在 x_0 的左邻域内 $f'(x)<0$，在 x_0 的右邻域内 $f'(x)>0$，那么 x_0 是 $f(x)$

的极小值点；

(3) 如果在 x_0 的空心邻域 $U(\hat{x}_0,\delta)$ 内，$f'(x)$ 不改变符号，那么 x_0 不是 $f(x)$ 的极值点.

证明 (1) 在 x_0 的空心邻域 $U(\hat{x}_0,\delta)$ 内任取一点 x，在以 x 和 x_0 为端点的闭区间上，对函数 $f(x)$ 应用拉格朗日中值定理，得

$$f(x)-f(x_0)=f'(\xi)(x-x_0)(\xi\text{ 在 }x\text{ 和 }x_0\text{ 之间}).$$

当 x 在 x_0 的左邻域内时，$x<\xi<x_0$，从而由已知条件知 $f'(\xi)>0$，所以

$$f(x)-f(x_0)=f'(\xi)(x-x_0)<0,\text{即 } f(x)<f(x_0).$$

当 x 在 x_0 的右邻域内时，$x_0<\xi<x$，从而由已知条件知 $f'(\xi)<0$，所以

$$f(x)-f(x_0)=f'(\xi)(x-x_0)<0,\text{即 } f(x)<f(x_0).$$

综上可知，对 x_0 附近的任意 x，都有 $f(x)<f(x_0)$. 根据极值定义知 x_0 是 $f(x)$ 的极大值点.

类似地可证明(2)，(3).

定理 2.5.4(极值的第二充分条件) 设 x_0 为函数 $f(x)$ 的驻点，且在点 x_0 处有二阶导数 $f''(x_0)\neq 0$，则 x_0 必定是函数 $f(x)$ 的极值点，且

(1) 如果 $f''(x_0)<0$，则 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极大值；

(2) 如果 $f''(x_0)>0$，则 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极小值.

证明从略.

小提示

(1) 比较两个判定方法可以看到，定理 2.5.3 适用于驻点和不可导点，而定理 2.5.4 只能对二阶导数不为 0 的驻点判定.

(2) 如果 $f''(x_0)=0$，则无法根据极值的第二充分条件来判断 $f(x)$ 在点 x_0 处是否取得极值.

求函数 $f(x)$ 的极值的一般步骤：

第一步　确定函数 $f(x)$ 的考察范围(或定义域)；

第二步　求出函数 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$(若使用定理 2.5.4 还需要求出 $f''(x)$)；

第三步　求出函数 $f(x)$ 的所有驻点及不可导点，即求出 $f'(x)=0$ 的根和 $f'(x)$ 不存在的点；

第四步　利用定理 2.5.3 或定理 2.5.4，判定上述驻点或不可导点是否为函数的极值点，并求出相应的极值.

小试牛刀

例 2.5.13 求函数 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-2x^2+3x-2$ 的极值.

解 (1) 函数 $f(x)$ 的定义域 $I=(-\infty,+\infty)$；

(2) $f'(x)=x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$，$f''(x)=2x-4$；

(3) 令 $f'(x)=0$，得驻点 $x_1=1, x_2=3$，无不可导的点；

(4) 因为 $f''(1)=-2<0, f''(3)=2>0$，由定理 2.5.4 知，

在点 $x=1$ 处 $f(x)$ 取得极大值，极大值为 $f(1)=-\dfrac{2}{3}$；在点 $x=3$ 处取得极小值，极小值为 $f(3)=-2$.

例 2.5.14　求函数 $f(x)=(x+2)^2(x-1)^3$ 的极值.

解　(1) 函数 $f(x)$ 的定义域 $I=(-\infty,+\infty)$；

(2) $f'(x)=2(x+2)(x-1)^3+3(x+2)^2(x-1)^2=(x+2)(x-1)^2(5x+4)$；

(3) 令 $f'(x)=0$，得驻点为 $x_1=-2, x_2=-\dfrac{4}{5}, x_3=1$，且 $f(x)$ 没有不可导点；

(4) 利用定理 2.5.3，判定驻点是否为函数 $f(x)$ 的极值点. 这一步常用类似于确定函数增减区间那样的列表方法，只是增加了从导数符号判定驻点是否为极值点的内容，其结果如下：

x	$(-\infty,-2)$	-2	$\left(-2,-\frac{4}{5}\right)$	$-\frac{4}{5}$	$\left(-\frac{4}{5},1\right)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	极大值 0	$\searrow$	极小值 $-\frac{26244}{3125}\approx-8.4$	$\nearrow$	无极值	$\searrow$

从表中可知：

$x_1=-2$ 是极大值点，极大值为 $f(-2)=0$；

$x_2=-\dfrac{4}{5}$ 是极小值点，极小值为 $f\left(-\dfrac{4}{5}\right)\approx-8.4$.

小提示

在用极值的第一充分条件求函数极值时，第四步建议采用类似单调性判定的第四步，采用列表讨论的方法，只是增加了从导数符号判定驻点是否为极值点的内容.

小智囊

求解函数极值时，当函数有不可导的点或者二阶导数的计算比较繁琐或者驻点处的二阶导数为 0 时，我们一般采用极值的第一充分条件.

大展身手

例 2.5.15　求函数 $f(x)=x\sqrt[3]{(3x+4)^2}$ 的极值.

解　(1) 函数 $f(x)$ 的定义域 $I=(-\infty,+\infty)$；

(2) $f'(x)=\sqrt[3]{(3x+4)^2}+\dfrac{2x}{\sqrt[3]{3x+4}}=\dfrac{5x+4}{\sqrt[3]{3x+4}}$；

(3) 令 $f'(x)=0$，得驻点 $x_1=-\dfrac{4}{5}$，不可导点为 $x_2=-\dfrac{4}{3}$；

(4) 利用定理 2.5.3，判定驻点或不可导点是否为函数的极值点. 列表如下：

x	$\left(-\infty,-\frac{4}{3}\right)$	$-\frac{4}{3}$	$\left(-\frac{4}{3},-\frac{4}{5}\right)$	$-\frac{4}{5}$	$\left(-\frac{4}{5},+\infty\right)$
$f'(x)$	+	不存在	−	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

从表中可知：

$x_1=-\dfrac{4}{3}$ 是极大值点，极大值为 $f\left(-\dfrac{4}{3}\right)=0$；

$x_2=-\dfrac{4}{5}$ 是极小值点，极小值为 $f\left(-\dfrac{4}{5}\right)=-\dfrac{4}{25}\sqrt[3]{320}$.

四、函数的最大值与最小值

在工农业生产、工程技术和科学实验中，人们常常会遇到在一定条件下，如何使“用料最省”、“产品最多”、“效率最高”、“成本最低”等问题. 用数学的方法进行描述，它们都可归结为求一个函数的最大值、最小值问题.

定义 2.5.2 设函数 $y=f(x)$，$x\in I$，$x_1,x_2\in I$.

(1) 若对任意 $x\in I$，$f(x)\geqslant f(x_1)$，则称 $f(x_1)$ 为 $f(x)$ 在区间 I 上的**最小值**，称 x_1 为 $f(x)$ 在 I 上的**最小值点**；

(2) 若对任意 $x\in I$，$f(x)\leqslant f(x_2)$，则称 $f(x_2)$ 为 $f(x)$ 在区间 I 上的**最大值**，称 x_2 为 $f(x)$ 在 I 上的**最大值点**.

函数的最大值、最小值统称为**最值**，最大值点、最小值点统称为**最值点**.

最值与极值不同，极值是一个仅与一点附近的函数值有关的局部概念，最值却是一个与函数的定义区间 I 内函数值有关的整体概念. 因此，一个函数的极值可以有若干个，但一个函数在一个确定的区间上的最大值、最小值如果存在的话，只能是唯一的.

由最大值和最小值定理可知，若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，函数 $f(x)$ 必在该区间上存在最大值和最小值. 如果其最大值和最小值在开区间 (a,b) 内取得，最大值点和最小值点必在 $f(x)$ 的极值点之中，而极值点有可能是驻点，也可能是不可导的点. 另外，有时函数的最大值和最小值可能在区间的端点处取得.

因此，函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 最大值和最小值可按如下方法求得：

(1) 求出函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内的所有可能极值点，即驻点和不可导点；

(2) 计算函数 $f(x)$ 在驻点、不可导点处及端点 a,b 处的函数值 $f(a)$ 和 $f(b)$；

(3) 比较这些函数值，其中最大者即为函数 $f(x)$ 的最大值，最小者即为函数 $f(x)$ 的最小值.

小试牛刀

例 2.5.16　求函数 $f(x)=2x^3-3x^2+14$ 在区间$[-1,4]$上的最大值和最小值.

解　显然 $f(x)$ 在 $[-1,4]$ 上连续.

(1) $f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$，令 $f'(x)=0$，得驻点 $x_1=0$，$x_2=1$，且无不可导点；

(2) 计算函数 $f(x)$ 在驻点、区间端点处的函数值：

$$f(-1)=9,f(0)=14,f(1)=13,f(4)=94;$$

(3) 函数 $f(x)$ 在$[-3,4]$上的最大值为 $f(4)=94$，最大值点为 $x=4$；最小值为 $f(-1)=9$，最小值点为 $x=-1$.

小智囊

数学和实际问题中遇到的函数，未必都是闭区间上的连续函数. 注意下述结论，会使我们的讨论显得方便而简洁.

(1) 若函数 $f(x)$ 在某区间 I(I 可以是闭区间、开区间或无穷区间)内仅有一个可能极值点 x_0，则当 x_0 为极大(小)值点时，$f(x_0)$ 就是 $f(x)$ 在区间 I 上的最大(小)值；

(2) 在实际问题中，若由分析得知函数 $f(x)$ 确实存在最大值或最小值，而在所讨论的区间内可导函数 $f(x)$ 又仅有一个驻点 x_0，则点 x_0 处的函数值 $f(x_0)$ 一定是最大值或最小值.

例 2.5.17　求解【应用案例】中的最大利润.

解　由 $Q=1200-5p$，

得 $p=240-0.2Q=240-0.2q$(这里的生产量 q 可以理解为需求量 Q)，

所以收益函数为 $R(q)=p\cdot q=(240-0.2q)q=240q-0.2q^2$，

则利润函数为：

$$\begin{aligned}L(q)&=R(q)-C(q)=(240q-0.2q^2)-(2000+80q)\\&=-0.2q^2+160q-2000.\end{aligned}$$

边际利润为

$$L'(q)=-0.4q+160.$$

令 $L'(q)=0$，得唯一驻点 $q_0=400$，且 $L''(400)=-0.4<0$，可见产量 $q_0=400$ 时利润取得最大值，最大利润为

$$L(400)=-0.2\times400^2+160\times400-2000=30000(\text{元}).$$

再将 $q_0=400$ 代入价格函数

$$p=240-0.2q=240-0.2\times400=160\ (\text{元/件}).$$

所以产量为 400 件，价格为 160 元/件时，获得最大利润为 30000 元.

例 2.5.18　某防空洞的截面拟建成矩形上方加半圆的形状，半圆的直径与矩形的一条边刚好吻合. 已知截面的面积为 5 m^2. 问半圆的直径为多少时才能使截面的周长最小？

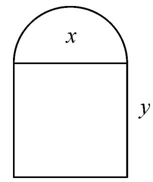


图 2 - 12

解 根据题意,矩形的一边长与半圆的直径相同,设为 x,另一边长设为 y(如图 2 - 12),则有

$$\frac{1}{2}\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2+xy=5,\text{所以 } y=\frac{5}{x}-\frac{\pi}{8}x,$$

所以,周长 $l=x+2y+\pi\cdot\frac{x}{2}=\left(1-\frac{\pi}{4}\right)x+\frac{10}{x}$,

$$l'=1-\frac{\pi}{4}-\frac{10}{x^2},\text{令 } l'=0,\text{解得 } x=\sqrt{\frac{40}{4+\pi}}.$$

又 $l''=\frac{20}{x^3}, l''(\sqrt{\frac{40}{4-\pi}})>0$,

所以直径 $x=\sqrt{\frac{40}{4-\pi}}$ 时周长最小.

大展身手

例 2.5.19 某产品的次品率 y 与日产量 q 之间的关系为

$$y=\begin{cases}\frac{1}{101-q} & 0\leqslant q\leqslant 100\\ 1 & q>100\end{cases}.$$

若每件合格产品的盈利为 A 元,每件次品的损失为 $\frac{A}{3}$ 元,试求盈利最多的日产量.

解 由题意,次品数为 qy,正品数为 $q-qy$,设日产量为 q 时盈利为 $T(q)$,则

$$T(q)=A(q-qy)-\frac{A}{3}qy=Aq-\frac{4A}{3}qy.$$

显然,要使盈利最多,$q\in[0,100]$,此时 $y=\frac{1}{101-q}$,则

$$T(q)=Aq-\frac{4A}{3}\frac{q}{101-q}, q\in[0,100].$$

从而问题就归结为求函数 $T(q)$ 的最大值.因为

$$T'(q)=A-\frac{4A}{3}\left(\frac{q}{101-q}\right)'=A-\frac{A}{3}\frac{404}{(101-q)^2}.$$

令 $T'(q)=0$,于是得函数 $T(q)$ 的唯一驻点 $q\approx 89.4$.因此 $q=89.4$ 是使 $T(q)$ 取得最大值的点.

由实际意义,q 是正整数,因此比较 $T(89)\approx 79.11A$,$T(90)\approx 79.09A$,可知 $q=89$,即日产量为 89 件时,产品盈利最多.

下面我们来探讨一下库存问题中的最值.

库存无论是在生产环节或商业环节,还是在各个经济系统中都是一个重要的问题.企业对某些产品或原材料的需求量可由库存来提供和满足,库存也需要由进货来维持和补充.在

供给与需求、生产与销售之间，库存起到调节的作用. 通常的库存问题是库存数量为多少时，存货总费用最低.

一般的，存货总费用包括如下两个方面.

（1）生产准备费或订购费：工厂生产产品是成批投产的，每批投产要支付生产准备费；商店向外订货，每批订货都要支付订购费. 假设每批投产的准备费或订购费与该批次投产或订货数量无关.

（2）货物的库存费：货物存放仓库的保管费. 假设在某一时间内单位产品的库存费不变.

假设在一个计划期内需求量是已知且固定的，那么在这个计划期内：

（1）如果每批投产或订购量多，库存量自然多，因而库存费多；但因投产或订购的次数少，因此生产准备费或订购费少.

（2）如果每批投产或订购量少，库存量自然少，因而库存费少；但因投产或订购的次数多，因此生产准备费或订购费多.

在这两种费用一多一少的情况下，我们的问题是：如何确定每批投产或订购的数量，即选择最优批量以使存货总费用最小？

若假设：a 为一个计划期内的需求量，即生产或订货的总量；b 为每批生产准备费或订购费；c 为一个计划期内单位产品的库存费；q 为每批投产或订货的数量，即批量；C 为一个计划期内存货总费用，即生产准备费或订购费与库存费之和.

则问题为：q 为多少时，C 取得最小值？

在一个计划期内，我们假定自始至终库存数量恰是批量之半，所以库存量为 $\frac{q}{2}$，库存费是 $\frac{cq}{2}$；生产次数或订购次数，即批数应为 $\frac{a}{q}$，因此，生产准备费或订购费为 $b \cdot \frac{a}{q}$. 于是，存货总费用 C 与每批数量 q 的函数关系为

$$C = C(q) = \frac{cq}{2} + \frac{ba}{q}, q \in (0, a].$$

根据最值的求法，

$$C'(q) = \left(\frac{cq}{2} + \frac{ba}{q}\right)' = \frac{c}{2} - \frac{ba}{q^2}.$$

令 $C'(q) = 0$，得唯一驻点，也是最小值点

$$q_{\min} = \sqrt{\frac{2ab}{c}}.$$

此时总费用最小，其值为

$$C_{\min} = \sqrt{2abc}.$$

下面举一个例子加以说明.

例 2.5.20　某工厂生产某商品，年销售量为 100 万件，每批生产需要增加准备费 1000 元，而每件商品的年库存费为 0.05 元，如果销售量是均匀的，且上一批售完，立即生产下一批，每批数量相同. 问全年应组织几批生产可使得生产准备费与库存费之和为最小？

解 设批量为 q 件，则批次为 $\dfrac{1000000}{q}$，总费用为 C.

由题设知 $a=1000000$ 件，$b=1000$ 元，$c=0.05$ 元，则总费用和批量间的函数为

$$C(q)=\frac{0.05q}{2}+\frac{1000000\times 1000}{q},q\in[0,1000000].$$

由上面的公式知道 $$q_{\min}=\sqrt{\frac{2ab}{c}}=\sqrt{\frac{2\times 1000000\times 1000}{0.05}}=200000.$$

此时的批次为 $$\frac{1000000}{200000}=5.$$

即全年应组织 5 批生产可使得生产准备费与库存费之和最小.

五、曲线的凹凸性与拐点

1. 曲线的凹凸性

我们常常将函数 $y=f(x)$ 的图形称为曲线 $y=f(x)$. 我们虽然已能由一阶导数的正负来判定函数的单调性，但是用于函数图形的描绘还有不够完善的地方. 在图 2－13(a)中，曲线弧 AB 和 CD 都是上升的，可是弧 AB 呈凸形上升，弧 CD 呈凹形上升；在图 2－13(b)中，曲线弧 AB 和 CD 都是下降的，可是弧 AB 呈凸形下降，弧 CD 呈凹形下降.

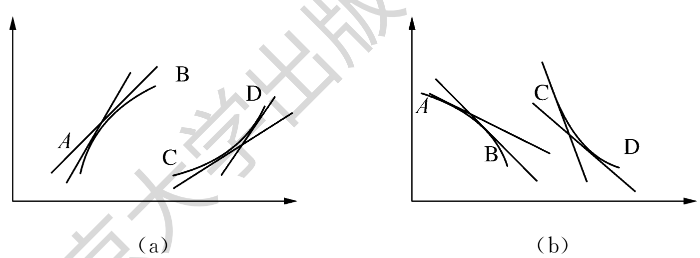


图 2－13

由图 2－13：凡呈凸形的曲线弧，则在弧的每一点处作切线，这些切线总在曲线弧的上方；凡呈凹形的曲线弧，则在弧的每一点处作切线，这些切线总在曲线弧的下方. 根据曲线弧的上述特性，给出曲线凹凸性的定义.

定义 2.5.3 若在区间 (a,b) 内，曲线 $y=f(x)$ 的各点处的切线都位于曲线的下方，则称此曲线在 (a,b) 内是凹的；若曲线 $y=f(x)$ 的各点处切线都位于曲线的上方，则称此曲线在 (a,b) 内是凸的.

图 2－13 显示：随着横坐标 x 的增加，凹曲线弧上各点的切线斜率逐渐增大，即 $f'(x)$ 是单调增加的；凸曲线弧上各点的切线斜率逐渐减小，即 $f'(x)$ 是单调减少的. 对于 $f'(x)$ 的增减性可由 $f'(x)$ 的导数，即 $f''(x)$ 来确定，由此可得曲线凹凸性的判别法.

定理 2.5.5(曲线的凹凸性的判定定理) 设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内具有二阶导数.

(1) 如果在区间 (a,b) 内 $f''(x)>0$，则曲线 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内是凹的；

(2) 如果在区间 (a,b) 内 $f''(x)<0$，则曲线 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内是凸的.

小试牛刀

例 2.5.21　判定曲线 $f(x)=\cos x$ 在 $\left[\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{2}\right]$ 内的凹凸性.

解　(1) 考察范围为 $\left[\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{2}\right]$;

(2) $f'(x)=-\sin x$, $f''(x)=-\cos x$, 令 $f''(x)=0$, 得 $x=\frac{3}{2}\pi\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{2}\right)$;

(3) 在 $\left(\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi\right)$ 内 $f''(x)>0$, 曲线是凹的; 在 $\left(\frac{3}{2}\pi,\frac{5}{2}\pi\right)$ 内 $f''(x)<0$, 曲线是凸的.

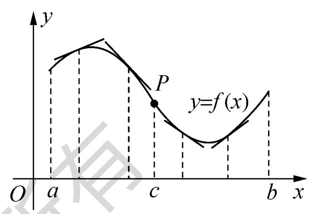


图 2-14

曲线凹凸性的几何意义:曲线 $y=f(x)$ 的凹凸性是反映函数增减快慢这个特性的.从图 2-14 以看出,在曲线凸弧段,若函数是递增的,但越增越慢;若函数是递减的,反而越减越快.在曲线凹弧段,若函数是递增的,则越增越快;若函数是递减的,反而越减越慢.

2. 曲线的拐点

定义 2.5.4　若连续曲线 $y=f(x)$ 上的点 P 是凹的曲线弧与凸的曲线弧的分界点,则称点 P 是曲线 $y=f(x)$ 的**拐点**.

定理 2.5.6(拐点的必要条件)　若函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处二阶导数存在,且点 $(x_0, f(x_0))$ 为曲线 $y=f(x)$ 的拐点,则 $f''(x_0)=0$.

证明从略.

小提示

值得注意的是 $f''(x_0)=0$ 是点 $(x_0,f(x_0))$ (存在二阶导数)为拐点的必要条件,而非充分条件.例如 $y=x^4$,当 $x=0$ 时, $y''(0)=0$, 但是点 $(0,0)$ 不是曲线 $y=x^4$ 的拐点,因为点 $(0,0)$ 两侧二阶导数不变号.

定理 2.5.7(拐点的充分条件)　若 $f''(x_0)=0$, 且在 x_0 两侧 $f''(x)$ 变号,则点 $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

结论是显然的.

根据定理 2.5.6 和定理 2.5.7 可知,二阶导数为 0 的点可能是拐点,另外二阶导数不存在的点也有可能为拐点.因此,可以按以下步骤来判定曲线 $y=f(x)$ 的拐点:

第一步　确定 $y=f(x)$ 的定义域 I;

第二步　求出其一阶导数 $f'(x)$ 和二阶导数 $f''(x)$;

第三步　令 $f''(x)=0$, 求出 $f''(x)$ 的零点及其 $f''(x)$ 不存在的点;

第四步　用上述各点从小到大依次将 I 分成若干个子区间,由定理 2.5.5 和定理 2.5.7,考察在每个子区间内 $f''(x)$ 的符号,找出曲线 $y=f(x)$ 的凹凸区间和拐点.这一步通常用列表表示.

小试牛刀

例 2.5.22 求曲线 $y=2+(x-4)^{\frac{1}{3}}$ 的凹凸区间与拐点.

解 (1) 定义域 $I=(-\infty,+\infty)$;

(2) $y'=\frac{1}{3}(x-4)^{-\frac{2}{3}}$, $y''=-\frac{2}{9}(x-4)^{-\frac{5}{3}}$;

(3) y'' 在$(-\infty,+\infty)$内无零点, y'' 不存在的点为 $x=4$;

(4) 列表(符号$\smile$、$\frown$分别表示曲线的凹和凸,下同):

x	$(-\infty,4)$	4	$(4,+\infty)$
$f''(x)$	$+$	不存在	$-$
$y=f(x)$	$\smile$	拐点$(4,2)$	$\frown$

所以,曲线 $y=2+(x-4)^{\frac{1}{3}}$ 的凹区间为$(-\infty,4)$,凸区间为$(4,+\infty)$,拐点为$(4,2)$.

例 2.5.23 求曲线 $y=\frac{1}{1+x^2}$ 凹凸区间和拐点.

解 (1)定义域为 $I=(-\infty,+\infty)$;

(2) $y'=\frac{-2x}{(1+x^2)^2}, y''=\frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}$;

(3) 令 $y''=0$, 得 $x_1=\frac{\sqrt{3}}{3}, x_2=-\frac{\sqrt{3}}{3}$;

(4) 列表讨论如下:

x	$\left(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\smile$	拐点 $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{3}{4}\right)$	$\frown$	拐点 $\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{3}{4}\right)$	$\smile$

所以,曲线 $y=\frac{1}{1+x^2}$ 的凹区间为 $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ 和 $\left(\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$, 凸区间为 $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, 拐点为 $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{3}{4}\right)$ 和 $\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{3}{4}\right)$.

六、曲线的渐近线及函数图像的描绘

在平面上描绘函数 $y=f(x)$ 的图形,当曲线延伸至无穷远处时,通常很难把它描绘得更准确,若曲线在延伸向无穷远处时能逐渐靠近一条直线,则可以较好地描绘出这条曲线的走向趋势,这样的直线就是曲线的渐近线.

定义 2.5.5 若曲线 C 上的动点 P 沿着曲线无限地远离原点时,点 P 与某一固定直线 L 的距离趋于零,则称直线 L 为曲线 C 的**渐近线**.

并不是任何曲线都有渐近线；即使有渐近线，也有水平、铅直和斜渐近线之分. 下面着重讨论函数的图像何时有水平渐近线或铅直渐近线.

1. 水平渐近线

定义 2.5.6　对于函数 $y=f(x)$，若

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=b\ (b\ \text{为常数}),$$

则称直线 $y=b$ 为曲线 $y=f(x)$ 的**水平渐近线**.

例如：因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$，所以直线 $y=0$ 为曲线 $y=\dfrac{1}{x}$ 的水平渐近线.

若 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$ 或 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$，则直线 $y=b$ 也为曲线 $y=f(x)$ 的水平渐近线，只是这时的渐近线仅限于曲线 $y=f(x)$ 在 $x\to-\infty$ 的一侧或者 $x\to+\infty$ 的一侧. 比如因为 $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$，所以直线 $y=\pm\dfrac{\pi}{2}$ 均为曲线 $y=\arctan x$ 的水平渐近线.

小试牛刀

例 2.5.24　求曲线 $y=\dfrac{x^3}{2^x}$ 的水平渐近线.

解　因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{2^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2}{2^x\ln2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6x}{2^x\ln^2 2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6}{2^x\ln^3 2}=0$，所以直线 $y=0$ 为其水平渐近线.

大展身手

例 2.5.25　求曲线 $y=x\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$ 的水平渐近线.

解　$\lim\limits_{x\to\infty}x\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}{\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$，所以直线 $y=0$ 是曲线 $y=x\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$ 的水平渐近线.

2. 铅直渐近线

定义 2.5.7　对于函数 $y=f(x)$，若

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty,$$

则称直线 $x=a$ 为曲线 $y=f(x)$ 的**铅直渐近线**.

例如，因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=\infty$，所以直线 $x=0$ 为曲线 $y=\dfrac{1}{x}$ 的铅直渐近线.

若 $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\infty$，则直线 $x=a$ 为曲线 $y=f(x)$ 的铅直渐近线. 只是这时的渐近线仅限于曲线 $y=f(x)$ 在 $x<a$ 的一侧或者 $x>a$ 的一侧. 比如因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$，所以直线 $y=0$ 为曲线 $y=\ln x$ 的铅直渐近线.

小试牛刀

例 2.5.26 求曲线 $y=\dfrac{x+1}{x-2}$ 的水平和铅直渐近线.

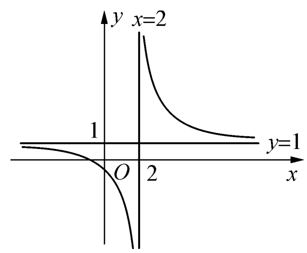


图 2-15

解 因为 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+1}{x-2}=\infty$，所以直线 $x=2$ 为曲线 $y=\dfrac{x+1}{x-2}$ 的铅直渐近线.

又 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{x-2}=1$，所以直线 $y=1$ 为曲线 $y=\dfrac{x+1}{x-2}$ 的水平渐近线(如图 2-15).

大展身手

例 2.5.27 求曲线 $y=\dfrac{x^2-3x+2}{2x-x^2}$ 的水平和铅直渐近线.

解 因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-3x+2}{2x-x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-3}{2-2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{-2}=-1$，所以直线 $y=-1$ 为其水平渐近线.

又因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-3x+2}{2x-x^2}=\infty$，$x=0$ 为其铅直渐近线.

3. 函数图形的描绘

描绘函数 $y=f(x)$ 的图形，其一般步骤如下：

第一步 确定函数的考察范围(通常是函数的定义域)，并判断函数有无奇偶性与周期性，确定作图范围；

第二步 求函数的一阶导数 $f'(x)$ 和二阶导数 $f''(x)$，并找出 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 在考察范围内全部零点及不存在的点，这些点将考察范围划分为若干个子区间；

第三步 通过 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 的符号，确定函数的单调性、凹凸性、极值点与拐点；

第四步 考察函数图形有无渐近线；

第五步 根据需要补充函数图形上的若干个关键点(如图形与坐标轴的交点等)；

第六步 根据前面几步的结果作出函数图形.

小试牛刀

例 2.5.28 描绘函数 $y=\mathrm{e}^{-x^2}$ 的图像.

解 (1) 函数的定义域是 $I=(-\infty,+\infty)$，且为偶函数，即其图形关于 y 轴对称，所以只要先作出在 $[0,+\infty)$ 范围内的图形，再作关于 y 轴对称的图形，即可得全部图形.

(2) 计算一阶导数 $y'=-2x\mathrm{e}^{-x^2}$，令 $y'=0$，得 $x=0$，没有一阶不可导的点.

计算二阶导数 $y''=2(2x^2-1)\mathrm{e}^{-x^2}$，令 $y''=0$，得 $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\in[0,+\infty)$，没有二阶导数不存在的点.

上述点将 $[0,+\infty)$ 划分为 $\left[0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 和 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$.

（3）根据上述数据，列表如下：

x	$\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$
y'	$-$	$-$	$-$
y''	$-$	0	$+$
y		拐点 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{e}}{e}\right)$	

（4）因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x^2}=0$，所以函数图形有水平渐近线 $y=0$.

（5）补充关键点 $(0,1)$，$\left(1,\frac{1}{e}\right)$.

（6）作出函数在 $[0,+\infty)$ 上的图形，并利用对称性，画出全部图形（如图 2－16）.

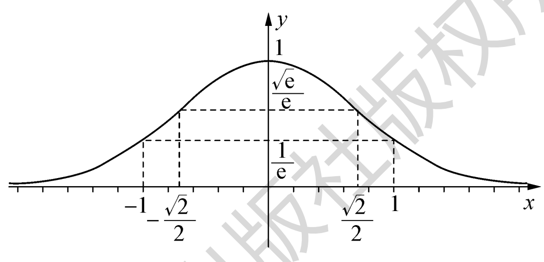


图 2－16

大展身手

例 2.5.29　作函数 $f(x)=\dfrac{\cos x}{2+\sin x}$ 的图形.

解　（1）函数的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，它既不是奇函数，也不是偶函数，因此，图像既不关于原点对称，也不关于 y 轴对称. 但因为对 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$，都有 $f(x+2\pi)=f(x)$，所以该函数是周期为 2π 的周期函数. 我们可以先研究该函数在一个周期 $[0,2\pi]$ 上的性质，作出函数在该周期上的图形.

（2）计算一阶导数：$f'(x)=-\dfrac{2\sin x+1}{(2+\sin x)^2}$，令 $f'(x)=0$，得驻点：$x_1=\dfrac{7\pi}{6}$，$x_2=\dfrac{11\pi}{6}$，无一阶不可导点.

计算二阶导数：$f''(x)=\dfrac{2\cos x(1-\sin x)}{(2+\sin x)^3}$，令 $f''(x)=0$，得 $x_3=\dfrac{\pi}{2}$，$x_4=\dfrac{3\pi}{2}$，无二阶不可导的点.

上述点将 $[0,2\pi]$ 划分为 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，$\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{7\pi}{6}\right)$，$\left(\dfrac{7\pi}{6},\dfrac{3\pi}{2}\right)$，$\left(\dfrac{3\pi}{2},\dfrac{11\pi}{6}\right)$，$\left(\dfrac{11\pi}{6},2\pi\right)$.

(3) 根据上述数据,列表如下:

x	$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$	$\frac{\pi}{2}$	$\left(\frac{\pi}{2},\frac{7\pi}{6}\right)$	$\frac{7\pi}{6}$	$\left(\frac{7\pi}{6},\frac{3\pi}{2}\right)$	$\frac{3\pi}{2}$	$\left(\frac{3\pi}{2},\frac{11\pi}{6}\right)$	$\frac{11\pi}{6}$	$\left(\frac{11\pi}{6},2\pi\right)$
y'	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
y''	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y	$\searrow$	拐点 $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$	$\searrow$	极小值 $f\left(\frac{7\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\nearrow$	拐点 $\left(\frac{3\pi}{2},0\right)$	$\nearrow$	极大值 $f\left(\frac{11\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\searrow$

(4) 无渐近线.

(5) 补充关键点:$f(0)=\frac{1}{2}$,$f(2\pi)=\frac{1}{2}$.

(6) 作出函数在一个周期 $[0,2\pi]$ 上的图形,如图 2-17 所示.

再将其拓展到定义域 $(-\infty,+\infty)$ 上,得到图形如图 2-18 所示.

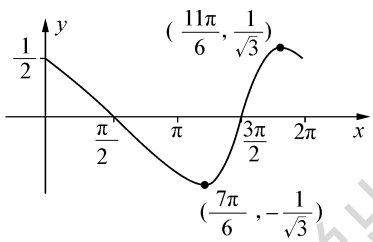


图 2-17

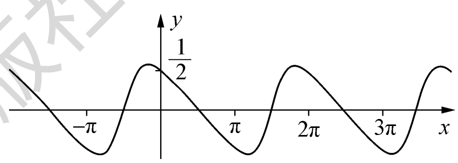


图 2-18

习题 2.5

小试牛刀

1. 求下列各题极限.

(1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\dfrac{\ln\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\tan x}$;

(2) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^m-a^m}{x^n-a^n}$($a\neq 0$,$m$,$n$ 为常数);

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-x)+x^2}{(1+x)^m-1+x^2}$;

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-b^x}{x}$;

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-1}{x}$;

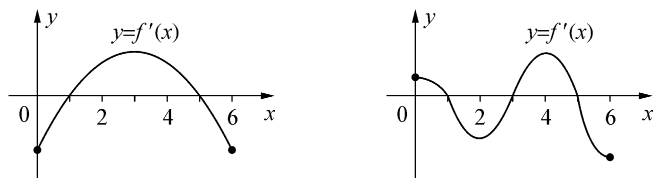
(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos\alpha x-\cos\beta x}{x^2}$($\alpha\cdot\beta\neq 0$);

(7) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x+2\sqrt{x}}$;

(8) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln\tan 5x}{\ln\tan 3x}$.

2. 已知某函数 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 的图形如图 2-19 所示,试据此写出此函数 $f(x)$ 的

单调区间与单调性,以及函数的极值点.



(1)　　　　　　　　(2)

图 2－19

3. 求一个三次多项式函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$,使它在 $x=-2$ 时取得极大值 3,在 $x=1$ 时取得极小值 0.

4. 求下列函数的单调区间.

(1) $f(x)=x^3-2x^2+6$;　　(2) $f(x)=\dfrac{8}{3}x^3-\ln x$;

(3) $f(x)=x+\sqrt{1-x}$;　　(4) $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

5. 求下列函数的极值点与极值.

(1) $y=x-\ln(1+x)$;　　(2) $y=2-(x^2-1)^{\frac{2}{3}}$;

(3) $f(x)=2e^x+e^{-x}$;　　(4) $f(x)=\arctan x-\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$;

(5) $f(x)=x^2e^{-x^2}$.

6. 求下列函数的最大值和最小值.

(1) $y=2x+\sqrt{x}$, $x\in[1,3]$;　　(2) $y=x^4-2x^2+5$, $x\in[-2,2]$;

(3) $y=\arctan\dfrac{1-x}{1+x}$, $x\in[0,1]$;　　(4) $y=\sqrt{4-3x}$, $x\in[-1,1]$.

7. 已知等腰三角形的周长为 $2l$(l 为常数),当该三角形的腰多长时其面积最大?并求其最大面积.

8. 一连锁服装店销售某种品牌的衬衫,当单价为 350 元时,可销售 1080 件;当价格每件降低 5 元时,可多销售 20 件,求使该服装店获得最大收入的价格、销售量和最大收入.

9. 如图 2－20,一个矩形内接于一个半径为 r 的半圆中,求这样的矩形的面积的最大值.

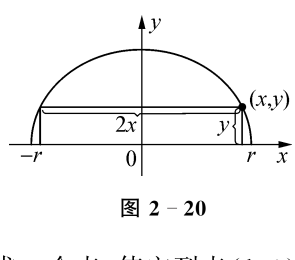


图 2－20

10. 在椭圆 $4x^2+y^2=4$ 上求一个点,使它到点(1,0)的距离最远.

11. 某厂生产摄像机,年产量 1000 台,每台成本 800 元,每一季度每台摄像机的库存费是成本的 5%;工厂分批生产,每批生产准备费为 5000 元;市场对产品的需求一致,不许缺

货,产品整批存入仓库.试确定经济批量及一年最小存货总费用.

12. 某药店常年经销某类药品,年销售量300箱,每箱进货价800元.如果考虑按平均库存量占用资金,该资金每年应付贷款利率为7.5%.为了保证供应,要有计划地进货,假设销售量是均匀的,每批进货量相同.已知每进一批货需要手续费50元,而库存费为每箱每年10元.因此,库存总费用由三部分构成:进货费、库存费和货款利息.试问:

(1) 分别表示这三部分的费用;

(2) 求总费用 C 与进货批量之间的函数关系;

(3) 经济批量是多少?

13. 某电子设备企业正常情况下可在一周内以单价450元卖出电子手环1000只.经过市场调查该公司发现,当手环价格每降低10元,则每周内的销量将增加100只.

(1) 试将价格 P 表示成销量 q 的函数;

(2) 当折扣达到多大时,该公司一周内手环的销售收入将达到最大?

(3) 假设该公司手环的每周成本函数为 $C(q)=68000+150q$,则当折扣达到多大时,能使公司的利润达到最大?

14. 证明方程 $x^3+x-1=0$ 有且有一个正实根.

15. 求下列各曲线的凹凸区间与拐点.

(1) $y=x\ln x$; (2) $y=x+\dfrac{1}{x}$;

(3) $y=a-\sqrt[3]{x-b}$(a,b 为常数); (4) $y=x\mathrm{e}^{-x}$.

16. 求下列各曲线的渐近线.

(1) $y=\dfrac{1}{x^2+x-2}$; (2) $y=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$;

(3) $y=\dfrac{2^x}{x^2-x-2}$; (4) $y=x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$;

(5) $y=\dfrac{x^3-x}{x^2-6x+5}$; (6) $y=\dfrac{3x^2+2}{1-x^2}$.

17. 研究下列各函数的性态并描绘其图形.

(1) $y=2x^3-6x-2$; (2) $y=\dfrac{x}{1+x^2}$;

(3) $y=x^2+\dfrac{1}{x}$; (4) $y=x+\mathrm{e}^{-x}$.

大展身手

18. 求下列各题的极限.

(1) $\lim\limits_{x\to0^+}\ln x\cdot\ln(1+x)$; (2) $\lim\limits_{x\to0^+}x^{\sin x}$;

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{e}^{\sin x}-\sin x-1}{x\sin x}$; (4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\sin x+2\cos x-2}{x^2-x^2\cos x}$;

(5) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\mathrm{e}^x-1}\right)$.

19. 设函数 $f(x)=\dfrac{e^x-1}{x}$，当 $x\to 0$ 时，$f(x)-\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 是 ax^k 的等价无穷小，求常数 a,k 的值.

20. 已知　$f(x)=\begin{cases}x+2 & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$，$g(x)=\begin{cases}x+1 & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$，试证明：

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=1$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=2$，并请解释此结论与洛必达法则是否矛盾？为什么？

21. 证明方程 $e\ln x-x+e=0$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内有且仅有两个实根.

22. 从一块半径为 R 的圆铁皮上剪去一个扇形，将剩余的部分做成一个圆锥形漏斗，当剪去的扇形的圆心角 θ 多大时，才能使所做成的漏斗容积最大？

23. 一渔船停泊在距海岸 9 km 处，假定海岸线是直线，今派人从船上送信给距船 $3\sqrt{34}$ km 处的海岸渔站，如果送信人步行速度为 5 km/h，船速为 4 km/h，问送信人应在何处登岸再步行才可使到达渔站的时间最短？

24. 已知一等腰三角形内接于一个半径为 r 的圆中，求此等腰三角形面积的最大值.

25. 一圆柱体内接于一个高为 h、底面半径为 r 的圆锥体中，求此圆柱体的体积的最大值.

26. 求证曲线 $y=x\sin x$ 的所有拐点都在曲线 $y^2(4+x^2)=4x^2$ 上.

27. 已知函数 $f(x)$ 的图形如图 2-21 所示，试根据图形求下列极限：

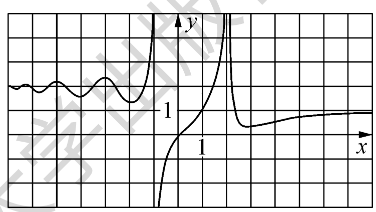


图 2-21

(1) $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$；　(2) $\lim\limits_{x\to -1^-}f(x)$；　(3) $\lim\limits_{x\to -1^+}f(x)$；

(4) $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)$；　(5) $\lim\limits_{x\to -\infty}f(x)$.

并写出此曲线的水平和铅直渐近线方程.

28. 已知一曲线有两条铅直渐近线 $x=1$ 和 $x=3$，有一条水平渐近线 $y=1$，试写出满足上述条件的一个函数的表达式.

29. 证明：一个三次多项式函数永远只有一个拐点. 若此多项式函数的图形与 x 轴有三个不同的交点，它们的横坐标分布为 x_1,x_2,x_3，则拐点的横坐标一定为 $\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}$.

30. 证明下列不等式.

(1) $\ln(1+x)-\dfrac{\arctan x}{1+x}\geqslant 0, x\in[0,+\infty)$；

(2) $\cos x-1+\dfrac{x^2}{2}>0, x\in[0,+\infty)$；

(3) 当 $x>0$ 时，$\sin x+\cos x>1+x-x^2$.

第六节 导数在经济分析中的应用

应用案例

已知某商品的需求函数为 $Q=100-\frac{1}{4}p^2$，当 $p=10$ 时，若价格上涨 1%，需求如何变化，变化的幅度大约是多大？

利用导数不仅可以解决经济领域中的某些最值问题，如最大利润、最小成本等等，还可以分析经济函数的因变量相对于自变量的变化快慢问题，以及分析和解释一些经济现象，为经营管理者做出合理的、科学的决策提供可靠的定量依据. 下面介绍导数在经济分析中的两种基本应用——边际分析和弹性分析.

一、边际及其经济意义

在经济学中，经常使用平均变化率和瞬时变化率的概念. 平均变化率是指函数的增量与自变量的增量之比，如年产量的平均变化率、成本的平均变化率、利润的平均变化率等. 瞬时变化率是指当自变量增量趋于零时平均变化率的极限，即函数对自变量的导数.

如果函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，则在 $(x_0,x_0+\Delta x)$ 内的平均变化率为 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$，在点 x_0 处的瞬时变化率为

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0).$$

在经济学中将其称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的边际函数值.

当自变量在点 x_0 处增量为一个单位，即 $\Delta x=1$ 时，因变量的增量为 $\Delta y\Big|_{\substack{x=x_0\\ \Delta x=1}}$，当 Δx 很小时，由微分的应用可知 Δy 的近似值为

$$\Delta y\Big|_{\substack{x=x_0\\ \Delta x=1}}\approx \mathrm{d}y\Big|_{\substack{x=x_0\\ \Delta x=1}}=f'(x_0).$$

这说明 $y=f(x)$ 在点 x_0 处，当自变量 x 增加一个单位时，y 近似改变 $f'(x_0)$ 个单位. 在经济学中解释边际函数值的具体意义时常略去“近似”二字，于是有如下定义：

定义 2.6.1 如果经济函数 $y=f(x)$ 可导，则称导数 $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的边际函数；函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 称为函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处的边际函数值，即当自变量 x 在 x_0 处增加一个单位时，函数 $y=f(x)$ 相应的改变量为 $f'(x_0)$ 个单位.

根据不同的经济函数，边际函数有不同的称呼，如边际成本、边际收益、边际利润、边际产值、边际效用、边际需求、边际消费等.

利用导数研究经济变量的边际变化的方法，称为边际分析.

1. 边际成本

定义 2.6.2　设某产品生产 q 个单位时,总成本为 $C(q)$,且 $C(q)$ 为可导函数,则总成本函数 $C(q)$ 对生产量 q 的导数

$$C'(q)=\lim_{\Delta q\to 0}\frac{C(q+\Delta q)-C(q)}{\Delta q},$$

称为边际成本:记为 MC.

边际成本的经济意义为:当生产量为 q 个单位时,再多生产一个单位的产品 $(\Delta q=1)$,总成本将近似增加 MC 个单位(通常略去“近似”二字).

一般情况下,总成本分为固定成本 C_1 和可变成本 $C_2(Q)$ 两部分,即

$$C(Q)=C_1+C_2(Q),$$

而边际成本为

$$C'(Q)=C'_2(Q),$$

由此可见,边际成本与固定成本无关.

2. 边际收益

定义 2.6.3　设销售某产品 q 个单位时总收入为 $R=R(q)$,且 $R(q)$ 为可导函数,则总收入函数 $R(q)$ 对销售量 q 的导数

$$R'(q)=\lim_{\Delta q\to 0}\frac{R(q+\Delta q)-R(q)}{\Delta q},$$

称为边际收益,记为 MR.

边际收入的经济意义为:当销售量为 q 个单位时,再多销售一个单位的产品时,收入将近似增加 MR 个单位(通常略去“近似”二字).

3. 边际利润

定义 2.6.4　设销售某种产品 q 个单位时,总利润为 $L=L(q)$,且 $L(q)$ 为可导函数,则总利润函数 $L(q)$ 对销售量 q 的导数

$$L'(q)=\lim_{\Delta q\to 0}\frac{L(q+\Delta q)-L(q)}{\Delta q},$$

称为边际利润,记为 ML.

由于总利润等于总收入与总成本之差,即有

$$L(q)=R(q)-C(q),$$

因此

$$L'(q)=R'(q)-C'(q).$$

即边际利润等于边际收入与边际成本之差.

边际利润的经济意义为:当销售量为 q 个单位时,再多销售一个单位的产品,总利润将近似增加或减少 ML 个单位(通常略去“近似”二字).

4. 边际需求

定义 2.6.5　设需求函数 $Q=Q(p)$,p 为价格,则需求量 Q 对价格 p 的导数 $Q'(p)$ 称

为边际需求.

边际需求的经济意义为：当价格为 p 时，价格再增加一个单位，则需求量将增加或减少大约 $Q'(p)$ 个单位.

小试牛刀

例 2.6.1 设某种产品的生产量为 q 时，总成本为

$$C(q)=1200+\frac{q^2}{20}.$$

试求：

（1）生产 120 个单位时的总成本、平均成本；

（2）生产 120 个单位到 130 个单位的总成本的平均变化率；

（3）生产 120 个单位时的边际成本，并解释其经济意义.

解(1)生产 120 个单位时的总成本为

$$C(120)=1200+\frac{120^2}{20}=1920,$$

生产 120 个单位时的平均成本为

$$\bar{C}(120)=\frac{1920}{120}=16.$$

（2）生产 120 个单位到 130 个单位的总成本的平均变化率为

$$\frac{\Delta C}{\Delta Q}=\frac{C(130)-C(120)}{130-120}=\frac{2045-1920}{10}=12.5.$$

（3）边际成本函数为

$$C'(q)=\frac{q}{10},$$

于是，生产 120 个单位时的边际成本为

$$C'(120)=\frac{120}{10}=12.$$

其经济意义是：当生产量为 120 个单位时，再多生产一个单位的产品时，需增加总成本约 12 个单位.

大展身手

例 2.6.2 某企业每月生产 q 吨产品的总成本为 $C(q)=40+111q-7q^2+\frac{1}{3}q^3$（万元），总收益为 $R(q)=100q-q^2$（万元），试求：

（1）利润函数与边际利润；

（2）当产量 $q=10,11,12$ 吨时的边际收益、边际成本和边际利润，并说明边际利润的经济意义.

解　(1) 总利润函数为

$$L(q)=R(q)-C(q)=-\frac{1}{3}q^3+6q^2-11q-40.$$

边际收益函数为：$R'(q)=100-2q$；

边际成本函数为：$C'(q)=q^2-14q+111$；

边际利润函数为：$L'(q)=-q^2+12q-11$.

(2) 当 $q=10$ 吨时，$R'(10)=80$，$C'(10)=71$，$L'(10)=9$；

当 $q=11$ 吨时，$R'(11)=78$，$C'(11)=78$，$L'(11)=0$；

当 $q=12$ 吨时，$R'(12)=76$，$C'(12)=87$，$L'(12)=-11$.

因此，当产量为 10 吨时，边际收益为 80 万元，边际成本为 71 万元，边际利润为 9 万元；

当产量为 11 吨时，边际收益为 78 万元，边际成本为 78 万元，边际利润为 0 万元；

当产量为 12 吨时，边际收入为 76 万元，边际成本为 87 万元，边际利润为 −11 万元.

由此可知，当产量为 10 吨时，再多生产 1 吨，总利润将增加 9 万元；当产量为 11 吨时，再增加产量，总利润将不会增加；当产量为 12 吨时，再多生产 1 吨，总利润将减少 11 万元.

二、弹性及其经济意义

1. 弹性的概念

在经济分析中，不仅需要研究经济量的绝对变化情况，而且还要研究它们的相对变化情况.

例如，有甲、乙两种商品，甲商品的销售单价为 20 元，乙商品的销售单价为 100 元. 如果这两种商品的销售单价都上涨了 10 元，从价格的绝对变化量来看，它们是完全一致的.

但如果甲商品的上涨幅度为 50%，而乙商品的上涨幅度为 10%，人们对这两种商品涨价的心理感受就是不一样的. 显然甲商品的涨幅比乙商品的涨幅要大得多，对于甲商品的涨价人们很难接受. 究其原因，这就是相对变化量的问题.

上例所涉及的就是函数的相对变化量和相对变化率的问题.

定义 2.6.6　设函数 $y=f(x)$，称 $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$ 为函数在点 x 处的绝对改变量，Δx 为自变量在点 x 处的绝对改变量，$\frac{\Delta y}{y}$ 称为函数在点 x 处的相对改变量，$\frac{\Delta x}{x}$ 称为自变量在点 x 处的相对改变量.

定义 2.6.7　设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，$y_0=f(x_0)$，如果极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{\Delta y}{y_0}}{\dfrac{\Delta x}{x_0}}$$

存在，则称此极限为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的相对变化率，也称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的弹性，记为 $\left.\frac{Ey}{Ex}\right|_{x=x_0}$.

由弹性的定义知

$$\left.\frac{Ey}{Ex}\right|_{x=x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y/y_0}{\Delta x/x_0}=\frac{x_0}{y_0}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{x_0}{y_0}f'(x_0).$$

对于任意点 x，若函数 $y=f(x)$ 可导，且 $f(x)\neq 0$，则有

$$\frac{Ey}{Ex}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y/y}{\Delta x/x}=\frac{x}{y}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{x}{y}f'(x),$$

称为函数 $y=f(x)$ 的弹性函数，简称弹性.

函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的弹性就是弹性函数在点 x_0 处的函数值.

函数 $y=f(x)$ 在点 x 处的弹性 $\frac{Ey}{Ex}$ 反映了在点 x 处，函数 $f(x)$ 的相对变化量 $\frac{\Delta y}{y}$ 与自变量 x 的相对变化量 $\frac{\Delta x}{x}$ 的比率. 也就是说随着 x 的变化，函数 $f(x)$ 的相对变化幅度大小，即函数 $f(x)$ 对 x 变化的反应强烈程度或灵敏度.

在数值上 $\frac{Ey}{Ex}$ 表示函数 $f(x)$ 在任意点 x 处，当自变量发生 1%的改变时，函数 $f(x)$ 近似地改变 $\frac{Ey}{Ex}$ %. 在应用问题中解释弹性的具体意义时，通常略去“近似”二字.

2. 需求弹性

定义 2.6.8 设某种商品的需求量为 Q，价格为 p，需求函数为 $Q=Q(p)$，$Q(p)$ 为可导函数，则

$$\lim_{\Delta P\to 0}\frac{\Delta Q/Q}{\Delta p/p}=\frac{p}{Q}\cdot\lim_{\Delta p\to 0}\frac{\Delta Q}{\Delta p}=\frac{p\cdot Q'(p)}{Q},$$

称为该商品的需求价格弹性，简称需求弹性，记为 E_p，即

$$E_p=\frac{p}{Q}\cdot Q'(p).$$

一般情况下，需求函数 $Q=Q(p)$ 为递减函数，即价格升高，需求量会下降，因此，需求弹性 E_p 一般为负值.

由需求弹性的定义可得

$$E_p=\frac{p}{Q}\cdot\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}p}=\frac{\mathrm{d}Q/Q}{\mathrm{d}p/p}\approx\frac{\Delta Q/Q}{\Delta p/p},$$

于是

$$\frac{\Delta Q}{Q}\approx E_p\cdot\frac{\Delta p}{p}.$$

由此可知，需求价格弹性的经济意义为：当价格为 p 时，若价格提高或降低 1%，则需求量将近似减少或增加 $|E_p|$ %(通常略去“近似”二字). 因此，需求弹性 E_p 反映了当价格 p 发生变动时，需求量 Q 的变动对价格变动的灵敏度.

需求弹性一般分为以下三类：

(1) 当 $E_p<-1$ 时，称为高弹性(或富有弹性). 当商品的价格变动 1%时，需求量的变动大于 1%，此时，商品需求量的相对变化量大于价格的相对变化量，即价格的变动对需求量的影响较大.

(2) 当 $E_p=-1$ 时，称为单位弹性.当商品的价格增加(减少)1%时，需求量相应地减少(增加)1%，此时，商品需求量的相对变化量等于价格的相对变化量，即需求量与价格变动的百分比相等.

(3) 当 $-1<E_p<0$ 时，称为低弹性(或缺乏弹性).这时，当商品的价格变动 1%时，需求量的变动小于 1%，此时，商品需求量的相对变化量小于价格的相对变化量，即价格的变动对需求量的影响较小.

在商品经济中，商品经营者关心的是提价 ($\Delta p>0$) 或降价 ($\Delta p<0$) 对总收益的影响.下面我们利用弹性的概念来分析需求弹性与总收益之间的关系.

设总收益为 $R=Q\cdot p$(Q 为销售量，p 为价格)，当价格 p 有微小变化($|\Delta p|$ 很小)时，

$$\Delta R\approx \mathrm{d}R=\mathrm{d}(pQ)=Q\mathrm{d}p+p\mathrm{d}Q=\left(1+\frac{p\mathrm{d}Q}{Q\mathrm{d}p}\right)Q\mathrm{d}p,$$

即

$$\Delta R\approx(1+E_p)Q\mathrm{d}p.$$

由 $E_p<0$ 可知，$E_p=-|E_p|$，于是

$$\Delta R\approx(1-|E_p|)Q\mathrm{d}P\approx(1-|E_p|)Q\Delta P.$$

由此可知，当 $E_p<-1$(高弹性)时，适当降低价格 ($\Delta p<0$) 会使需求量增加，从而使总收益增加 ($\Delta R>0$)；提高价格 ($\Delta p>0$) 会使总收益减少 ($\Delta R<0$). 因此，对于高弹性商品可以采取薄利多销的经济策略.

当 $E_p=-1$(单位弹性)时，无论提价还是降价，总收益的变化都近似于 0($\Delta R\approx 0$)，即无论提价还是降价对总收益都没有明显的影响.

当 $-1<E_p<0$(低弹性)时，适当提高价格 ($\Delta p>0$) 后，需求量不会有太大的下降，从而可以增加总收益；降低价格 ($\Delta p<0$) 会使总收益减少 ($\Delta R<0$).

小试牛刀

例 2.6.3　设某商品的需求函数为 $Q=12\mathrm{e}^{-\frac{p}{3}}$，求当 $p=6$ 时的需求弹性并解释其经济意义.

解　$E_p=\dfrac{p}{Q}\cdot Q'=\dfrac{p}{12\mathrm{e}^{-\frac{p}{3}}}\cdot(-4\mathrm{e}^{-\frac{p}{3}})=-\dfrac{p}{3}.$

当 $p=6$ 时，$E_p|_{p=6}=-2$.

经济意义为：当 $p=6$ 时，需求量的变化幅度大于价格的变化幅度，即当 $p=6$ 时，如果价格上涨 1%，则需求量将减少 2%；如果价格下降 1%，则需求量将增加 2%.

现在我们来解决本节开始的【应用案例】：$E_p=\dfrac{p}{Q}\cdot Q'=\dfrac{p\cdot\left(-\dfrac{p}{2}\right)}{100-\dfrac{1}{4}p^2}=\dfrac{-2p^2}{400-p^2}$，当 $p=10$ 时，$E_p=\dfrac{-200}{400-100}=-\dfrac{2}{3}$，所以，当价格上涨 1%时，需求量下降大约 0.67%.

大展身手

例 2.6.4 某商品的需求函数为 $Q=80-p^2$(Q 为需求量，p 为价格).

(1) 求 $p=4$ 时的边际需求，并说明其经济意义；

(2) 求 $p=4$ 时的需求弹性，并说明其经济意义；

(3) 当 $p=4$ 时，若价格 p 上涨 1%，总收益将变动多少？是增加还是减少？

(4) 当 $p=6$ 时，若价格 p 上涨 1%，总收益将变动多少？是增加还是减少？

解 (1) 由 $Q=80-p^2$ 可得 $Q'=-2p$，$p=4$ 时的边际需求为

$$Q'(4)=-2\times 4=-8.$$

其经济意义是：当 $p=4$ 时，价格上涨 1 个单位，总需求将下降 8 个单位.

(2) $E_p=\frac{p}{Q}\cdot Q'=\frac{p}{80-p^2}\cdot(-2p)=\frac{-2p^2}{80-p^2}$,

$$E_p\big|_{p=4}=-\frac{2\times 4^2}{80-4^2}=-0.5.$$

其经济意义是：当 $p=4$ 时，若价格上涨 1%，总需求将下降 0.5%.

(3) 总收益应为需求量与价格的乘积，即

$$R(p)=(80-p^2)p=80p-p^3,$$

于是，边际收益为 $R'(p)=80-3p^2$,

$$R'(4)=80-3\times 4^2=32,$$

收益弹性为

$$\frac{ER}{Ep}=\frac{p}{R}\cdot R'(p)=\frac{p}{80p-p^3}\cdot(80-3p^2)=\frac{80-3p^2}{80-p^2},$$

$$\left.\frac{ER}{Ep}\right|_{p=4}=\frac{80-3\times 4^2}{80-4^2}=0.5.$$

因此，当 $p=4$ 时，若价格上升 1%，总收益将增加 0.5%.

(4) $\left.\frac{ER}{Ep}\right|_{p=6}=\frac{80-3\times 6^2}{80-6^2}\approx -0.64.$

因此，当 $p=6$ 时，若价格上升 1%，总收益将下降 0.64%.

例 2.6.4 说明，边际和弹性都是研究经济函数变化率的问题. 但是，边际是从绝对量变化的角度去研究需求函数(或总收益函数)的变化率，表示价格增加一个单位，需求量(或总收益)将增加或减少多少个绝对量；而弹性则是从相对量变化的角度去研究需求函数(或总收益函数)的变化率(称为相对变化率)，表示价格变动 1%，需求量(或总收益)将变动 $\frac{EQ}{Ep}\%\left(\text{或}\frac{ER}{Ep}\%\right)$. 另外，边际和弹性都是考虑在某一点时的瞬间变化情况，都是局部性的概念，而不是对整个变化过程的研究.

习题 2.6

小试牛刀

1. 已知生产某产品 q 件的成本为 $C(q)=9000+40q+0.001q^2$（元），试求：

（1）边际成本函数；

（2）产量为 1000 件时的边际成本，并解释其经济意义；

（3）产量为多少件时，平均成本最小？

2. 设某种产品的需求函数为 $Q=1000-100p$（p 为价格），试求：

（1）当需求量 $Q=300$ 时的总收入和平均收入；

（2）当需求量 $Q=300$ 时的边际需求、边际收入，并说明其经济意义.

3. 设某产品的需求函数为 $P=80-0.1q$，（P 为价格，q 为需求量），成本函数为 $C=5000+20q$（元）. 试求：

（1）边际利润函数 $L'(q)$；

（2）当 $q=150$ 和 $q=400$ 时的边际利润，并说明其经济意义；

（3）需求量 q 为多少时，其利润最大？

4. 某种商品的需求量 Q 与价格 p 的关系为：$Q=1600\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^p$，试求：

（1）需求弹性函数 $\frac{EQ}{Ep}$；

（2）当价格 $p=10$ 时的需求弹性，说明其经济意义.

5. 设某种商品的销售量 Q 与价格 p 的函数为：$Q(p)=300p-2p^2$，分别求价格 $p=50$ 及 $p=120$ 时，销售量对价格 p 的弹性，并说明其经济意义.

6. 设商品的需求函数为 $Q=12-\frac{p}{2}$，试求：

（1）需求弹性函数；

（2）当 $p=6$ 时的需求弹性；

（3）在 $p=6$ 时，若价格上涨 1%，总收益增加还是减少？将变化百分之几？

大展身手

7. 已知某个产品的成本函数为 $C(q)=0.5q^2+20q+3200$. 其中：成本 C（单位：千元），产量 q（单位：吨）. 求当产量为多少时，该产品的平均成本最小，并求出最小平均成本.

8. 某城市乘客对公交车票价需求的价格弹性为 -0.6；票价 1 元时，日乘客量为 55 万人. 为降低车厢内的拥挤程度、提高乘客的舒适度，公交车公司计划提价后，净减少的日乘客量控制在 10 万人，则新的票价应为多少？

9. 某商品代销，拟用降价的方法扩大销路，若该产品需求弹性在 $-2\sim-1.5$ 之间，试问当降价 10% 时，销售量能增加多少？

本章结构图

- 导数与微分
  - 导数
    - 概念
      - 定义
      - 几何意义
      - 经济意义
    - 运算
      - 四则运算法则
      - 反函数求导法则
      - 复合函数求导法则
    - 应用
      - 洛必达法则
      - 单调性判定
      - 极值与最值求法
      - 凹凸性判定与拐点求法
      - 渐近线求法与函数作图
      - 导数在经济上的应用
  - 微分
    - 概念
      - 定义
      - 几何意义
    - 运算
      - 四则运算法则
      - 复合函数的微分法则
    - 应用
      - 在近似计算中的应用

趣味阅读(二)

数学江湖——洛必达法则不是洛必达发现的

我们在本章学习了求极限的一种新方法——洛必达法则，它本应该是以发现者的名字命名的，可是这个法则中提到的洛必达却并不是这个法则的发现者，这是怎么回事呢？下面我们来讲一讲其中的故事.

我们先来介绍一下洛必达先生.洛必达(1661—1704)出生在法国贵族家庭，他在军队中当过军官，对数学非常痴迷，甚至到了废寝忘食的地步.可惜洛必达的数学才能，远远不及他对数学的热情，无论他如何努力，始终无法在数学上有重大发现.

这个时候另一个重量级的人物登场了，他就是洛必达的老师——瑞士著名数学家

约翰·伯努利(1667—1748).除了洛必达这个学生之外,他还有一个特别有名的学生——欧拉,欧拉可是十八世纪最有名的数学家.另外,约翰·伯努利的哥哥、约翰·伯努利的三个儿子也都是赫赫有名的数学家,他们家祖孙三代甚至出了八个数学家,你说神奇不神奇?

就在洛必达为自己在数学上不能有所成就而苦闷不已的时候,刚刚结婚且经济比较拮据的约翰·伯努利来到了法国,洛必达就拜到约翰·伯努利的门下跟他学习,值得一提的是洛必达为此所支付的薪酬是约翰·伯努利工资的两倍.当然洛必达也迫切地想要搞出点名堂,那就必须仰仗他的老师了.于是,在1695年的一天,洛必达给他的老师约翰·伯努利写了一封信,信中的内容大致为:“我希望你在才智上帮助我,我也在财富上帮助你,我将每年给你300里弗尔,并外加200里弗尔作为给我辅导的额外报酬,我要求你从现在起,定期给我一些你近期的研究成果和发现,但是你不能告诉其他任何人,我还会不断地增加报酬.”因为洛必达确实有钱,而当时伯努利也正缺钱,他们之间达成了一个君子协定:约翰·伯努利同意把自己在数学方面的发现寄给洛必达,洛必达可以按照自己的愿望使用.因此,约翰·伯努利就寄给洛必达一些近期的数学成果和发现,洛必达法则正是其中之一.

洛必达法则的横空出世轰动了整个数学界,大家也纷纷地开始夸赞洛必达:洛必达不只是自己深刻理解了当时已有的微积分的知识,他还愿意把这些成果公之于众.虽然他的数学素养没有知名的数学家那么高,但他还是在短短的一生中出了两本著作:《无穷小分析》和《论圆锥曲线的分析》.《无穷小分析》是第一本以印刷品形式出版的微积分教科书,1696年在巴黎出版,这本著作在18世纪的大部分时间处于支配地位.

洛必达是个人品不错的人,他在《无穷小分析》的前言中,非常聪明地写道:“本书的许多结果都得益于约翰·伯努利和莱布尼兹,如果他们需要来认领书中的任何结果,我都不否认.”约翰·伯努利毕竟是收了人家重金的,哪还好意思去认领这些成果,只能眼睁睁看着这些成果归在洛必达名下.可惜的是,在洛必达法则发表后不久,洛必达就因病去世.就在这之后不久,约翰·伯努利才把当初洛必达写给自己的那封信公布出来,企图认领那个重要的洛必达法则,可人们哪还会承认.不过现在学术界还是公认这个定理是约翰·伯努利发现,但归属人是洛必达,毕竟洛必达才是第一发表人.

其实,数学史上还有好多类似的事情,定理名字中出现的数学家可能并不是该定理的第一发现者.约翰·伯努利和泰勒之间还有泰勒级数是不是剽窃伯努利级数的争论,但是,在这之前,格雷戈里很久之前就知道了一般的泰勒级数.麦克劳林级数是麦克劳林在《论流数》里给出的,可惜他不知道,泰勒早在《正反增量法》里给出了更一般的泰勒级数.克莱姆发布了用行列式解方程组的克莱姆法则,可他不知道的是,麦克劳林在《论代数》里早就给出了这个结果,所以,如果以最早发现者命名的话,好多著名的数学定理都要改名.

当然,在当今社会,国家提出“大众创业,万众创新”,以此推动国家产业创新升级,希望所有的科研人员踏实工作,埋头苦干,勇于创新,而不是投机取巧,甚至做出抄袭剽窃别人成果的事情.如果那样做的话,必将受到道德的谴责、纪律法规的处罚,得不偿失,自取其辱!

单元测试二(基础题)

一、选择题(每题 2 分,共 20 分)

1. 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 存在,则 $f'(x_0)$ 等于(　　).

A. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+2\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

B. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0)-f(x_0-2\Delta x)}{2\Delta x}$

C. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+2\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}$

D. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-2\Delta x)-f(x_0)}{2\Delta x}$

2. 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处不可导,那么曲线 $f(x)$ 在点 x_0 处(　　).

A. 一定没有切线

B. 一定有切线

C. 一定有垂直于 x 轴的切线

D. 不一定有切线

3. 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续是它在该点可导的(　　).

A. 充分非必要条件

B. 必要非充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不是充分条件也不是必要条件

4. 下列运算正确的是(　　).

A. $f'(1)=[f(1)]'=0$

B. $[\cos(1-x)]'=\sin(1-x)$

C. $(\ln\sqrt{1-x^2})'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}(\sqrt{1-x^2})'=\dfrac{1}{2(1-x^2)}$

D. $[\arctan(1-x)]'=\dfrac{(1-x)'}{1+x^2}=-\dfrac{1}{1+x^2}$

5. 下列等式成立的是(　　).

A. $\mathrm{d}(\mathrm{e}^{\sin x})=\mathrm{e}^{\sin x}\mathrm{d}(\sin x)$　　B. $\mathrm{d}(\sqrt{x})=\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$

C. $\mathrm{d}[\ln(1+x^2)]=\dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$　　D. $\mathrm{d}(\tan 3x)=(\sec^2 3x)\mathrm{d}x$

6. 在定义域内为单调函数的是(　　).

A. $y=x-\ln(1+x^2)$　　B. $y=x-\mathrm{e}^x$

C. $y=x^2+3x$　　D. $y=\sin x+\cos x$

7. 函数 $f(x)$ 在 x_0 取得极大值,则必有(　　).

A. $f'(x_0)=0$　　B. $f'(x_0)$不存在

C. $f'(x_0)=0, f''(x_0)<0$　　D. $f'(x_0)=0$ 或 $f'(x_0)$ 不存在

8. 设函数 $f(x)$ 在$[1,2]$上可导，$f'(x)<0$，则 $f(x)$ 在$(1,2)$上(　　).

A. 至少有两个零点　　B. 有且仅有一个零点

C. 没有零点　　D. 零点个数不能确定

9. 设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处有 $f'(x_0)=0$，在 x_1 处 $f'(x_1)$ 不存在，则(　　).

A. $x=x_0$ 与 $x=x_1$ 必定都是极值点

B. 只有 $x=x_0$ 是极值点

C. $x=x_0$ 与 $x=x_1$ 至少有一个是极值点

D. x_0 与 x_1 都可能不是极值点

10. 下列求极限问题中能够使用洛必达法则的是(　　).

A. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{\sin x}$　　B. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{1-\sin x}$

C. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x\sin x}$　　D. $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x\right)$

二、填空题(每空 2 分，共 24 分)

11. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{\arctan x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$，则 $f'(0)=$________.

12. 已知函数 $y=x^2$，自变量 x 由 1 变化到 0.98，则 $\Delta y=$________，Δy 的近似值为________.

13. $\mathrm{d}e^{\cos x^2}=e^{\cos x^2}\mathrm{d}(\quad)=(\quad)\mathrm{d}x^2=(\quad)\mathrm{d}x$.

14. 设 $y=e^{-x}$，则 $y^{(n)}=$________________.

15. 函数 $y=\ln(1+x^2)$ 的单调增区间是________，单调减区间是____________.

16. $f(x)=5x+\cos 3x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调递________.

17. $y=x^3-3x^2+7$ 的极大值点为________，极大值为________.

三、计算题(每题 5 分，共 25 分)

18. 已知 $y=e^{2x}(\sin x+\cos x)+e^{-5}$，求 $y'|_{x=0}$.

19. 已知 $y=x\arctan x-\ln\sqrt{1+x^2}$，求 $\mathrm{d}y$.

20. 已知方程 $y^2+2\ln y=x^4$ 确定函数 $y=f(x)$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

21. $\begin{cases}x=t^3+t\\ y=2t+t^2\end{cases}$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

22. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^x}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$.

四、证明题(本题 6 分)

23. 求证曲线 $xy=1(x>0,y>0)$ 上任一点处的切线与两坐标轴所围成的三角形面积为定值.

五、应用题(每题8分,共16分)

24. 一房地产公司有50套公寓要出租.当月租金定为1000元时全部租出去.当月租金每增加50元时,就会多一套租不出去,而租出去的公寓每月需花费100元的维修费.试问房租定为多少可获得最大收入?

25. 设生产 q 万台产品的成本为 $C(q)=1+\frac{1}{4}q^2$,收益为 $R(q)=3\sqrt{q}$,试求能使利润达到最大的生产量.

六、求单调区间、极值或最值(本题9分)

26. 求函数 $y=x^4-8x^2+2$ 在区间 $[-1,3]$ 上的最大、小值.

单元测试二(提升题)

一、选择题(每题2分,共24分)

1. 设函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导,则有(　　).

A. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(-x)}{x}=f'(0)$　　B. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(2x)-f(3x)}{x}=f'(0)$

C. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(-x)-f(0)}{x}=f'(0)$　　D. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(2x)-f(x)}{x}=f'(0)$

2. 设 $f(x)=x(x-1)(x-2)\cdots(x-100)$,则 $f'(0)$ 等于(　　).

A. -100　　B. 0　　C. 100　　D. $100!$

3. 函数 $y=|x|+1$ 在 $x=0$ 处(　　).

A. 无定义　　B. 不连续

C. 可导　　D. 连续但不可导

4. 若 $f(x)=\begin{cases}x^2-1 & 0\leqslant x\leqslant 1\\ ax+b & 1<x\leqslant 2\end{cases}$,在 $x=1$ 处可导,则 a,b 的值为(　　).

A. $a=2,b=-2$　　B. $a=-2,b=2$

C. $a=2,b=2$　　D. $a=-2,b=-2$

5. 设函数 $f(x)=\varphi\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$,其中 $\varphi(x)$ 为可导函数,且 $\varphi'(1)=3$,则 $f'(0)$ 等于(　　).

A. -6　　B. 6　　C. -3　　D. 3

6. 下列函数在指定区间上满足拉格朗日中值定理条件的是(　　).

A. $y=\cot x,\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$　　B. $y=\frac{1}{x^2},[0,1]$

C. $y=\frac{x^2-1}{x-1},[0,2]$　　D. $y=\ln x,[1,\mathrm{e}]$

7. 下列说法正确的是(　　).

A. 函数的驻点一定是极值点　　B. 函数的极值点一定是驻点

C. 函数的极大值必大于极小值　　D. 极值点只能在定义区间的内部取得

8. 若函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导,且 $f(0)<0,f'(x)>0$,则方程 $f(x)=0$ 在 $[0,+\infty)$ 上(　　).

A. 有唯一的根　　B. 至少有一个根

C. 没有根　　D. 不能确定有根

9. 曲线 $y=\dfrac{4x-1}{(x-2)^2}$ (　　).

A. 只有水平渐近线　　B. 只有铅直渐近线

C. 没有渐近线　　D. 既有水平渐近线又有铅直渐近线

10. 曲线 $y=(x-1)^2(x-2)^2$ 的拐点个数为(　　).

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

11. 设 $f(x)$ 为连续函数,则 $f'(x_0)=0$ 是 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极值的(　　).

A. 充分条件　　B. 必要条件

C. 充分必要条件　　D. 非充分非必要条件

12. 曲线 $y=\dfrac{x^2-6x+8}{x^2+4x}$ 的渐近线共有(　　).

A. 1 条　　B. 2 条　　C. 3 条　　D. 4 条

二、填空题(每空 2 分,共 22 分)

13. 若 $f(x)=\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}$, 则 $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=$________.

14. 设 $y=x^{\sqrt{x}}(x>0)$, 则 $y'=$________.

15. 曲线 $\begin{cases}x=t\mathrm{e}^t\\ y=1-\mathrm{e}^t\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 处的切线方程为________.

16. 设 $y=\ln(x+1)$, 若 $y^{(n)}\big|_{x=0}=2018!$, 则 $n=$________.

17. $\ln 1.01$ 的近似值为________.

18. 在曲线 $y=2x^2-x+1$ 上求一点 P, 使过此点的切线平行于连接曲线上的点 $A(-1,4)$, $B(3,16)$ 所成的弦,则点 P 的坐标是________.

19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}-2}{1-\cos x}=$________.

20. 函数 $y=f(x)$ 是 x 的三次函数,其图形关于原点对称,且当 $x=\dfrac{1}{2}$ 时,有极小值 -1, 则 $f(x)=$________.

21. 曲线 $y=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1$ 水平渐近线为________,垂直渐近线为________.

22. 曲线 $y=3x^4+4x^3-6x^2-12x$ 的凸区间为________.

三、计算题(每题 5 分,共 25 分)

23. 已知 $y=\sqrt{1+x^2}+\ln\cos(3x^2+1)+\mathrm{e}^2$, 求 y'.

24. 设 $y=y(x)$ 由方程 $\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^y=\sin(xy)$ 确定,求 $y'\big|_{x=0}$ 和 $\mathrm{d}y$.

25. 已知 $y=\ln(1+2x)$, 求 $y^{(n)}$.

26. 求由方程 $\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$ 所确定的函数 $y=y(x)$ 的二阶导数 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

27. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x-2^x}{\sin 6x}$.

四、证明与解答题(每题 10 分,共 20 分)

28. 已知函数 $f(x)=ax^4+bx^3$ 在点 $x=3$ 处取得极值 -27,试求:

(1) 常数 a,b 的值;(2) 曲线 $y=f(x)$ 的凹凸区间与拐点;(3) 曲线 $y=\dfrac{1}{f(x)}$ 的渐近线.

29. 证明:当 $0<x<2$ 时,$\mathrm{e}^x<\dfrac{2+x}{2-x}$.

五、应用题(本题 9 分)

30. 已知某公司生产的某种电器的需求弹性在 1.5～3.5 之间,如果该公司计划在下一年度内将价格降低 10%,试问这种电器的销售量将会增加多少?总收入将会增加多少?

第三章　一元函数积分学

扫码可见本章教学资源
（含微课、自测题及课后参考答案）

> 微积分是一种语言，它使我们能够描述和理解连续变化的现象.
>
> ——亨利・勒贝格

数学故事

在法国的一个葡萄园里，酿酒师皮埃尔遇到了一个难题：他的葡萄酒桶形状独特，中间宽、两端窄，如何计算它的容量呢？皮埃尔知道，如果能找到桶的横截面积随高度的变化规律，就能解决这个问题.

他仔细观察了桶的形状，发现横截面积的变化可以用一个函数描述.于是，皮埃尔想到：如果能找到一个函数，它的变化率正好是横截面积，那么这个函数就能表示桶在不同高度处的累积体积.这就是不定积分的思想——通过已知的变化率，找到累积量的函数.

接下来，皮埃尔进一步思考：如果知道了体积函数，如何计算整个桶的总容量呢？他意识到，只需要计算体积函数在桶的高度范围内的变化量即可.这就是定积分的应用——通过累积量的函数，求出总量.

通过这种方法，皮埃尔成功计算出了葡萄酒桶的容量，解决了他的难题.这说明，积分不仅是一种数学工具，更是理解变化与累积关系的钥匙.

积分是微积分学的另一个重要概念，在科学技术和经济管理等领域有着广泛的应用.一元函数积分学包括不定积分和定积分两个部分.不定积分主要解决已知某个函数的导数（或微分）求这个函数的问题，是求导数（或微分）的逆运算，定积分则主要解决求平面图形的面积、立体的体积、变速直线运动的路程和经济函数的总量等问题.本章将从导数（或微分）的逆运算入手，介绍不定积分的概念、性质和计算方法.在研究曲边梯形的面积、非均匀变化的收益总量等问题的基础上，介绍定积分的概念、性质和计算方法，不定积分与定积分的关系及定积分在几何问题和经济问题中的应用.

学习目标

1. 理解原函数、不定积分和定积分的概念，掌握不定积分和定积分的性质.
2. 熟练掌握不定积分的基本积分公式和直接积分法、换元积分法、分部积分法.
3. 理解积分上限函数，掌握其求导方法.熟练掌握牛顿-莱布尼茨公式.
4. 掌握定积分的换元积分法和分部积分法.

5. 了解反常积分及其敛散性的概念，会计算无穷限反常积分.

6. 熟练掌握用定积分表达和计算平面图形的面积的方法.

7. 能解决由边际函数求出总需求、总成本、总利润等经济应用问题.

8. 能理解积分与微分之间的互逆关系，提升辩证思维能力.

第一节　不定积分的概念与性质

微分学主要研究求已知函数的导数(或微分)的问题，但是，在科学技术和经济问题中，经常需要解决与求导数(或微分)相反的问题.

应用案例

新型智能手表以其多功能集成和健康监测能力，成为现代人生活中不可或缺的智能助手，不仅提升了生活效率，还推动了健康管理理念的普及. 一家电子产品制造公司正在对智能手表进行市场调研，已知该产品的边际收益函数为 $100-2q$ (元/千块)，其中 q 表示生产的智能手表数量，且当产量为 0 时，总收益为 0 元. 求产品的总收益函数.

设总收益函数为 $R(q)$，由导数的经济意义可知，边际收益 $R'(q)=100-2q$，那么该问题的实质就是导数的逆运算问题.

一、原函数与不定积分

1. 原函数的概念

定义 3.1.1　设 $f(x)$ 是定义在区间 I 内的已知函数，若存在函数 $F(x)$，使得对任意的 $x\in I$，都有

$$F'(x)=f(x) \text{ 或 } \mathrm{d}F(x)=f(x)\mathrm{d}x,$$

则称函数 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在区间 I 上的一个**原函数**.

例如，因为在 $(-\infty,+\infty)$ 内有 $\left(\frac{1}{3}x^3+1\right)'=x^2$，所以 $\frac{1}{3}x^3+1$ 是 x^2 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的一个原函数.

又如，因为在 $(-\infty,+\infty)$ 内有 $(\sin x)'=\cos x$，所以 $\sin x$ 是 $\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的一个原函数.

再如，因为在 $(-1,1)$ 内有 $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，所以 $\arcsin x$ 是 $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 在 $(-1,1)$ 上的一个原函数.

定理 3.1.1(原函数存在定理)　如果函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续，那么 $f(x)$ 在区间 I 上一定有原函数，即存在区间 I 上的可导函数 $F(x)$，使得对任意的 $x\in I$，有 $F'(x)=f(x)$.

小提示

由定理 3.1.1 可知，由于初等函数在其定义区间上都是连续的，所以初等函数在其定义区间上都有原函数.

定理 3.1.2　如果函数 $F(x)$ 是函数 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数，则 $F(x)+C$ 也是 $f(x)$ 的原函数（C 为任意常数），且 $f(x)$ 在该区间 I 上的任意原函数与 $F(x)$ 只相差一个常数.

证明　若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 I 上的原函数，则对任意的 $x\in I$，都有 $F'(x)=f(x)$，从而对任意的常数 C，显然也有 $[F(x)+C]'=f(x)$，即对任意的常数 C，$F(x)+C$（C 为任意常数）也为 $f(x)$ 的原函数.

设 $G(x)$ 是 $f(x)$ 在 I 上的另一原函数，则对任意的 $x\in I$，都有

$$[G(x)-F(x)]'=G'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0,$$

由推论 2.4.1 可知，$G(x)-F(x)$ 在区间 I 上恒为常数，即

$$G(x)-F(x)=C_0\,(C_0\text{ 为某个常数}).$$

这表明 $G(x)$ 与 $F(x)$ 只相差一个常数.

小智囊

$f(x)$ 在该区间 I 上的所有原函数都可以表示成 $F(x)+C$（C 为任意常数）的形式.

2. 不定积分的概念

定义 3.1.2　设 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数，那么 $f(x)$ 在区间 I 上的所有原函数 $F(x)+C$（C 为任意常数）称为 $f(x)$ 在区间 I 上的**不定积分**，记作 $\int f(x)\mathrm{d}x$，即

$$\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C.$$

其中符号 $\int$ 称为积分号，$f(x)$ 称为被积函数，$f(x)\mathrm{d}x$ 称为被积表达式，x 称为积分变量，C 称为积分常数.

小试牛刀

例 3.1.1　求下列不定积分.

(1) $\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$；　(2) $\int \sin x\,\mathrm{d}x$；

(3) $\int 3x^2\mathrm{d}x$；　(4) $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$.

解　(1) 因为 $(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$，即 e^x 是 e^x 的一个原函数，所以

$$\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+C.$$

(2) 因为 $(-\cos x)'=\sin x$，即 $-\cos x$ 是 $\sin x$ 的一个原函数，所以

$$\int \sin x\,\mathrm{d}x=-\cos x+C.$$

(3) 因为 $(x^3)'=3x^2$，即 x^3 是 $3x^2$ 的一个原函数，所以

$$\int 3x^2\,\mathrm{d}x=x^3+C.$$

(4) 因为 $(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$，即 $\arctan x$ 是 $\dfrac{1}{1+x^2}$ 的一个原函数，所以

$$\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\arctan x+C.$$

小智囊

由定义 3.1.2 可知，要求一个函数的不定积分，只要求出它的一个原函数，再加上任意常数 C 即可.

例 3.1.2 求【应用案例】中智能手表的总收益函数.

解 设总收益函数为 $R(q)$，那么边际收益函数为 $R'(q)=100-2q$.

因为 $(100q-q^2)'=100-2q$，即 $100q-q^2$ 是 $100-2q$ 的一个原函数，所以

$$R(q)=\int(100-2q)\mathrm{d}q=100q-q^2+C.$$

由 $R(0)=0$，得 $C=0$.

于是所求总收益函数为 $R(q)=100q-q^2$.

大展身手

例 3.1.3 证明：不定积分 $\int \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|+C$.

解 被积函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 的定义域为 $\{x\mid x\neq 0\}$.

当 $x>0$ 时，$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$；而当 $x<0$ 时，$[\ln(-x)]'=\dfrac{1}{-x}(-1)=\dfrac{1}{x}$，所以

$$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|+C\,(C\text{ 为任意常数}).$$

二、不定积分的性质

性质 3.1.1 求原函数(或不定积分)的运算与求导数(或微分)的运算是互逆的，即

$$\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]'=f(x)\quad 或\quad \mathrm{d}\int f(x)\mathrm{d}x=f(x)\mathrm{d}x.$$

$$\int f'(x)\mathrm{d}x=f(x)+C \quad 或 \quad \int \mathrm{d}f(x)=f(x)+C.$$

小提示

对一个函数先积分再求导数，结果是两者的作用相互抵消；若先求导数再积分，则两者的作用也相互抵消，但结果要相差一个积分常数.

大展身手

例 3.1.4　(1) 已知 $f(x)=\mathrm{e}^x\arctan x$，求 $\int f'(x)\mathrm{d}x$ 和 $\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]'$.

(2) 已知 $\arctan x$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，求 $f(x)$ 和 $\int f(x)\mathrm{d}x$，$\int f'(x)\mathrm{d}x$.

解　(1) $\int f'(x)\mathrm{d}x=f(x)+C=\mathrm{e}^x\arctan x+C$.

$\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]'=f(x)=\mathrm{e}^x\arctan x$.

(2) 因为 $\arctan x$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，所以

$$f(x)=(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2},\int f(x)\mathrm{d}x=\arctan x+C,$$

$$\int f'(x)\mathrm{d}x=f(x)+C=\frac{1}{1+x^2}+C.$$

三、不定积分的几何意义

在直角坐标系 xOy 中，$f(x)$ 的任意一个原函数 $F(x)$ 的图形称为 $f(x)$ 的一条积分曲线，其方程是 $y=F(x)$，则 $f(x)$ 的不定积分 $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$ 表示一函数族. 函数族的图形称为 $f(x)$ 的积分曲线族（如图 3－1 所示）.

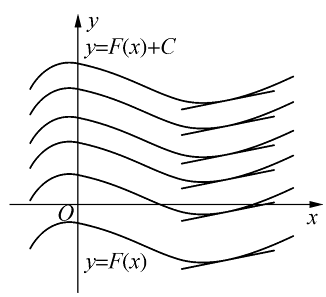


图 3－1

积分曲线族中的任意一条曲线都可以由曲线 $y=F(x)$ 沿 y 轴平移一段 C 得到，因此，所有积分曲线是彼此平行的. 也就是说，在积分曲线族上横坐标相同的点 x 处作切线，这些切线都是彼此平行的，其斜率都是 $f(x)$，即有

$$[F(x)+C]'=F'(x)=f(x).$$

因此，不定积分 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 在几何上表示 $f(x)$ 的积分曲线族. 这族曲线的特点是在横坐标相同点处，它们的切线有相同的斜率 $f(x)$，因此，它们是彼此平行的.

四、基本积分公式

由定义 3.1.2 可知求不定积分是求导数(或微分)的逆运算，因此，根据基本初等函数的

导数公式可以直接得到相应的基本积分公式如表 3 - 1 所示.

表 3 - 1

基本初等函数的导数公式	基本积分公式
(1) $(kx)'=k$(k 为常数)	(1) $\int k\,dx=kx+C$(k 为常数)
(2) $(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}$	(2) $\int x^{\alpha}dx=\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C(\alpha\neq-1)$
(3) $(\ln x)'=\frac{1}{x}$	(3) $\int\frac{1}{x}dx=\ln\|x\|+C$
(4) $(e^x)'=e^x$	(4) $\int e^x dx=e^x+C$
(5) $(a^x)'=a^x\ln a$	(5) $\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$($a>0$ 且 $a\neq1$)
(6) $(\cos x)'=-\sin x$	(6) $\int\sin x\,dx=-\cos x+C$
(7) $(\sin x)'=\cos x$	(7) $\int\cos x\,dx=\sin x+C$
(8) $(\tan x)'=\sec^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$	(8) $\int\sec^2 x\,dx=\int\frac{1}{\cos^2 x}dx=\tan x+C$
(9) $(\cot x)'=-\csc^2 x$	(9) $\int\frac{1}{\sin^2 x}dx=\int\csc^2 x\,dx=-\cot x+C$
(10) $(\sec x)'=\sec x\tan x$	(10) $\int\sec x\cdot\tan x\,dx=\sec x+C$
(11) $(\csc x)'=-\csc x\cot x$	(11) $\int\csc x\cdot\cot x\,dx=-\csc x+C$
(12) $(\arcsin x)'=(-\arccos x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	(12) $\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\arcsin x+C=-\arccos x+C$
(13) $(\arctan x)'=(-\operatorname{arccot} x)'=\frac{1}{1+x^2}$	(13) $\int\frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x+C=-\operatorname{arccot} x+C$

以上基本积分公式是求不定积分的基础,必须熟记、会用.对于基本积分公式(2)有以下几种特殊情形,在以后会经常用到,有必要单独记忆.

当 $\alpha=-\frac{1}{2}$ 时,$\int\frac{1}{\sqrt{x}}dx=2\sqrt{x}+C$;当 $\alpha=-2$ 时,$\int\frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{x}+C$.

习题 3.1

小试牛刀

1. (1) 证明 $f_1(x)=\arctan x$；$f_2(x)=\arctan x+C$(C 为常数)；$f_3(x)=-\operatorname{arccot} x$ 都是函数 $\dfrac{1}{1+x^2}$ 的原函数.

(2) 证明 $f_1(x)=\ln x$；$f_2(x)=\ln(ax)$($a>0$ 为常数)；$f_3(x)=\ln x+C$(C 为常数)都是同一个函数的原函数.

2. 在下列括号和横线上填入适当的函数.

(1) 因为(　　)$'=1$，所以 $\int 1\mathrm{d}x=$__________；

(2) 因为(　　)$'=\cos x$，所以 $\int \cos x\mathrm{d}x=$__________.

3. 设 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数，且 $f(x)$ 可导，则下列等式正确的是(　　).

A. $\int \mathrm{d}F(x)=f(x)+C$　　B. $\int \mathrm{d}f(x)=F(x)+C$

C. $\int F(x)\mathrm{d}x=f(x)+C$　　D. $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$

4. 求下列函数的不定积分.

(1) $\int \sin x\mathrm{d}x$；　　(2) $\int 2^x\mathrm{d}x$；

(3) $\int 5x^4\mathrm{d}x$；　　(4) $\int \sqrt{x}\mathrm{d}x$；

(5) $\int \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x$；　　(6) $\int \dfrac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

5. 下列括号上填入适当的函数.

(1) $(\int \sin^2 x\mathrm{d}x)'=$__________；　　(2) $\mathrm{d}(\int \cos x\mathrm{d}x)=$__________；

(3) $\int (\sin^2 x)'\mathrm{d}x=$__________；　　(4) $\int \mathrm{d}\cos x=$________.

6. 判断下列等式是否正确，若错误，则说明理由：

(1) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\int f(x)\mathrm{d}x)=f(x)$. (　　)　　(2) $\int g'(x)\mathrm{d}x=g(x)$. (　　)

(3) $\mathrm{d}(\int g(x)\mathrm{d}x)=g(x)$. (　　)　　(4) $\int \mathrm{d}\cos x=\sin x+C$. (　　)

7. 已知生产某产品 q 单位时的边际收益为 $25-2q$ (元/单位)，且产品产量为 0 时，总收益为 0 元，求总收益函数.

大展身手

8\. 已知 $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^4-x^2+C$，则 $f(x)=$（　　）.

A. $2x^3-2x$　　B. $2x^3-2x+C$　　C. x^3-x　　D. x^4-2x

9\. 若 $f(x)$ 的一个原函数为 $\cos x$，则 $\int f'(x)\mathrm{d}x=$（　　）.

10\. 若 $f(x)$ 的一个原函数为 $\sin 2x$，则 $f'(x)=$（　　）.

A. $2\cos 2x$　　B. $-\frac{1}{2}\cos 2x$　　C. $-2\sin 2x$　　D. $-4\sin 2x$

11\. 假设某产品的边际收益函数为 $R'(q)=9-q$（万元/万台），边际成本函数为 $C'(q)=4+\frac{q}{4}$（万元/万台），其中产量 q 以万台为单位. 已知固定成本为 1 万元，求总成本函数 $C(q)$ 和利润函数 $L(q)$.

第二节　不定积分的计算

应用案例

某环保科技公司研发了一款新型可降解环保袋，旨在替代传统塑料制品以减少环境污染. 在生产过程中，公司需要精确核算生产成本以制定合理的市场定价策略. 已知该环保袋的边际成本函数为 $C'(q)=5\mathrm{e}^{0.2q}$（其中 q 为产品数量，单位：千个），固定成本 $C(0)=90$，求该环保袋的总成本函数 $C(q)$.

为了解决该问题，我们介绍直接积分法.

一、直接积分法

不定积分的基本运算法则：

法则 3.2.1　设函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 的原函数存在，则

$$\int[f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}x\pm\int g(x)\mathrm{d}x.$$

小提示

法则 3.2.1 可推广到有限多个函数的情形，即

$$\int[f_1(x)\pm f_2(x)\pm\cdots\pm f_n(x)]\mathrm{d}x=\int f_1(x)\mathrm{d}x\pm\int f_2(x)\mathrm{d}x\pm\cdots\pm\int f_n(x)\mathrm{d}x.$$

法则 3.2.1 亦称为**分项积分法**.

法则 3.2.2　设函数 $f(x)$ 的原函数存在，k 为非零常数，则

$$\int kf(x)\mathrm{d}x=k\int f(x)\mathrm{d}x.$$

小智囊

由法则 3.2.1 和法则 3.2.2，得：

$\int[k_1f(x)+k_2g(x)]\mathrm{d}x=k_1\int f(x)\mathrm{d}x+k_2\int g(x)\mathrm{d}x$，$k_1,k_2$ 不同时为 0.

利用基本积分公式和基本运算法则计算积分的方法称为直接积分法.

小试牛刀

例 3.2.1　求下列不定积分.

(1) $\int\left(2^x-x^2+2\sin x-\dfrac{3}{x}\right)\mathrm{d}x$；　(2) $\int\sqrt{x}(x^2-5)\mathrm{d}x$；　(3) $\int\dfrac{x+\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x}}\mathrm{d}x$.

解　(1)

$$\begin{aligned}&\int\left(2^x-x^2+2\sin x-\frac{3}{x}\right)\mathrm{d}x\\&=\int 2^x\mathrm{d}x-\int x^2\mathrm{d}x+2\int\sin x\mathrm{d}x-3\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x\\&=\frac{2^x}{\ln 2}+C_1-\left(\frac{1}{3}x^3+C_2\right)+2(-\cos x+C_3)-3(\ln|x|+C_4)\\&=\frac{2^x}{\ln 2}-\frac{1}{3}x^3-2\cos x-3\ln|x|+(C_1-C_2+2C_3-3C_4)\\&=\frac{2^x}{\ln 2}-\frac{1}{3}x^3-2\cos x-3\ln|x|+C.\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\int\sqrt{x}(x^2-5)\mathrm{d}x&=\int(\sqrt{x}\cdot x^2-5\sqrt{x})\mathrm{d}x\\&=\int x^{\frac{5}{2}}\mathrm{d}x-5\int x^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\\&=\frac{2}{7}x^3\sqrt{x}-\frac{10}{3}x\sqrt{x}+C.\end{aligned}$$

(3)

$$\int\frac{x+\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x}}\mathrm{d}x=\int\left(x^{\frac{3}{4}}+x^{\frac{1}{4}}-x^{\frac{1}{12}}\right)\mathrm{d}x=\frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}}+\frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}}-\frac{12}{13}x^{\frac{13}{12}}+C.$$

小提示

(1) 在分项积分时，不必每一个积分结果都要"$+C$"，只需在最后加上一个 C 即可.

(2) 经常需要将被积函数的乘积形式转化为代数和的形式，以便适用直接积分法.

例 3.2.2 求不定积分 $\int \frac{1}{1-\sin^2 x}\mathrm{d}x$.

解 $\int \frac{1}{1-\sin^2 x}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \int \sec^2 x\,\mathrm{d}x = \tan x + C$.

小提示

有时需要对被积函数进行适当的恒等变形,以便适用基本积分公式.

大展身手

例 3.2.3 求下列不定积分.

(1) $\int \frac{x^4}{1+x^2}\mathrm{d}x$. (2) $\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}\mathrm{d}x$. (3) $\int \tan^2 x\,\mathrm{d}x$. (4) $\int \frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

解 (1) $\int \frac{x^4}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int \frac{(x^4-1)+1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int \left(x^2-1+\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3 - x + \arctan x + C$.

(2) $\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}\mathrm{d}x = \int \frac{(1+x^2)+x^2}{x^2(1+x^2)}\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x = -\frac{1}{x} + \arctan x + C$.

(3) $\int \tan^2 x\,\mathrm{d}x = \int (\sec^2 x - 1)\mathrm{d}x = \tan x - x + C$.

(4) $\int \frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}\mathrm{d}x = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x}\right)\mathrm{d}x$

$= \int (\sec^2 x + \csc^2 x)\mathrm{d}x = \tan x - \cot x + C$.

二、第一换元积分法

利用直接积分法所能求出的不定积分是非常有限的,比如 $\int \cos 2x\,\mathrm{d}x$, $\int x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x$ 等,都不能用直接积分法求出. 因此,我们需要进一步掌握其他的积分法.

定理 3.2.1(第一换元积分法) 若 $\int f(u)\mathrm{d}u = F(u) + C$,且函数 $u=\varphi(x)$ 可导,则有

$$\int f[\varphi(x)]\mathrm{d}\varphi(x) = F[\varphi(x)] + C. \tag{3-1}$$

证明 由微分定义知 $\mathrm{d}\varphi(x) = \varphi'(x)\mathrm{d}x$.

(3-1)式左端可化为 $\int f[\varphi(x)]\mathrm{d}\varphi(x) = \int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x$. (3-2)

由复合函数求导公式,有

$$[F(\varphi(x))]' = F'_u(u)\cdot u'_x(x) = f(u)\cdot\varphi'(x) = f[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x),$$

所以 $\int f[\varphi(x)]\mathrm{d}\varphi(x) = F[\varphi(x)] + C$.

事实上,在用该定理解决问题的过程中往往首先将问题转化为(3-1)左端的形式,然后

再用定理.

即

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x=\int f[\varphi(x)]\mathrm{d}\varphi(x)=F[\varphi(x)]+C.$$

这就涉及将 $\varphi'(x)\mathrm{d}x$ 表示成 $\mathrm{d}\varphi(x)$ 的形式，这就是所谓的凑微分，所以第一换元积分法又称为**凑微分法.**

利用凑微分法求不定积分的步骤可用如下式子表示

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x \xRightarrow{(1)\text{ 凑微分}} \int f[\varphi(x)]\mathrm{d}\varphi(x) \xRightarrow{(2)\text{ 换元 }\varphi(x)=u} \int f(u)\mathrm{d}u$$
$$\xRightarrow{(3)\text{ 求出积分}} F(u)+C \xRightarrow{(4)\text{ 回代变量 }u=\varphi(x)} F[\varphi(x)]+C.$$

例如
$$\int 2\cos 2x\,\mathrm{d}x=\int\cos 2x\cdot 2\mathrm{d}x=\int\cos 2x\,\mathrm{d}(2x)=\int\cos u\,\mathrm{d}u$$
$$=\sin u+C=\sin 2x+C.$$

一般基本积分公式和运算比较熟练后，可以不必写出(2)(3)两步替换过程. 例如上例解题过程可以写为 $\int 2\cos 2x\,\mathrm{d}x=\int\cos 2x\cdot 2\mathrm{d}x=\int\cos 2x\,\mathrm{d}(2x)=\sin 2x+C.$

下面以几个常见的凑微分公式为例，介绍如何用凑微分法求解不定积分.

1. $\mathbf{d}x=\dfrac{1}{k}\mathbf{d}(kx+b)\ (k\neq 0)$

小试牛刀

例 3.2.4　求下列不定积分.

(1) $\int\cos(3x+5)\mathrm{d}x$；　(2) $\int\dfrac{1}{3+2x}\mathrm{d}x$；　(3) $\int\sqrt{3x-1}\,\mathrm{d}x$.

解　(1) $\int\cos(3x+5)\mathrm{d}x=\int\cos(3x+5)\cdot\dfrac{1}{3}\mathrm{d}(3x+5)=\dfrac{1}{3}\int\cos(3x+5)\mathrm{d}(3x+5)$
$$=\frac{1}{3}\sin(3x+5)+C.$$

(2) $\int\dfrac{1}{3+2x}\mathrm{d}x=\int\dfrac{1}{3+2x}\cdot\dfrac{1}{2}\mathrm{d}(3+2x)=\dfrac{1}{2}\int\dfrac{1}{3+2x}\mathrm{d}(3+2x)=\dfrac{1}{2}\ln|3+2x|+C.$

(3) $\int\sqrt{3x-1}\,\mathrm{d}x=\int\sqrt{3x-1}\cdot\dfrac{1}{3}\mathrm{d}(3x-1)=\dfrac{1}{3}\int(3x-1)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}(3x-1)$
$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}(3x-1)^{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{9}(3x-1)^{\frac{3}{2}}+C.$$

大展身手

例 3.2.5　求下列不定积分.

(1) $\int\cos^2 x\,\mathrm{d}x$；　(2) $\int\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x\,(a>0)$；　(3) $\int\dfrac{1}{a^2+x^2}\mathrm{d}x$；　(4) $\int\dfrac{1}{x^2-a^2}\mathrm{d}x$.

解 (1) $\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\int 1\mathrm{d}x + \int \cos 2x\,\mathrm{d}x\right) = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C.$

(2) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}\mathrm{d}\left(\frac{x}{a}\right) = \arcsin\frac{x}{a} + C.$

(3) $\int \frac{1}{a^2 + x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\mathrm{d}\left(\frac{x}{a}\right)$

$$= \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C.$$

(4) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right)\mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{2a}\left[\int \frac{1}{x-a}\mathrm{d}(x-a) - \int \frac{1}{x+a}\mathrm{d}(x+a)\right]$$

$$= \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$$

小提示

例 3.2.5(2)(3)(4)中的不定积分亦可在表 3-1 中查询.

例 3.2.6 求【应用案例】中环保袋的总成本函数.

解 因为 $C'(q) = 5\mathrm{e}^{0.2q}$，所以

$$C(q) = \int C'(q)\mathrm{d}q = \int 5\mathrm{e}^{0.2q}\mathrm{d}q = 25\int \mathrm{e}^{0.2q}\mathrm{d}(0.2q) = 25\mathrm{e}^{0.2q} + C.$$

又 $C(0) = 90$，所以 $C = 65$.

于是所求总成本函数是 $C(q) = 25\mathrm{e}^{0.2q} + 65(q \geqslant 0)$.

小智囊

由 $\mathrm{d}x = \frac{1}{k}\mathrm{d}(kx+b)$ 可以推广为 $\mathrm{d}\varphi(x) = \frac{1}{k}\mathrm{d}[k\varphi(x)+b](k \neq 0)$.

2. $x^{\alpha}\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha+1}\mathrm{d}(x^{\alpha+1}+C)(\alpha \neq -1)$

小试牛刀

例 3.2.7 求下列不定积分.

(1) $\int x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x$；(2) $\int \frac{x^2}{4+x^3}\mathrm{d}x$；(3) $\int \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}-2}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$；(4) $\int \frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}\mathrm{d}x$.

解 (1) $\int x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x^2 = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2} + C.$

(2) $\int \frac{x^2}{4+x^3}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \frac{1}{4+x^3}\mathrm{d}(4+x^3) = \frac{1}{3}\ln|4+x^3|+C.$

(3) $\int \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}-2}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^{\sqrt{x}-2}\cdot 2\mathrm{d}(\sqrt{x}-2) = 2\int \mathrm{e}^{\sqrt{x}-2}\mathrm{d}(\sqrt{x}-2) = 2\mathrm{e}^{\sqrt{x}-2}+C.$

(4) $\int \frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}\mathrm{d}x = -\int \cos\frac{1}{x}\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right) = -\sin\frac{1}{x}+C.$

大展身手

例 3.2.8　求下列不定积分.

(1) $\int \frac{x^2}{(1+2x^3)^2}\mathrm{d}x$；　　(2) $\int \frac{\cos(3\sqrt{x}+5)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

解　(1)
$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{(1+2x^3)^2}\mathrm{d}x &= \frac{1}{3}\int \frac{1}{(1+2x^3)^2}\mathrm{d}(x^3)\\ &= \frac{1}{6}\int \frac{1}{(1+2x^3)^2}\mathrm{d}(1+2x^3)\\ &= -\frac{1}{6(1+2x^3)}+C.\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}\int \frac{\cos(3\sqrt{x}+5)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x &= 2\int \cos(3\sqrt{x}+5)\mathrm{d}\sqrt{x}\\ &= 2\cdot\frac{1}{3}\int \cos(3\sqrt{x}+5)\mathrm{d}(3\sqrt{x}+5)\\ &= \frac{2}{3}\sin(3\sqrt{x}+5)+C.\end{aligned}$$

3. $\frac{1}{x}\mathrm{d}x = \mathrm{d}(\ln x + C)$，$\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \mathrm{d}(\mathrm{e}^x + C)$

小试牛刀

例 3.2.9　求下列不定积分.

(1) $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}\mathrm{d}x$；　(2) $\int \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}}\mathrm{d}x$.

解　(1)
$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}\mathrm{d}x &= \int \sqrt{1+\ln x}\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x = \int \sqrt{1+\ln x}\,\mathrm{d}(1+\ln x)\\ &= \int (1+\ln x)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}(1+\ln x) = \frac{2}{3}(1+\ln x)^{\frac{3}{2}}+C.\end{aligned}$$

(2) $\int \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{1+(\mathrm{e}^x)^2}\mathrm{d}(\mathrm{e}^x) = \arctan \mathrm{e}^x + C.$

大展身手

例 3.2.10　求不定积分 $\int \frac{1}{x(1+2\ln x)}\mathrm{d}x$.

解　$\int \frac{1}{x(1+2\ln x)}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{1+2\ln x}\mathrm{d}\ln x$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+2\ln x}\mathrm{d}(1+2\ln x)=\frac{1}{2}\ln|1+2\ln x|+C.$$

4. $\cos x\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\sin x+C)$，$\sin x\,\mathrm{d}x=-\mathrm{d}(\cos x+C)$

小试牛刀

例 3.2.11 求下列不定积分.

(1) $\int\sin^2 x\cdot\cos x\,\mathrm{d}x$；　　(2) $\int\tan x\,\mathrm{d}x$.

解 (1) $\int\sin^2 x\cdot\cos x\,\mathrm{d}x=\int\sin^2 x\,\mathrm{d}\sin x=\frac{1}{3}\sin^3 x+C$.

(2) $$\int\tan x\,\mathrm{d}x=\int\frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\cos x}\cdot\sin x\,\mathrm{d}x$$

$$=-\int\frac{1}{\cos x}\mathrm{d}(\cos x)=-\ln|\cos x|+C.$$

大展身手

例 3.2.12 求下列不定积分.

(1) $\int\sec x\,\mathrm{d}x$；(2) $\int\sin^3 x\,\mathrm{d}x$；(3) $\int\sin^4 x\,\mathrm{d}x$；(4) $\int\sin^2 x\cos^5 x\,\mathrm{d}x$.

解 (1) 方法一

$$\int\sec x\,\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\cos x}\mathrm{d}x=\int\frac{\cos x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}\sin x}{1-\sin^2 x}$$

$$=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1-\sin x}+\frac{1}{1+\sin x}\right)\mathrm{d}\sin x=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|+C.$$

方法二

$$\int\sec x\,\mathrm{d}x=\int\sec x\cdot\frac{\sec x+\tan x}{\sec x+\tan x}\mathrm{d}x=\int\frac{(\sec x+\tan x)'}{\sec x+\tan x}\mathrm{d}x$$

$$=\int\frac{1}{\sec x+\tan x}\mathrm{d}(\sec x+\tan x)=\ln|\sec x+\tan x|+C.$$

类似可得到以下两个积分公式：

$$\int\cot x\,\mathrm{d}x=\ln|\sin x|+C,\int\csc x\,\mathrm{d}x=-\ln|\csc x+\cot x|+C.$$

小提示

方法一和方法二的答案形式是可以互相转化的，利用三角函数恒等式，可将它们统一起来.

小智囊

$$\int\frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x=\ln|f(x)|+C.$$

(2) $\int \sin^3 x\,dx = -\int \sin^2 x\,d\cos x = \int (\cos^2 x - 1)\,d\cos x = \frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + C.$

(3) $$\int \sin^4 x\,dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\left(\int 1\,dx - \int 2\cos 2x\,dx + \int \frac{1+\cos 4x}{2}dx\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left(x - \sin 2x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}\sin 4x\right) + C$$
$$= \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C.$$

(4) $$\int \sin^2 x\cos^5 x\,dx = \int \sin^2 x\cos^4 x\cos x\,dx = \int \sin^2 x(1-\sin^2 x)^2\,d(\sin x)$$
$$= \int (\sin^2 x - 2\sin^4 x + \sin^6 x)\,d(\sin x)$$
$$= \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{2}{5}\sin^5 x + \frac{1}{7}\sin^7 x + C.$$

小智囊

通过上述的例题，可以归纳出求形如 $\int \sin^n x\cos^m x\,dx$ 的积分的一般方法：

(1) 当 n,m 中有一个是奇数，可以拆开奇次项去凑微分；

(2) 当 n,m 均为偶数，先用倍角公式降次，再凑微分.

5. 有关反三角函数的凑微分

小试牛刀

例 3.2.13　求下列不定积分.

(1) $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$；　(2) $\int \frac{1}{(\arcsin x)^2\sqrt{1-x^2}}dx$；　(3) $\int \frac{10^{\arctan x}}{1+x^2}dx$.

解　(1) $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \arcsin x\,d(\arcsin x) = \frac{1}{2}(\arcsin x)^2 + C.$

(2) $\int \frac{1}{(\arcsin x)^2\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{1}{(\arcsin x)^2}d(\arcsin x) = -\frac{1}{\arcsin x} + C.$

(3) $\int \frac{10^{\arctan x}}{1+x^2}dx = \int 10^{\arctan x}\,d(\arctan x) = \frac{10^{\arctan x}}{\ln 10} + C.$

三、第二换元积分法

定理 3.2.2（第二换元法）　设 $x=\psi(t)$ 单调、可导，且 $\psi'(t)\neq 0$，又 $\int f[\psi(t)]\cdot\psi'(t)\,dt = G(t)+C$，则有换元公式

$$\int f(x)\,dx = \int f[\psi(t)]\,d\psi(t) = \int f[\psi(t)]\psi'(t)\,dt = G(t)+C = G[\psi^{-1}(x)]+C. \tag{3-3}$$

证明从略.

第一换元积分法是通过变量代换 $u=\varphi(x)$，将积分 $\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x$ 化为积分 $\int f(u)\mathrm{d}u$. 第二换元积分法是适当地选择变量代换 $x=\psi(t)$，将积分 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 化为积分 $\int f[\psi(t)]\psi'(t)\mathrm{d}t$. 第二换元积分法主要适用于被积函数含有根式等复杂表达式的情形.

1. 简单根式代换

小试牛刀

例 3.2.14 求下列不定积分.

(1) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x$； (2) $\int \frac{1}{x\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x$； (3) $\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x$.

解 (1) 令 $\sqrt{x}=t$，则 $x=t^2$，从而 $\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$.

于是 $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\int \frac{t}{1+t}\cdot 2t\mathrm{d}t$

$=2\int \frac{t^2-1+1}{1+t}\mathrm{d}t=2\int\left(t-1+\frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t=t^2-2t+2\ln|1+t|+C.$

换回原变量(也称回代变量)得

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x=x-2\sqrt{x}+2\ln|1+\sqrt{x}|+C.$$

(2) 令 $\sqrt{x+1}=t$，则 $x=t^2-1$，从而 $\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$. 于是有

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x=\int \frac{1}{(t^2-1)t}2t\mathrm{d}t=\int \frac{2}{(t-1)(t+1)}\mathrm{d}t=\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t$$

$$=\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=\ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right|+C.$$

(3) 被积函数中出现了两个根式 $\sqrt{x}$ 及 $\sqrt[3]{x}$，所设变量必须能将这两个根式同时化为有理式. 从而令 $t=\sqrt[6]{x}$，则 $x=t^6$，$\mathrm{d}x=6t^5\mathrm{d}t$，于是有

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x=\int \frac{6t^5}{t^3+t^2}\mathrm{d}t=6\int \frac{t^3}{1+t}\mathrm{d}t=6\int \frac{t^3+1-1}{t+1}\mathrm{d}t$$

$$=6\int\left(t^2-t+1-\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t=2t^3-3t^2+6t-6\ln|t+1|+C$$

$$=2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln(\sqrt[6]{x}+1)+C.$$

小智囊

当被积函数含根式 $\sqrt[m]{ax+b}$，$\sqrt[n]{ax+b}$ 时，令 $\sqrt[l]{ax+b}=t$（其中，l 为 m 和 n 的最小公倍数)，可同时消去两个根号，以便求解.

大展身手

例 3.2.15　求下列不定积分.

(1) $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}}\mathrm{d}x$；　　(2) $\displaystyle\int\frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}\mathrm{d}x$.

解　(1) 令 $\sqrt{1+\mathrm{e}^x}=t$，则 $x=\ln(t^2-1)$，从而 $\mathrm{d}x=\dfrac{2t}{t^2-1}\mathrm{d}t$. 于是有

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}}\mathrm{d}x&=\int\frac{1}{t}\cdot\frac{2t}{t^2-1}\mathrm{d}t=2\int\frac{1}{t^2-1}\mathrm{d}t=2\int\frac{1}{(t+1)(t-1)}\mathrm{d}t\\&=\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=\ln\frac{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}-1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}+1}+C\\&=\ln\frac{(\sqrt{1+\mathrm{e}^x}-1)(\sqrt{1+\mathrm{e}^x}-1)}{(\sqrt{1+\mathrm{e}^x}+1)(\sqrt{1+\mathrm{e}^x}-1)}+C\\&=\ln\frac{(\sqrt{1+\mathrm{e}^x}-1)^2}{\mathrm{e}^x}+C=2\ln(\sqrt{1+\mathrm{e}^x}-1)-x+C.\end{aligned}$$

(2) 令 $\sqrt{1+\ln x}=t$，则 $x=\mathrm{e}^{t^2-1}$，从而 $\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{t^2-1}\cdot 2t\,\mathrm{d}t$. 于是有

$$\begin{aligned}\int\frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}\mathrm{d}x&=\int\frac{t^2-1}{\mathrm{e}^{t^2-1}\cdot t}\cdot\mathrm{e}^{t^2-1}\cdot 2t\,\mathrm{d}t=2\int(t^2-1)\mathrm{d}t\\&=\frac{2}{3}t^3-2t+C=\frac{2}{3}(1+\ln x)^{\frac{3}{2}}-2(1+\ln x)^{\frac{1}{2}}+C.\end{aligned}$$

*2. 三角代换

大展身手

例 3.2.16　求下列不定积分.

(1) $\displaystyle\int\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x\,(a>0)$；(2) $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x\,(a>0)$；(3) $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\mathrm{d}x\,(a>0)$.

解　(1) 令 $x=a\sin t\left(-\dfrac{\pi}{2}\leqslant t\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$，则 $\sqrt{a^2-x^2}=a\cos t$，$\mathrm{d}x=a\cos t\,\mathrm{d}t$. 从而

$$\begin{aligned}\int\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x&=\int a\cos t\cdot a\cos t\,\mathrm{d}t=a^2\int\cos^2 t\,\mathrm{d}t\\&=a^2\int\frac{1+\cos 2t}{2}\mathrm{d}t=\frac{a^2}{2}t+\frac{a^2}{4}\sin 2t+C\\&=\frac{a^2}{2}(t+\sin t\cos t)+C.\end{aligned}$$

因为 $x=a\sin t$，所以 $t=\arcsin\dfrac{x}{a}$. 为了把 $\cos t$ 换成 x 的函数，根据变换 $\sin t=\dfrac{x}{a}$ 作辅助直角三角形（如图 3－2 所示）. 此时显然有

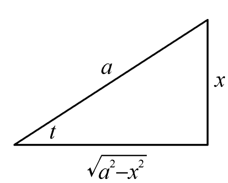


图 3－2

$\cos t=\dfrac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}$，所以

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

（2）令 $x=a\tan t\left(-\dfrac{\pi}{2}<t<\dfrac{\pi}{2}\right)$，则 $\sqrt{x^2+a^2}=a\sec t$，$\mathrm{d}x=a\sec^2 t\,\mathrm{d}t$.

从而
$$\begin{aligned}\int\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x&=\int\frac{1}{a\sec t}\cdot a\sec^2 t\,\mathrm{d}t=\int\sec t\,\mathrm{d}t\\&=\ln|\tan t+\sec t|+C_1\\&=\ln\left|\frac{x}{a}+\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}\right|+C_1\\&=\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|+C_1-\ln a\\&=\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|+C.\text{（其中 }C=C_1-\ln a\text{）}\end{aligned}$$

在上面的计算中，$\sec t=\dfrac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}$ 可根据变换 $\tan t=\dfrac{x}{a}$ 作辅助直角三角形而得到（如图 3－3 所示）.

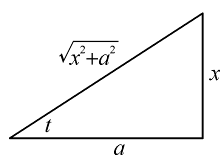


图 3－3

（3）当 $x>a$ 时，令 $x=a\sec t\left(0<t<\dfrac{\pi}{2}\right)$，则 $\mathrm{d}x=a\sec t\cdot\tan t\,\mathrm{d}t$.

从而
$$\begin{aligned}\int\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\mathrm{d}x&=\int\frac{a\sec t\cdot\tan t}{a\tan t}\mathrm{d}t=\int\sec t\,\mathrm{d}t=\ln|\sec t+\tan t|+C_1\\&=\ln\left|\frac{x}{a}+\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right|+C_1=\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C_1-\ln a\\&=\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C.\text{（其中 }C=C_1-\ln a\text{）}\end{aligned}$$

当 $x<-a$ 时，令 $x=a\sec t\left(\dfrac{\pi}{2}<t<\pi\right)$，则 $\mathrm{d}x=a\sec t\cdot\tan t\,\mathrm{d}t$. 从而

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\mathrm{d}x&=-\int\frac{a\sec t\cdot\tan t}{a\tan t}\mathrm{d}t=-\int\sec t\,\mathrm{d}t=-\ln|\sec t+\tan t|+C_2\\&=-\ln\left|\frac{x}{a}+\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right|+C_2=\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C_2-\ln a\\&=\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C.\text{（其中 }C=C_2-\ln a\text{）}\end{aligned}$$

综上，有 $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\mathrm{d}x=\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C.$

小智囊

(1) 当被积函数含因式 $\sqrt{a^2-x^2}$ 时，可作代换 $x=a\sin t\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$；

(2) 当被积函数含因式 $\sqrt{a^2+x^2}$ 时，可作代换 $x=a\tan t\left(-\frac{\pi}{2}< t<\frac{\pi}{2}\right)$；

(3) 当被积函数含因式 $\sqrt{x^2-a^2}$ 时，可作代换 $x=a\sec t\left(0< t<\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}< t<\pi\right)$.

*3. 倒代换 $x=\frac{1}{t}$

大展身手

例 3.2.17　求不定积分 $\int\frac{1}{x^2\sqrt{x^2+4}}\mathrm{d}x\,(x>0)$.

解　本题用三角代换，令 $x=2\tan t$，显然是可行的. 这里我们用另一种代换——倒代换.

令 $x=\frac{1}{t}$，则 $\mathrm{d}x=-\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$，从而

$$\int\frac{1}{x^2\sqrt{x^2+4}}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\frac{1}{t^2}\sqrt{\frac{1}{t^2}+4}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t=-\int\frac{t\,\mathrm{d}t}{\sqrt{1+4t^2}}$$

$$=-\frac{1}{8}\int\frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}\mathrm{d}(1+4t^2)=-\frac{1}{4}\sqrt{1+4t^2}+C$$

$$=-\frac{1}{4}\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}+C=-\frac{1}{4}\frac{\sqrt{x^2+4}}{x}+C.$$

四、分部积分法

利用直接积分法和换元积分法能计算大量的不定积分. 但对于如 $\int x\ln x\,\mathrm{d}x$，$\int x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$，$\int x\sin x\,\mathrm{d}x$ 此类的不定积分，利用直接积分法和换元积分法比较难以解决. 为了解决这类问题，我们介绍另一种求积分的方法——分部积分法. 它是利用“两个函数乘积的求导公式”推出的一种求不定积分的基本方法.

定理 3.2.3(分部积分法)　设 $u=u(x)$，$v=v(x)$ 具有连续导数，则有分部积分公式

$$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x=u(x)v(x)-\int v(x)u'(x)\mathrm{d}x. \qquad (3-4)$$

小提示

为了简便起见，也可把公式(3－4)写成下面的形式：

$$\int u\,\mathrm{d}v=uv-\int v\,\mathrm{d}u.$$

证明　因为 $u=u(x)$，$v=v(x)$ 具有连续导数，则由两个函数乘积的求导公式有 $(uv)'=u'v+uv'$，则 $uv'=(uv)'-u'v$，对此式两边分别积分，有 $\int uv'\mathrm{d}x=uv-\int u'v\mathrm{d}x$.

小试牛刀

例 3.2.18　求下列不定积分：

(1) $\int x\cos x\,\mathrm{d}x$；　　(2) $\int x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$；

(3) $\int x\ln x\,\mathrm{d}x$；　　(4) $\int x\arctan x\,\mathrm{d}x$.

解　(1) $\int x\cos x\,\mathrm{d}x=\int x\,\mathrm{d}\sin x=x\sin x-\int\sin x\,\mathrm{d}x=x\sin x+\cos x+C$.

(2) $\int x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=\int x\,\mathrm{d}\mathrm{e}^x=x\mathrm{e}^x-\int\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=x\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x+C$.

(3) $$\begin{aligned}\int x\ln x\,\mathrm{d}x&=\int\ln x\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}x^2\right)=\frac{1}{2}x^2\ln x-\int\frac{1}{2}x^2\,\mathrm{d}\ln x\\&=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{2}\int x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+C.\end{aligned}$$

(4) $$\begin{aligned}\int x\arctan x\,\mathrm{d}x&=\int\arctan x\,\mathrm{d}\left(\frac{x^2}{2}\right)=\frac{1}{2}x^2\cdot\arctan x-\int\frac{x^2}{2}\mathrm{d}\arctan x\\&=\frac{1}{2}x^2\cdot\arctan x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}x^2\arctan x-\frac{1}{2}(x-\arctan x)+C.\end{aligned}$$

小智囊

分部积分法“五字真言”：“反对幂三指”

对于以下五类基本初等函数：① 反三角函数　② 对数函数　③ 幂函数(或常数)　④ 三角函数　⑤ 指数函数(④和⑤的顺序可以交换)，在对它们的乘积使用分部积分法时，常将排在前面的函数选作 u，排在后面的函数选作 v'.

例如，例 3.2.18(4)中 $\int x\arctan x\,\mathrm{d}x$ 的被积函数是反三角函数与幂函数的乘积，按上述规律，在用分部积分法求此积分时，应选 $u=\arctan x$，$v'=x$.

大展身手

例 3.2.19　求下列不定积分.

(1) $\int e^x \cos x \, dx$；　　(2) $\int x^2 e^x \, dx$；

(3) $\int \sin(\ln x) \, dx$；　　(4) $\int \sec^3 x \, dx$.

解　(1) 方法一

$$\begin{aligned}\int e^x \cos x \, dx &= \int \cos x \, de^x \\ &= e^x \cos x - \int e^x \, d\cos x \\ &= e^x \cos x + \int e^x \sin x \, dx = e^x \cos x + \int \sin x \, de^x \\ &= e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \, d\sin x \\ &= e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx.\end{aligned}$$

移项得
$$\int e^x \cos x \, dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) + C.$$

方法二

$$\begin{aligned}\int e^x \cos x \, dx &= \int e^x \, d\sin x \\ &= e^x \sin x - \int \sin x \, de^x \\ &= e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx \\ &= e^x \sin x + \int e^x \, d\cos x \\ &= e^x \sin x + e^x \cos x - \int \cos x \, de^x \\ &= e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x \, dx.\end{aligned}$$

移项得
$$\int e^x \cos x \, dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) + C.$$

本例中被积函数是指数函数与正(余)弦函数的乘积，任选一种函数凑微分，经过一次分部积分，转化的积分难度没有变化，再继续使用一次分部积分后，会还原到原来的积分形式，只是系数发生了变化，这就是所谓的“积分重现”. 但是注意两次凑微分函数的选择要一致.

(2) $\int x^2 e^x \, dx = \int x^2 \, de^x = x^2 e^x - \int e^x \, dx^2 = x^2 e^x - 2\int x e^x \, dx$

$$= x^2 e^x - 2\int x \, de^x = x^2 e^x - 2\left(x e^x - \int e^x \, dx\right) = (x^2 - 2x + 2) e^x + C.$$

(3) $\int \sin(\ln x)\mathrm{d}x = x\sin(\ln x) - \int x\mathrm{d}\sin(\ln x)$

$$= x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)\mathrm{d}x$$

$$= x\sin(\ln x) - [x\cos(\ln x) - \int x\mathrm{d}\cos(\ln x)]$$

$$= x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x) - \int \sin(\ln x)\mathrm{d}x.$$

移项得 $\int \sin(\ln x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}[x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x)] + C.$

(4) $\int \sec^3 x\mathrm{d}x = \int \sec x \cdot \sec^2 x\mathrm{d}x = \int \sec x\mathrm{d}(\tan x)$

$$= \sec x\tan x - \int \tan x\mathrm{d}\sec x = \sec x\tan x - \int \tan^2 x\sec x\mathrm{d}x$$

$$= \sec x\tan x - \int (\sec^3 x - \sec x)\mathrm{d}x$$

$$= \sec x\tan x - \int \sec^3 x\mathrm{d}x + \int \sec x\mathrm{d}x$$

$$= \sec x\tan x - \int \sec^3 x\mathrm{d}x + \ln|\sec x + \tan x|.$$

移项得 $\int \sec^3 x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sec x\tan x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| + C.$

例 3.2.20 研究人员发现，一个新开发的天然井 t 月的总产量 Q（单位：m^3）变化率为

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = 0.05t\mathrm{e}^{-0.02t},$$

试求总产量函数.

解 因为 $\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = 0.05t\mathrm{e}^{-0.02t}$，所以

$$Q(t) = \int (0.05t\mathrm{e}^{-0.02t})\mathrm{d}t = 0.05 \cdot (-50)\int t\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-0.02t})$$

$$= -2.5(t\mathrm{e}^{-0.02t} - \int \mathrm{e}^{-0.02t}\mathrm{d}t) = -2.5t\mathrm{e}^{-0.02t} - 125\mathrm{e}^{-0.02t} + C.$$

由已知条件 $Q(0)=0$，代入上式得

$$C = 125.$$

从而总产量函数为

$$Q(t) = -2.5t\mathrm{e}^{-0.02t} - 125\mathrm{e}^{-0.02t} + 125.$$

至此，我们介绍了不定积分的四种常用方法：直接积分法、第一换元积分法（也称凑微分法）、第二换元积分法、分部积分法，在具体求解时，我们既要学会各种方法灵活使用，也要注意这些方法的综合使用.

大展身手

例 3.2.21　求下列不定积分.

(1) $\int \frac{1+x+\arctan x}{1+x^2}\mathrm{d}x$；　　(2) $\int \frac{x\arcsin x^2}{\sqrt{1-x^4}}\mathrm{d}x$；

(3) $\int \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$；　　(4) $\int \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$；

(5) $\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}\cdot(1+x)}\mathrm{d}x$；　　(6) $\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}\arcsin\frac{x}{2}}\mathrm{d}x$.

解　(1) $$\begin{aligned}\int \frac{1+x+\arctan x}{1+x^2}\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x+\int \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x+\int \frac{\arctan x}{1+x^2}\mathrm{d}x\\ &=\arctan x+\frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}(1+x^2)+\int \arctan x\,\mathrm{d}(\arctan x)\\ &=\arctan x+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+\frac{1}{2}\arctan^2 x+C.\end{aligned}$$

(2) $$\begin{aligned}\int \frac{x\arcsin x^2}{\sqrt{1-x^4}}\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int \frac{\arcsin x^2}{\sqrt{1-x^4}}\mathrm{d}(x^2)=\frac{1}{2}\int \arcsin x^2\,\mathrm{d}[\arcsin(x^2)]\\ &=\frac{1}{4}\arcsin^2(x^2)+C.\end{aligned}$$

(3) 令 $\sqrt{x}=t$，则 $x=t^2$，$\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$. 从而
$$\begin{aligned}\int \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x &= 2\int \mathrm{e}^t t\,\mathrm{d}t=2\int t\,\mathrm{d}\mathrm{e}^t=2\left(t\mathrm{e}^t-\int \mathrm{e}^t\mathrm{d}t\right)\\ &=2(t\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^t)+C=2\mathrm{e}^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)+C.\end{aligned}$$

(4) 方法一
$$\begin{aligned}\int \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x &= -\frac{1}{2}\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}(1-x^2)\\ &=-\int \arcsin x\,\mathrm{d}\sqrt{1-x^2}\\ &=-\left(\sqrt{1-x^2}\arcsin x-\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}\arcsin x\right)\\ &=-\sqrt{1-x^2}\arcsin x+\int 1\mathrm{d}x\\ &=-\sqrt{1-x^2}\arcsin x+x+C.\end{aligned}$$

方法二

令 $x=\sin t$，$t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，$t=\arcsin x$，则

$$\int \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\int \frac{\sin t\cdot t\cdot \cos t\,\mathrm{d}t}{\cos t}=-\int t\,\mathrm{d}\cos t$$

$$=-t\cos t+\int \cos t\,\mathrm{d}t=-t\cos t+\sin t+C$$

$$=-\sqrt{1-x^2}\arcsin x+x+C.$$

(5) $\displaystyle\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}\cdot(1+x)}\mathrm{d}x=\int \frac{2\arctan\sqrt{x}}{1+x}\mathrm{d}(\sqrt{x})=2\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{1+(\sqrt{x})^2}\mathrm{d}(\sqrt{x})$

$$=2\int \arctan\sqrt{x}\,\mathrm{d}(\arctan\sqrt{x})=2\cdot\frac{1}{2}(\arctan\sqrt{x})^2+C$$

$$=(\arctan\sqrt{x})^2+C.$$

(6) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}\arcsin\frac{x}{2}}\mathrm{d}x=\int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}\arcsin\frac{x}{2}}\mathrm{d}\left(\frac{x}{2}\right)$

$$=\int \frac{1}{\arcsin\frac{x}{2}}\mathrm{d}\left(\arcsin\frac{x}{2}\right)=\ln\left|\arcsin\frac{x}{2}\right|+C.$$

习题 3.2

小试牛刀

1. 在下列各题中填入适当的系数.

(1) $\mathrm{d}x=$ ________ $\mathrm{d}\left(1-\frac{x}{2}\right)$.

(2) $\mathrm{e}^{3x}\mathrm{d}x=$ ________ $\mathrm{d}\mathrm{e}^{3x}$.

(3) $\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=$ ________ $\mathrm{d}(\sqrt{x})$.

(4) $x^2\mathrm{d}x=$ ________ $\mathrm{d}(1-2x^3)$.

(5) $\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=$ ________ $\mathrm{d}\left(2-\frac{1}{x}\right)$.

(6) $\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=$ ________ $\mathrm{d}(3\tan x+1)$.

(7) $\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=$ ________ $\mathrm{d}(1-3\arctan x)$.

(8) $\cos\left(\frac{2x}{3}-1\right)\mathrm{d}x=$ ________ $\mathrm{d}\sin\left(\frac{2x}{3}-1\right)$.

(9) $\frac{1}{x}\mathrm{d}x=$ ________ $\mathrm{d}(\ln 2x)$.

(10) $(3x^2-2)\mathrm{d}x=$ ________ $\mathrm{d}(2x-x^3)$.

2. 用直接积分法求下列不定积分.

(1) $\displaystyle\int \frac{5}{x^3}\mathrm{d}x$.

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

(3) $\displaystyle\int 9^x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.

(4) $\displaystyle\int \frac{3}{1-\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

(5) $\int (2^x - 2\sin x + 2x\sqrt{x})\mathrm{d}x$.　　(6) $\int x^2(x-1)^2\mathrm{d}x$.

(7) $\int \frac{(1+\sqrt{x})(x-\sqrt{x})}{x}\mathrm{d}x$.　　(8) $\int \frac{1-x^2}{x\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

(9) $\int (3^x + x^3 + \log_3 \pi)\mathrm{d}x$.　　(10) $\int \mathrm{e}^t(1-\sqrt{t}\cdot \mathrm{e}^{-t})\mathrm{d}t$.

(11) $\int (2^x + \mathrm{e}^x)^2\mathrm{d}x$.　　(12) $\int \frac{1-\sin^3 x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x$.

(13) $\int 3^{-x}(2\cdot 3^x + 5\cdot 2^x)\mathrm{d}x$.

3. 用第一换元积分法求下列不定积分.

(1) $\int \sin(2x+5)\mathrm{d}x$.　　(2) $\int \frac{1}{\sqrt{3-2x}}\mathrm{d}x$.

(3) $\int (4x+5)^{99}\mathrm{d}x$.　　(4) $\int \sec^2(5x-1)\mathrm{d}x$.

(5) $\int \pi \mathrm{e}^{-\pi x}\mathrm{d}x$.　　(6) $\int x\sin(x^2+1)\mathrm{d}x$.

(7) $\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3+1}}\mathrm{d}x$.　　(8) $\int \frac{x}{\sqrt{1-3x^2}}\mathrm{d}x$.

(9) $\int \frac{2^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.　　(10) $\int \frac{\mathrm{e}^{3\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

(11) $\int \frac{\sqrt{3+2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.　　(12) $\int \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\mathrm{d}x$.

(13) $\int \frac{\ln^4 x}{x}\mathrm{d}x$.　　(14) $\int \frac{1+\cos x}{x+\sin x}\mathrm{d}x$.

(15) $\int \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}\mathrm{d}x$.　　(16) $\int \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$.

(17) $\int \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x + x}\mathrm{d}x$.　　(18) $\int \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$.

(19) $\int \frac{1}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x$.　　(20) $\int \sin^2(3x-2)\cos(3x-2)\mathrm{d}x$.

(21) $\int \frac{\cot x}{\sqrt[3]{\sin x}}\mathrm{d}x$.　　(22) $\int \mathrm{e}^{1+\sin 2x}\cos 2x\mathrm{d}x$.

(23) $\int \frac{\arctan^3 x}{1+x^2}\mathrm{d}x$.　　(24) $\int \frac{2^{\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

4. 用第二换元积分法求下列不定积分.

(1) $\int \frac{1}{1+3\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.　　(2) $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\mathrm{d}x$.

(3) $\int \frac{1}{(x+2)\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x$.　　(4) $\int \frac{\sqrt{x+1}}{1+\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x$.

(5) $\int \frac{\sqrt{x-1}}{x}dx$.　　(6) $\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}dx$.

(7) $\int \frac{1}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}}dx$.　　*(8) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx$.

*(9) $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}dx$.　　*(10) $\int \frac{2}{\sqrt{x^2+1}}dx$.

*(11) $\int \frac{1+2x}{\sqrt{x^2+1}}dx$.　　*(12) $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}dx\,(a>0)$.

*(13) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+9}}dx$.　　*(14) $\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx$.

5. 用分部积分法求下列不定积分.

(1) $\int x\sin x\,dx$.　　(2) $\int \arccos x\,dx$.

(3) $\int \ln\frac{x}{2}dx$.　　(4) $\int \ln(1+x^2)dx$.

(5) $\int x e^{-x}dx$.　　(6) $\int x^2\ln x\,dx$.

(7) $\int x\cos(2x-3)dx$.　　(8) $\int x\sec^2 3x\,dx$.

(9) $\int x\sin^2\frac{x}{2}dx$.　　(10) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\arcsin\sqrt{x}\,dx$.

(11) $\int x\arctan\frac{1}{x}dx$.　　(12) $\int (x+2)e^{-x}dx$.

6. 已知 $f(x)$ 的一个原函数是 $\ln|3x-1|$，则 $\int f(3x)dx=$(　　).

A. $\frac{1}{3}\ln|9x-1|+C$　　B. $\frac{1}{3}\ln|3x-1|+C$

C. $\ln|9x-1|+C$　　D. $3\ln|9x-1|+C$

7. 设 $F(x)=e^{2x}$ 是函数 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\int xf'(x)dx$ 等于(　　).

A. $e^{2x}\left(\frac{1}{2}x-1\right)+C$　　B. $e^{2x}(2x-1)+C$

C. $e^{2x}\left(\frac{1}{2}x+1\right)+C$　　D. $e^{2x}(2x+1)+C$

8. 设某产品的边际成本为 $C'(q)=13-4q$，固定成本 $C(0)=10$，求总成本函数 $C(q)$.

9. 设某工厂生产某种产品的边际产量为 $Q'(t)=200+14t-0.3t^2$(千件/小时)，求总产量函数 $Q(t)$.

大展身手

10. 用直接积分法求下列不定积分.

(1) $\int \frac{x^2}{x^2+1}\mathrm{d}x$.

(2) $\int \frac{1+x^4}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

(3) $\int \frac{\sqrt{x^3}+1}{\sqrt{x}+1}\mathrm{d}x$.

(4) $\int \frac{x^4+x^3+x^2+x+1}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

(5) $\int \frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1}\mathrm{d}x$.

(6) $\int \frac{3x^4+2x^2}{x^2+1}\mathrm{d}x$.

(7) $\int \frac{1+x+x^2}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x$.

(8) $\int \frac{1}{x^2(1+x^2)}\mathrm{d}x$.

(9) $\int \frac{1-x^2}{x^2(1+x^2)}\mathrm{d}x$.

(10) $\int \frac{(2^x+3^x)^2}{6^x}\mathrm{d}x$.

(11) $\int \frac{2+\sin^2 x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

(12) $\int \frac{\cos 2x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$.

(13) $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

(14) $\int \frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}\mathrm{d}x$.

(15) $\int \frac{1}{1+\cos 2x}\mathrm{d}x$.

(16) $\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}\mathrm{d}x$.

11. 用换元积分法求下列不定积分.

(1) $\int \frac{\ln 2x}{x}\mathrm{d}x$.

(2) $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}\,\mathrm{d}x$.

(3) $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1-(\sin x)^4}}\mathrm{d}x$.

(4) $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{x^2+2x}}\mathrm{d}x$.

(5) $\int (2x-2)\mathrm{e}^{x^2-2x}\mathrm{d}x$.

(6) $\int \frac{x}{x-\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x$.

(7) $\int \frac{\mathrm{e}^x+\sin x}{(\mathrm{e}^x-\cos x)^2}\mathrm{d}x$.

(8) $\int \frac{1}{x\sqrt[3]{3+2\ln x}}\mathrm{d}x$.

(9) $\int \frac{1}{\sin^2 x(1-2\cot x)}\mathrm{d}x$.

(10) $\int \cos^4 x\,\mathrm{d}x$.

(11) $\int \tan^5 x\sec^3 x\,\mathrm{d}x$.

(12) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x$.

*(13) $\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

*(14) $\int \frac{1}{x^4\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$.

*(15) $\int \frac{2x-1}{\sqrt{9x^2-4}}\mathrm{d}x$.

12. 用分部积分法求下列不定积分.

(1) $\int \ln^2 x\,\mathrm{d}x$.

(2) $\int x^2\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

(3) $\int(x^2+x)e^x dx$.

(4) $\int(x^2+2)\cos x dx$.

(5) $\int\ln(x+\sqrt{1+x^2})dx$.

(6) $\int\frac{\ln(\sin x)}{\cos^2 x}dx$.

(7) $\int\sin(\ln x)dx$.

(8) $\int\cos(\ln x)dx$.

(9) $\int\frac{\arctan e^x}{e^x}dx$.

(10) $\int e^{-2x}\sin\frac{x}{2}dx$.

(11) $\int\frac{x^2\arctan x}{1+x^2}dx$.

13. 求下列不定积分.

(1) $\int\arctan\sqrt{x}\,dx$.

(2) $\int\sin\sqrt{x}\,dx$.

(3) $\int\frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}dx$.

(4) $\int\cos^2\sqrt{x}\,dx$.

(5) $\int\frac{\ln(1+x)-\ln x}{x(1+x)}dx$.

(6) $\int\frac{\ln x}{\sqrt{1+x}}dx$.

(7) $\int\frac{1}{\sin^2 x+2\cos^2 x}dx$.

(8) $\int(x-\sin^2 x)\cos x dx$.

(9) $\int\frac{\ln(\tan x)}{\sin x\cos x}dx$.

(10) $\int e^{\sqrt[3]{x}}dx$.

(11) $\int\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx$.

*(12) $\int\frac{x\arctan x}{\sqrt{1+x^2}}dx$.

*(13) $\int x\arcsin x dx$.

*(14) $\int\frac{\arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}dx$.

14. 已知 $f(x)$ 的一个原函数为 $\cos x$，$g(x)$ 的一个原函数是 x^2，下列函数中(　　)是复合函数 $f[g(x)]$ 的原函数.

A. x^2　　B. $\cos^2 x$　　C. $\cos(x^2)$　　D. $\cos 2x$

15. 设 $f(x)$ 是函数 $\cos 2x$ 的一个原函数，且 $f(0)=0$，则 $\int f(x)dx$ 等于(　　).

A. $-\frac{1}{4}\cos 2x+C$

B. $-\frac{1}{2}\cos 2x+C$

C. $-\cos 2x+C$

D. $\cos 2x+C$

16. 已知 $\int xf(x)dx=x^2\arctan x+C$，求 $\int f(x)dx$.

17. 设某产品是连续生产的，总产量 Q 是时间 t 的函数，如果总产量的变化率为 $Q'(t)=\frac{324}{t^2}e^{-\frac{9}{t}}$（吨/日），求总产量函数.

第三节　定积分的概念与性质

应用案例

得益于技术的飞速进步，新能源汽车凭借零排放、低能耗的环保优势，成为推动交通领域绿色转型的重要力量，不仅助力我国实现“双碳”目标，还引领全球汽车产业向可持续发展迈进. 某新能源汽车制造公司生产了一种新型电动汽车，市场分析表明，总收益函数 $R(q)$ 关于产量 q 的变化率（即边际收益 $R'(q)$）是一个关键指标，它反映了每增加一单位产量所带来的额外收益. 公司计划在未来几个月内将产量 q 从 a 单位调整到 b 单位，求这一产量变化区间内总收益的变化量 ΔR.

一、两个引例

1. 曲边梯形的面积

在 $[a,b]$ 上连续曲线 $y=f(x)(f(x)\geqslant 0)$，与直线 $x=a$，$x=b$ 及 x 轴所围的图形称为曲边梯形（如图 3 - 4 所示）.

（1）**分割**　在区间 $[a,b]$ 内任意插入 $n-1$ 个分点 $a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$，把 $[a,b]$ 分成 n 个子区间：

$[x_0,x_1]$，$[x_1,x_2]$，$\cdots$，$[x_{n-1},x_n]$，区间长度为 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}(i=1,2,\cdots,n)$.

（2）**近似代替**　在每一个子区间 $[x_{i-1},x_i](i=1,2,\cdots,n)$ 上任取一点 ξ_i，以 $f(\xi_i)$ 为高，Δx_i 为底作小矩形，用小矩形的面积 $f(\xi_i)\Delta x_i$ 近似代替相应的小曲边梯形的面积 ΔA_i，即

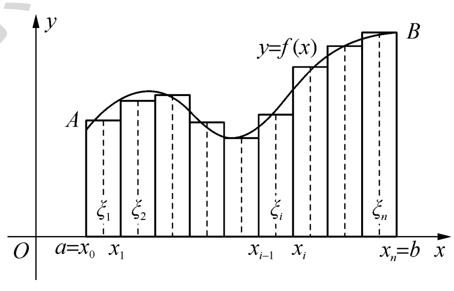


图 3 - 4

$$\Delta A_i\approx f(\xi_i)\Delta x_i(i=1,2,\cdots,n).$$

（3）**求和**　将 n 个小矩形的面积相加，得曲边梯形面积的近似值

$$A=\sum_{i=1}^{n}\Delta A_i\approx f(\xi_1)\Delta x_1+f(\xi_2)\Delta x_2+\cdots+f(\xi_n)\Delta x_n=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\cdot\Delta x_i.$$

（4）**取极限**　当子区间长度的最大值 $\lambda=\max\{\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_n\}\to 0$ 时，如果此时和

式的极限存在,则此极限值就是曲边梯形的面积,即

$$A=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\cdot\Delta x_i. \tag{3-5}$$

小提示

曲边梯形的面积求解体现了化“整”为“零”、以“直”代“曲”的思想.

2. 非均匀变化的收益总量

一般企业的收益是随时流入的,设收益的变化率(即边际收益)是时间 t 的连续函数 $f(t)$,求从时刻 a 到时刻 b 这段时间内的总收益.

(1) **分割** 在区间 $[a,b]$ 内任意插入 $n-1$ 个分点 $a=t_0<t_1<\cdots<t_{n-1}<t_n=b$,把 $[a,b]$ 分成 n 个子区间:$[t_0,t_1]$,$[t_1,t_2]$,$\cdots$,$[t_{n-1},t_n]$,每个小时间段长度为 $\Delta t_i=t_i-t_{i-1}(i=1,2,\cdots,n)$.

(2) **近似代替** 在每一个小区间 $[t_{i-1},t_i]$ 上任取一点 ξ_i,其对应的收益变化率为 $f(\xi_i)$ 为收益变化率,Δt_i 为时间间隔,将时间段 $[t_{i-1},t_i]$ 上的收益看成是均匀变化的,于是用 $f(\xi_i)\Delta t_i$ 近似代替每小段时间内收益 ΔR_i 的近似值,即

$$\Delta R_i\approx f(\xi_i)\cdot\Delta t_i(i=1,2,\cdots,n).$$

(3) **求和** 将 n 个小段时间内的收益相加,得总收益的近似值

$$R=\sum_{i=1}^{n}\Delta R_i\approx f(\xi_1)\Delta t_1+f(\xi_2)\Delta t_2+\cdots+f(\xi_n)\Delta t_n=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\cdot\Delta t_i.$$

(4) **取极限** 当子区间长度的最大值 $\lambda=\max\{\Delta t_1,\Delta t_2,\cdots,\Delta t_n\}\to 0$ 时,如果此时和式的极限存在,则此极限值就是所求的总收益,即

$$R=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\cdot\Delta t_i. \tag{3-6}$$

从上面两个引例可以看出,虽然所要计算的量的实际意义不同,前者是几何量,后者是经济量,但是计算这些量的思想方法和步骤是相同的,并且最终都归结为一个和式的极限.类似于这样的问题还有很多,抛开它们的具体意义,抓住它们在数量关系上的本质和特性,我们就可以抽象出下述定积分的定义.

二、定积分的定义

1. 基本概念

定义 3.3.1 设函数 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有界,在 $[a,b]$ 内任意插入 $n-1$ 个分点 $a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$,把 $[a,b]$ 分成 n 个子区间,$[x_0,x_1]$,$[x_1,x_2]$,$\cdots$,$[x_{n-1},x_n]$,区间长度 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}(i=1,2,\cdots,n)$.在每一个子区间 $[x_{i-1},x_i](i=1,2,\cdots,n)$ 上任取一点 ξ_i 作乘积 $f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$,并求和

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i.$$

记 $\lambda = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n\}$，若极限

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$$

存在，则称函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，并称此极限值为函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的**定积分**，记作 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i. \tag{3-7}$$

其中 $f(x)$ 称为被积函数，x 称为积分变量，$f(x)\mathrm{d}x$ 称为被积表达式，$[a,b]$称为积分区间，a,b 分别称为**积分下、上限**.

以上两个引例中，面积 $A = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，总收益的现值 $R = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

小提示

(1) 定积分与积分变量的记号无关，即 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\mathrm{d}u$.

(2) 函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积是指，无论区间 $[a,b]$ 如何分割和点 ξ_i 如何取，和式的极限都存在且唯一.

小智囊

$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$.

特别地，当 $a=b$ 时，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0$.

2. 函数可积的充分条件

定理 3.3.1　设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，即 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 存在.

定理 3.3.2　设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，且只有有限个间断点，则函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，即 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 存在.

证明从略.

小试牛刀

例 3.3.1　用定积分的定义求 $\int_0^1 x^2\mathrm{d}x$.

分析 $f(x)=x^2$ 在$[0,1]$上连续,故可积,且积分值与区间的分法以及点 ξ_i 的取法无关,从而可对区间采用特殊分法,取特殊点.

解 把区间$[0,1]$分成 n 等份,$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}=\dfrac{1}{n}$,并取 $\xi_i=\dfrac{i}{n}(i=1,2,\cdots,n)$,则

$$\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}=\sum_{i=1}^{n}\frac{i^2}{n^3},$$

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\cdot\Delta x_i=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i^2}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}{n^3}=\frac{1}{3}.$$

$\left(\text{此处 }\lambda=\dfrac{1}{n}\text{,则 }\lambda\to 0\Leftrightarrow n\to\infty\right)$,所以

$$\int_0^1 x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}.$$

大展身手

例 3.3.2 利用定积分表示极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\pi}{n}\left(\dfrac{1}{n}\cos\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n}\cos\dfrac{2}{n}+\cdots+\dfrac{n-1}{n}\cos\dfrac{n-1}{n}+\cos 1\right)$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\pi}{n}\left(\dfrac{1}{n}\cos\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n}\cos\dfrac{2}{n}+\cdots+\dfrac{n-1}{n}\cos\dfrac{n-1}{n}+\cos 1\right)=\pi\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{i}{n}\cos\dfrac{i}{n}\right)\cdot\dfrac{1}{n}$.

易见,若在区间$[0,1]$内取 $x_i=\dfrac{i}{n}(i=1,2,\cdots,n)$,则 $\Delta x_i=\dfrac{1}{n}$,$\xi_i=\dfrac{i}{n}\in[x_{i-1},x_i]$,即有

$$\text{原极限}=\pi\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i\cos\xi_i)\cdot\Delta x_i,$$

由此可见,取被积函数 $f(x)=x\cos x$,注意 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续,因而是可积的.故有

$$\text{原极限}=\pi\int_0^1 x\cos x\,\mathrm{d}x.$$

小提示

用定积分表示数列求和的极限的关键是根据求和数列的特征判断积分上下限.

三、定积分的几何意义与经济意义

1. 定积分的几何意义

由 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$ 可知:

(1) 当 $f(x)\geqslant 0$ 时,定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 表示由曲线 $y=f(x)$,直线 $x=a$,$x=b$ 及 x 轴所围成的曲边梯形的面积(如图 3-5),即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = A.$$

小智囊

若在区间 $[a,b]$ 上 $f(x)\equiv 1$，则 $\int_a^b 1\cdot \mathrm{d}x=\int_a^b \mathrm{d}x = b-a$.

(2) 当 $f(x)\leqslant 0$ 时，定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 表示由曲线 $y=f(x)$，直线 $x=a$，$x=b$ 及 x 轴所围成曲边梯形面积的负值(如图 3-6)，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -A.$$

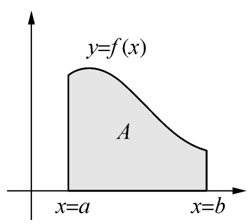


图 3-5

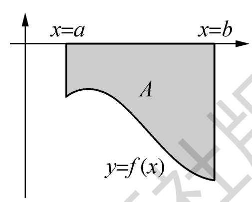


图 3-6

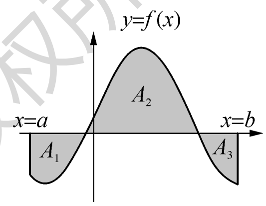


图 3-7

(3) 当 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有正有负时，则定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 表示由曲线 $y=f(x)$ 及直线 $x=a$，$x=b$ 及 x 轴所围成的几个曲边梯形的面积的代数和(如图 3-7)，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -A_1 + A_2 - A_3.$$

2. 定积分的经济意义

如果已知某一经济总量 $F(x)$ 的变化率(边际)为 $f(x)$，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 表示变量 x 从 a 变化到 b 时经济总量的变化量 ΔF，即 $\Delta F=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

例如，【应用案例】中产量 q 从 a 变化到 b 时总收益的变化量 $\Delta R=\int_a^b R'(q)\mathrm{d}q$.

小试牛刀

例 3.3.3 根据定积分的几何意义计算下列定积分.

(1) $\int_0^1 x\,\mathrm{d}x$；　(2) $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$；　(3) $\int_0^{2\pi} \sin x\,\mathrm{d}x$.

解 (1) 被积函数 $f(x)=x\geqslant 0(0\leqslant x\leqslant 1)$，根据定积分的几何意义，$\int_0^1 x\,\mathrm{d}x$ 表示由直线 $x=0$，$x=1$，$y=x$ 及 x 轴围成的面积(如图 3-8(a))，即 $\int_0^1 x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\times 1\times 1=\frac{1}{2}$.

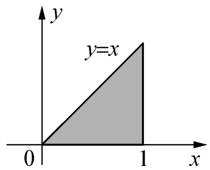


图 3－8(a)

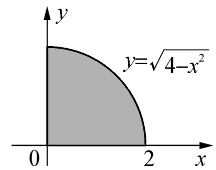


图 3－8(b)

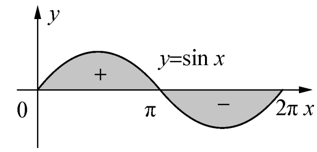


图 3－8(c)

(2) 被积函数 $f(x)=\sqrt{4-x^2}\geqslant 0(0\leqslant x\leqslant 2)$，根据定积分的几何意义，$\int_0^2\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$ 表示由 $x=0$，$x=2$，$y=\sqrt{4-x^2}$ 及 x 轴围成的面积，即第一象限的四分之一圆的面积(如图 3－8(b))，即

$$\int_0^2\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\pi\cdot 2^2=\pi.$$

(3) 当 $0\leqslant x\leqslant\pi$ 时，被积函数 $f(x)=\sin x\geqslant 0$；当 $\pi<x\leqslant 2\pi$ 时，$f(x)=\sin x\leqslant 0$. 根据定积分的几何意义，$\int_0^{2\pi}\sin x\,\mathrm{d}x$ 表示由 $x=0$，$x=2\pi$，$y=\sin x$ 及 x 轴围成的面积的代数和(如图 3－8(c)). 显然在一个周期内，$f(x)=\sin x$ 在 x 轴上下两部分的面积相等，即

$$\int_0^{2\pi}\sin x\,\mathrm{d}x=0.$$

四、定积分的性质

性质 3.3.1 设 $a<c<b$，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$.

小提示

(1) 该性质称为积分对区间的可加性；

(2) 不论 a,b,c 的相对位置如何，总有等式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

成立，即条件 $a<c<b$ 可略去.

性质 3.3.2 若在区间 $[a,b]$ 上，$f(x)\geqslant 0$，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geqslant 0$.

推论 3.3.1 若在区间 $[a,b]$ 上，$f(x)\leqslant g(x)$，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

推论 3.3.2 $\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x\ (a<b)$.

性质 3.3.3 设 M,m 分别是函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的最大值和最小值，则

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M(b-a).$$

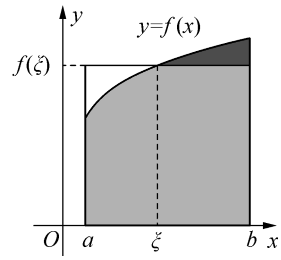


图 3－9

性质 3.3.4(定积分中值定理)　若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续,则在积分区间 $[a,b]$ 上至少存在一点 ξ, 使下式成立

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a).$$

定积分中值定理的几何意义如图 3－9 所示.

小提示

$f(\xi)=\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 为 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的平均值.

比如,在银行的连续利息计算中,如果利率是时间 t（单位：年）的函数 $r(t)$, 那么银行在时间间隔$[0,2]$内的平均利率为 $r(\xi)=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^2 r(t)\mathrm{d}t$.

小试牛刀

例 3.3.4　比较积分值 $\int_0^1 x\mathrm{d}x$ 与 $\int_0^1 x^3\mathrm{d}x$ 的大小.

解　根据幂函数的性质,在区间 $[0,1]$ 上,有 $x \geqslant x^3$,

由推论 3.3.1 有 $\int_0^1 x\mathrm{d}x \geqslant \int_0^1 x^3\mathrm{d}x$.

大展身手

例 3.3.5　比较积分值 $\int_1^2 x\mathrm{d}x$ 与 $\int_1^2 \ln x\mathrm{d}x$ 的大小.

解　令 $f(x)=x-\ln x$, 在 $[1,2]$ 上有

$f'(x)=1-\dfrac{1}{x}\geqslant 0$, 从而函数 $f(x)$ 在区间 $[1,2]$ 上单调增加,

所以, $f(x)\geqslant f(1)=1>0$, 即有 $x>\ln x$.

由推论 3.3.1 有 $\int_1^2 x\mathrm{d}x > \int_1^2 \ln x\mathrm{d}x$.

小提示

当积分区间一致时,两个积分值大小的比较关键在于比较被积函数的大小.

例 3.3.6　估计积分值 $\int_0^4 (3x^2-x^3)\mathrm{d}x$.

解　设 $f(x)=3x^2-x^3, x\in[0,4]$.

令 $f'(x)=6x-3x^2=3x(2-x)=0$,得 $f(x)$ 在区间$(0,4)$上驻点 $x=2, f(2)=4$.

又　$f(0)=0, f(4)=-16$,

所以 $f(x)$ 在区间$[0,4]$上的最大值 $M=4$，最小值 $m=-16$，从而由性质 3.3.3 有

$$-64 \leqslant \int_0^4 (3x^2-x^3)\mathrm{d}x \leqslant 16.$$

例 3.3.7 假设编写了一个计算定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的程序，并用定积分 $\int_0^{\frac{2\pi}{3}}(1+2\sin^2 x)\mathrm{d}x$ 作检验.若程序的计算结果为 7.35，试问所编程序是否有问题.

解 设 $f(x)=1+2\sin^2 x$，则在区间 $\left[0,\frac{2\pi}{3}\right]$ 上恒有 $1\leqslant f(x)\leqslant 3$，根据性质 3.3.3 有

$$\frac{2\pi}{3}=1\times\frac{2\pi}{3}\leqslant \int_0^{\frac{2\pi}{3}}(1+2\sin^2 x)\mathrm{d}x \leqslant 3\times\frac{2\pi}{3}=2\pi.$$

而 $7.35>2\pi$，计算结果偏差太大，所以程序有问题.

小提示

估计定积分值的关键是求被积函数在积分区间上的最大值和最小值.

习题 3.3

小试牛刀

1. 根据定积分的几何意义计算下列定积分.

(1) $\int_1^3 5\mathrm{d}x$； (2) $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$；

(3) $\int_a^b x\,\mathrm{d}x$； (4) $\int_0^{2\pi}\cos x\,\mathrm{d}x$；

(5) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,\mathrm{d}x$.

2. 用定积分表示下列问题的结果.

(1) 由曲线 $y=e^x$，直线 $x=1,x=3$ 和 x 轴所围成的图形的面积.

(2) 由曲线 $y=x^3$，直线 $x=-1,x=-3$ 和 x 轴所围成的图形的面积.

(3) 已知某产品的边际收益 $R'(q)=35-2q$，求产量 q 从 2 到 5 时的总收益的增量.

(4) 已知生产某产品 q 单位时的边际成本 $C'(q)=3x^2-20x+35$，求产量 q 从 10 到 20 时的总成本的增量.

3. 自由落体的速度 $v=gt$（g 是重力加速度，t 是时间），计算前 5 秒内物体所落下的距离.

大展身手

4. 用定积分的定义证明：

(1) $\int_a^b x\,\mathrm{d}x=\dfrac{b^2-a^2}{2}$.　　(2) $\int_a^b x^2\,\mathrm{d}x=\dfrac{b^3-a^3}{3}$.

(3) $\int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}-1$.

5. 利用定积分表示下面的极限.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left(\sin\dfrac{\pi}{n}+\cdots+\sin\dfrac{n-1}{n}\pi\right)$.　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n-1}{n^2}+\dfrac{n}{n^2}\right)$.

6. 比较下列定积分的大小.

(1) $\int_1^2\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$ 与 $\int_1^2 x\,\mathrm{d}x$.　　(2) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin x\,\mathrm{d}x$ 与 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,\mathrm{d}x$.

(3) $\int_0^1\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$ 与 $\int_0^1(x+1)\,\mathrm{d}x$.　　(4) $\int_0^1 x\,\mathrm{d}x$ 与 $\int_0^1\ln(1+x)\,\mathrm{d}x$.

7. 估计下列定积分的值.

(1) $\int_1^4(x^2+1)\,\mathrm{d}x$.　　(2) $\int_1^2\dfrac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$.

8. 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的单调递增的有界函数,证明

$$f(a)\cdot(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant f(b)\cdot(b-a).$$

第四节　定积分的计算

应用案例

随着科技的进步,共享单车打通了出行最后一公里的障碍,成为很多人必备的绿色出行工具.某共享单车公司计划优化投放和管理共享单车,已知该产品的边际收益为 $R'(q)=9-q$ (万元/千次),求在日均使用量从 2 千次增加到 6 千次时,总收益的变化量 ΔR.

一方面,该问题可用定积分的经济意义解决, ΔR 用定积分表示为 $\int_2^6 R'(q)\,\mathrm{d}q$, 即 $\int_2^6(9-q)\,\mathrm{d}q$.

另一方面, ΔR 也可以表示为总收益函数 $R(q)$ 在区间 $[2,6]$ 上的增量 $R(6)-R(2)$, 所以

$$\int_2^6 R'(q)\,\mathrm{d}q=R(6)-R(2).$$

所以上式表明,边际收益 $R'(q)$ 在区间 $[2,6]$ 上的定积分等于它的一个原函数:**总收益**

函数 $R(q)$ 在 $[2,6]$ 上的增量.

这个结果具有一般性吗？即函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，与它的不定积分 $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$，是否有如下关系：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a),\text{其中 } F(x) \text{ 是 } f(x) \text{ 的一个原函数.}$$

一、积分上限函数

定义 3.4.1 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，x 为 $[a,b]$ 上一点，$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 是变量 x 的函数，则称

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\left(=\int_a^x f(x)\mathrm{d}x\right)$$

为**积分上限函数**(也称为**变上限函数**).

定理 3.4.1 若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$上连续,则积分上限函数 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 在 $[a,b]$上可导,并且它的导数是

$$\Phi'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=f(x)(a\leqslant x\leqslant b). \tag{3-8}$$

证明 由函数 $\Phi(x)$ 的定义和定积分的性质有

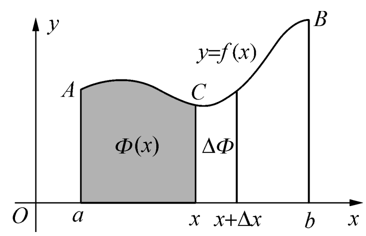


图 3-10

$$\begin{aligned}\Delta\Phi&=\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)\\&=\int_a^{x+\Delta x}f(t)\mathrm{d}t-\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=\int_x^{x+\Delta x}f(t)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

由积分中值定理,可得

$$\int_x^{x+\Delta x}f(t)\mathrm{d}t=f(\xi)\cdot\Delta x(\xi \text{ 在 } x \text{ 与 } x+\Delta x \text{ 之间}),$$

所以,由 $f(x)$ 的连续性有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\Phi}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}f(\xi)=f(x).$$

说明 $\Phi(x)$ 的导数存在,且 $\Phi'(x)=f(x)$.

小提示

若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续,则 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 就是函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的一个原函数.

小试牛刀

例 3.4.1　已知 $\Phi(x)=\int_0^x e^{-t^2}dt$，求 $\Phi'(x)$.

解　由定理 3.4.1 知 $\Phi'(x)=\frac{d}{dx}\int_0^x e^{-t^2}dt=e^{-x^2}$.

例 3.4.2　求 $\frac{d}{dx}\int_x^{\pi}\sin t^2 dt$.

解　$\int_x^{\pi}\sin t^2 dt=-\int_{\pi}^{x}\sin t^2 dt$，

所以

$$\frac{d}{dx}\int_x^{\pi}\sin t^2 dt=-\frac{d}{dx}\int_{\pi}^{x}\sin t^2 dt=-\sin x^2.$$

大展身手

例 3.4.3　求 $\frac{d}{dx}\left[\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^2 dt\right]$.

解　$\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^2 dt$ 可以看成是由 $\Phi(u)=\int_0^u \sin t^2 dt$ 与 $u(x)=\sqrt{x}$ 复合而成，应用复合函数的求导法则有

$$\frac{d}{dx}\left[\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^2 dt\right]=\Phi'(u)\cdot u'(x)=\sin u^2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin x.$$

例 3.4.4　求极限（1）$\lim\limits_{x\to 1}\frac{\int_1^x (t^2-1)dt}{\ln^2 x}$；（2）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x (e^{t^2}-1)dt}{\tan x-x}$.

解　（1）$\lim\limits_{x\to 1}\frac{\int_1^x (t^2-1)dt}{\ln^2 x}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{2\ln x\cdot\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-x}{2\ln x}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^2-1}{\frac{2}{x}}=1.$

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x (e^{t^2}-1)dt}{\tan x-x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{\sec^2 x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{\tan^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2}=1.$

二、微积分基本公式

1. 微积分基本公式

定理 3.4.2（微积分基本公式）　如果函数 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的一个原函数，则

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a).\tag{3-9}$$

证明　已知 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，又由定理 3.4.1 知，

$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$ 也是 $f(x)$ 的一个原函数，因此有 $F(x)=\Phi(x)+C$，即

$$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+C.$$

令 $x=a$，则 $F(a)=\int_a^a f(t)\mathrm{d}t+C=0+C$，所以 $C=F(a)$.

从而有

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=F(x)-F(a),$$

特别地，当 $x=b$ 时，则有 $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=F(b)-F(a)$.

为方便计算，可将式(3-9)的右端 $F(b)-F(a)$ 记为 $F(x)\Big|_a^b$ 或 $[F(x)]_a^b$，从而式(3-9)可以写成

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a).$$

公式(3-9)称为**牛顿-莱布尼茨公式**，也称为**微积分基本公式**.

小智囊

$a>b$ 时，牛顿-莱布尼茨公式依然成立.

小提示

由此可知，【应用案例】中的结果具有一般意义. 牛顿-莱布尼茨公式是联系微分法逆运算——不定积分与定积分的桥梁.

小试牛刀

例 3.4.5 计算下列定积分.

(1) $\int_0^1 x^2\mathrm{d}x$.　(2) $\int_{-1}^{\sqrt{3}}\dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$.　(3) $\int_{-2}^{-1}\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$.

解 (1) $\int_0^1 x^2\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}x^3\Big|_0^1=\dfrac{1}{3}$.

(2) $\int_{-1}^{\sqrt{3}}\dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\arctan x\Big|_{-1}^{\sqrt{3}}=\arctan\sqrt{3}-\arctan(-1)=\dfrac{7}{12}\pi$.

(3) $\int_{-2}^{-1}\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|\Big|_{-2}^{-1}=-\ln 2$.

2. 两个运算法则

若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，k、α 与 β 均为常数，则有

法则 3.4.1 $\int_a^b[f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\pm\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

该法则可以推广到有限个连续函数的情形.

法则 3.4.2 $\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x=k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

推论 3.4.1 $\int_a^b[\alpha f(x)\pm\beta g(x)]\mathrm{d}x=\alpha\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\pm\beta\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

例 3.4.6 计算下列定积分.

(1) $\int_0^1(2x^3\cdot\sqrt{x}+x+2^x\cdot 3^x)\mathrm{d}x$.　　　(2) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\cot^2 x\,\mathrm{d}x$.

解 (1) $\int_0^1(2x^3\cdot\sqrt{x}+x+2^x\cdot 3^x)\mathrm{d}x=\int_0^1(2x^{\frac{7}{2}}+x+6^x)\,\mathrm{d}x$

$$=\left[2\cdot\frac{2}{9}x^{\frac{9}{2}}+\frac{1}{2}x^2+\frac{6^x}{\ln 6}\right]_0^1=\frac{17}{18}+\frac{5}{\ln 6}.$$

(2) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\cot^2 x\,\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}(\csc^2 x-1)\mathrm{d}x=(-\cot x-x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=1-\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\pi}{12}$.

大展身手

例 3.4.7 计算 $\int_0^{\pi}\sqrt{\sin x-\sin^3 x}\,\mathrm{d}x$.

解
$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\sqrt{\sin x-\sin^3 x}\,\mathrm{d}x&=\int_0^{\pi}\sqrt{\sin x}\,|\cos x|\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sin x}\cos x\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sqrt{\sin x}(-\cos x)\mathrm{d}x\\&=\frac{2}{3}(\sin x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{2}{3}(\sin x)^{\frac{3}{2}}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\frac{4}{3}.\end{aligned}$$

例 3.4.8 某银行推出一种储蓄产品,该产品的连续复利利率随持有时间动态增长,计算公式为 $r(t)=\frac{1}{25}+\frac{1}{200}\sqrt{t}$($t$ 为投资年数).求在开始 2 年,即时间间隔[0,2]内的平均利率.

解 由于

$$\int_0^2 r(t)\mathrm{d}t=\int_0^2\left(\frac{1}{25}+\frac{1}{200}\sqrt{t}\right)\mathrm{d}t=\left(\frac{1}{25}t+\frac{1}{300}t^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_0^2=\frac{2}{25}+\frac{\sqrt{2}}{150},$$

那么由性质 3.3.4,平均利率为 $\dfrac{\int_0^2 r(t)\mathrm{d}t}{2-0}=\dfrac{1}{25}+\dfrac{\sqrt{2}}{300}\approx 4.47\%$.

即在最初的 2 年内平均利率约为 4.47%.

直接利用牛顿-莱布尼茨公式计算定积分,必须先求出被积函数的原函数,然后代入上、下限.但是在许多情况下,这样的运算比较复杂,有时甚至原函数的求解不是一目了然.为了进一步解决定积分的计算问题,我们介绍定积分的两种积分方法——换元积分法和分部积分法.

三、定积分的换元积分法

定理 3.4.3 设函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续,函数 $x=\varphi(t)$ 满足条件:

(1) $\varphi(\alpha)=a,\varphi(\beta)=b$.

(2) $\varphi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$（或 $[\beta,\alpha]$）上具有连续导数，且其值域 $R_{\varphi}=[a,b]$ ①，

则有
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t. \tag{3-10}$$

小提示

(1) 式(3-10)称为**定积分的换元积分公式**；

(2) 定积分在换元积分时，要记住“换元要同时换限”，同时注意上、下限的对应关系，不一定是 α 小于 β.

小试牛刀

例 3.4.9 计算下列定积分.

(1) $\displaystyle\int_0^4 \frac{x+2}{\sqrt{2x+1}}\mathrm{d}x$.　　(2) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{5-4x}}\mathrm{d}x$.（3）$\displaystyle\int_0^7 \frac{1}{1+\sqrt[3]{x+1}}\mathrm{d}x$.

解 (1) 令 $\sqrt{2x+1}=t$，则 $x=\frac{1}{2}(t^2-1)$，$\mathrm{d}x=t\mathrm{d}t$. 当 $x=0$ 时，$t=1$；当 $x=4$ 时，$t=3$.

从而 $\displaystyle\int_0^4 \frac{x+2}{\sqrt{2x+1}}\mathrm{d}x=\int_1^3 \frac{\frac{t^2-1}{2}+2}{t}t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_1^3(t^2+3)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left[\frac{t^3}{3}+3t\right]_1^3=\frac{22}{3}$.

(2) 令 $\sqrt{5-4x}=t$，则 $x=\frac{5-t^2}{4}$，$\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}t\mathrm{d}t$. 当 $x=-1$ 时，$t=3$；当 $x=1$ 时，$t=1$.

从而 $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{5-4x}}\mathrm{d}x=\int_3^1 \frac{5-t^2}{4t}\left(-\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{8}\int_3^1(t^2-5)\mathrm{d}t=\frac{1}{8}\left[\frac{t^3}{3}-5t\right]_3^1=\frac{1}{6}$.

(3) 令 $\sqrt[3]{x+1}=t$，则 $x=t^3-1$，$\mathrm{d}x=3t^2\mathrm{d}t$. 当 $x=0$ 时，$t=1$；当 $x=7$ 时，$t=2$.

从而 $\displaystyle\int_0^7 \frac{1}{1+\sqrt[3]{x+1}}\mathrm{d}x=\int_1^2 \frac{3t^2}{1+t}\mathrm{d}t=3\int_1^2 \frac{t^2-1+1}{1+t}\mathrm{d}t=3\int_1^2\left(t-1+\frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t$

$$=3\left[\frac{t^2}{2}-t+\ln(1+t)\right]_1^2=\frac{3}{2}+3\ln\frac{3}{2}.$$

大展身手

* **例 3.4.10** 计算 $\displaystyle\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x\ (a>0)$.

解 令 $x=a\sin t$，则 $\mathrm{d}x=a\cos t\mathrm{d}t$. 当 $x=0$ 时，$t=0$；当 $x=a$ 时，$t=\frac{\pi}{2}$. 从而

$$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,\mathrm{d}t=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}\mathrm{d}t=a^2\left[\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi a^2}{4}.$$

① 当 $\varphi(t)$ 的值域 R_{φ} 超出 $[a,b]$，但 $\varphi(t)$ 满足其余条件时，只要 $f(x)$ 在 R_{φ} 上连续，定理的结论仍然成立.

小提示

本题也可以利用定积分的几何意义求解.详细过程参考例 3.3.3(2).

例 3.4.11　计算$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

解　$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$$
$$=-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}(1-x^2)+\arcsin x\Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}=-\sqrt{1-x^2}\Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}+\frac{\pi}{4}$$
$$=1+\frac{\pi}{4}-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

小提示

在定积分计算中,如果使用凑微分法,则无需换元,且“不换元则无需变限”.

例 3.4.12　某投资公司向一企业投资 1000 万元,年利率为 5%,在 20 年中每年将获得收益 200 万元,求总收益的现值 R 和投资回收期 T.

解　已知 $f(t)=200, r=0.05, T=20$,代入现值公式得

$$R=\int_0^{20}200\mathrm{e}^{-0.05t}\mathrm{d}t=\frac{200}{0.05}(1-\mathrm{e}^{-0.05\times 20})\approx 2528.48(\text{万元}).$$

由$\int_0^T 200\mathrm{e}^{-0.05t}\mathrm{d}t=1000$,得$-4000\mathrm{e}^{-0.05T}+4000=1000$,$\mathrm{e}^{-0.05T}=0.75$.

解得 $T=20(2\ln 2-\ln 3)\approx 5.75$(年).

小智囊

资本现值与投资问题

设在时间区间 $[0,T]$ 内 t 时刻的收益率(表示单位时间的收益)为 $f(t)$,若按年利率 r 做连续复利计算,则获得的总收益现值为 $R=\int_0^T f(t)\mathrm{e}^{-rt}\mathrm{d}t$.

特别地,当收益率 $f(t)$ 为常数 a(称为均匀收益流量)时,总收益现值为

$$R=\int_0^T a\mathrm{e}^{-rt}\mathrm{d}t=\frac{a}{r}(1-\mathrm{e}^{-rT}).$$

进行某项投资后,将投资期内总收益的现值与总投资的差额称为该项投资纯收益的(贴)现值,即

$$\text{纯收益的(贴)现值 } L=\text{总收益的现值 } R-\text{总投资 } C.$$

当总收益的现值R与总投资额C相等时，正好收回投资. 此时对均匀收益率的投资项目有$\dfrac{a}{r}(1-\mathrm{e}^{-rT})=C$，故收回投资的时间为

$$T=\frac{1}{r}\ln\frac{a}{a-Cr}.$$

小智囊

(1) 若$f(x)$在$[-a,a]$上连续，则

$$\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}0 & f(x)\text{ 为奇函数}\\ 2\int_{0}^{a}f(x)\mathrm{d}x & f(x)\text{ 为偶函数}\end{cases};$$

*(2) 若$f(x)$在$[0,1]$上连续，则

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}f(\cos x)\mathrm{d}x;$$

*(3) 若$f(x)$在$[0,1]$上连续，则

$$\int_{0}^{\pi}xf(\sin x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)\mathrm{d}x.$$

例 3.4.13 计算$\int_{-1}^{1}(x^3+1)\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

解
$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}(x^3+1)\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x&=\int_{-1}^{1}x^3\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x+\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x\\&=0+2\int_{0}^{1}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

小提示

在定积分计算中，如果积分区间关于原点对称，则可以先考查被积函数奇偶性以便简化计算.

四、定积分的分部积分法

根据不定积分的分部积分法以及微积分基本公式有

$$\begin{aligned}\int_{a}^{b}u(x)v'(x)\mathrm{d}x&=\left[\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x\right]_{a}^{b}=\left[u(x)v(x)-\int v(x)u'(x)\mathrm{d}x\right]_{a}^{b}\\&=[u(x)v(x)]_{a}^{b}-\int_{a}^{b}v(x)u'(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

从而得**定积分的分部积分公式**

$$\int_a^b uv'\mathrm{d}x=[uv]_a^b-\int_a^b vu'\mathrm{d}x \tag{3-11}$$

或

$$\int_a^b u\,\mathrm{d}v=[uv]_a^b-\int_a^b v\,\mathrm{d}u. \tag{3-12}$$

小试牛刀

例 3.4.14　计算 (1) $\int_1^2(2x+1)\ln x\,\mathrm{d}x$；(2) $\int_0^{\frac{1}{2}}\arcsin x\,\mathrm{d}x$.

解　(1) $\int_1^2(2x+1)\ln x\,\mathrm{d}x=\int_1^2\ln x\,\mathrm{d}(x^2+x)=(x^2+x)\ln x\Big|_1^2-\int_1^2(x+1)\mathrm{d}x$

$$=6\ln2-\left[\frac{x^2}{2}+x\right]_1^2=6\ln2-\frac{5}{2}.$$

(2) $\int_0^{\frac{1}{2}}\arcsin x\,\mathrm{d}x=[x\arcsin x]_0^{\frac{1}{2}}-\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$

$$=\frac{\pi}{12}-(-\sqrt{1-x^2})\Big|_0^{\frac{1}{2}}=\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}-1.$$

大展身手

例 3.4.15　计算 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^2+x)\sin x\,\mathrm{d}x$.

解　$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^2+x)\sin x\,\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x^2\sin x\,\mathrm{d}x+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\,\mathrm{d}x=0+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\,\mathrm{d}x$

$$=-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\,\mathrm{d}(\cos x)=-2\left(x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,\mathrm{d}x\right)=2\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=2.$$

例 3.4.16　计算 $\int_1^4\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

解　$\int_1^4\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=2\int_1^4\ln x\,\mathrm{d}\sqrt{x}=[2\sqrt{x}\ln x]_1^4-2\int_1^4\sqrt{x}\,\frac{1}{x}\mathrm{d}x$

$$=[2\sqrt{x}\ln x-4\sqrt{x}]_1^4=4(2\ln2-1).$$

小提示

计算过程中，应注重积分方法和常用结论的综合运用.

小智囊*

利用分部积分法可以得到如下递推公式：

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2} & n\ \text{为正偶数}\\[2ex] \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot 1 & n\ \text{为大于 1 的正奇数}\end{cases}.$$

四、无穷区间的反常积分

应用案例

某投资公司正在评估一项长期基础设施投资项目，该项目的初始投资成本为 1 亿元，预计每年可以带来 1000 万元的均匀收益. 假设投资的年利率为 5%，且该项目可以无限期持续运营，试求该投资项目在无限期情况下的纯收益的(贴)现值.

这个纯收益的(贴)现值怎么计算呢？

定义 3.4.2 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上连续，取 $t>a$，如果极限 $\lim\limits_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x$ 存在，则称此极限值为函数 $f(x)$ 在无穷区间 $[a,+\infty)$ 上的**反常积分**，记作 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$，即

$$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x. \tag{3-13}$$

这时也称反常积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；否则，称反常积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

小提示

反常积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 发散时，仍可使用记号“$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$”，但只是形式上写出，不表示数值.

小试牛刀

例 3.4.17 计算 $\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty}\dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x$.

解 $\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty}\dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x=\lim\limits_{t\to+\infty}\int_{\frac{1}{2}}^{t}\dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x=\lim\limits_{t\to+\infty}\left(\left[-\dfrac{1}{x}\right]\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{t}\right)=\lim\limits_{t\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{t}+2\right)=2.$

类似地，有如下定义：

定义 3.4.3 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,b]$ 上连续，取 $t<b$. 如果极限 $\lim\limits_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)\mathrm{d}x$ 存

在,则称此极限值为函数 $f(x)$ 在无穷区间 $(-\infty,b]$ 上的反常积分,记作 $\int_{-\infty}^{b}f(x)\mathrm{d}x$,即

$$\int_{-\infty}^{b}f(x)\mathrm{d}x=\lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{b}f(x)\mathrm{d}x. \tag{3-14}$$

这时也称反常积分 $\int_{-\infty}^{b}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛;否则,称反常积分 $\int_{-\infty}^{b}f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

定义 3.4.4　设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续,任意的 $c\in(-\infty,+\infty)$,如果反常积分 $\int_{c}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 和 $\int_{-\infty}^{c}f(x)\mathrm{d}x$ 都收敛,则称上述两反常积分之和为函数 $f(x)$ 在无穷区间 $(-\infty,+\infty)$ 上的反常积分,记作 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$,即

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{c}f(x)\mathrm{d}x+\int_{c}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{c}f(x)\mathrm{d}x+\lim_{t\to+\infty}\int_{c}^{t}f(x)\mathrm{d}x. \tag{3-15}$$

这时也称反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛;否则称反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

一般情况下,c 取 0.

小智囊

若 $F'(x)=f(x)$,则

$$\int_{a}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=[F(x)]_{a}^{+\infty}=\lim_{x\to+\infty}F(x)-F(a);$$

$$\int_{-\infty}^{b}f(x)\mathrm{d}x=[F(x)]_{-\infty}^{b}=F(b)-\lim_{x\to-\infty}F(x);$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=[F(x)]_{-\infty}^{+\infty}=\lim_{x\to+\infty}F(x)-\lim_{x\to-\infty}F(x).$$

小试牛刀

例 3.4.18　计算 $\int_{0}^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$.

解　$\int_{0}^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=[\arctan x]_{0}^{+\infty}=\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x-\arctan 0=\dfrac{\pi}{2}$.

例 3.4.19　计算 $\int_{1}^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$.

解　$\int_{1}^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x}=[\ln x]_{1}^{+\infty}=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x-\ln 1$.

因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$,所以原式 $=+\infty$,即不存在,故 $\int_{1}^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$ 发散.

上式所写“=”无意义,仅为表达方便.

例 3.4.20　计算 $\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x$.

解 $\int_{-\infty}^{0} e^{x}\,dx = [e^{x}]_{-\infty}^{0} = e^{0} - \lim\limits_{x\to-\infty} e^{x} = 1 - 0 = 1.$

例 3.4.21 计算 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^{2}}$.

解 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^{2}} = [\arctan x]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$

例 3.4.22 计算 $\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \frac{1}{x^{2}}\sin\frac{1}{x}\,dx$.

解 $\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \frac{1}{x^{2}}\sin\frac{1}{x}\,dx = \left[\cos\frac{1}{x}\right]_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} = \lim\limits_{x\to+\infty}\cos\frac{1}{x} - \cos\frac{\pi}{2} = 1.$

大展身手

例 3.4.23 计算 $\int_{-\infty}^{0} x e^{x}\,dx$.

解
$$\int_{-\infty}^{0} x e^{x}\,dx = \left[\int x e^{x}\,dx\right]_{-\infty}^{0} = \left[\int x\,de^{x}\right]_{-\infty}^{0} = \left[x e^{x} - \int e^{x}\,dx\right]_{-\infty}^{0}$$
$$= [x e^{x} - e^{x}]_{-\infty}^{0} = -1 - \lim_{x\to-\infty}(x e^{x} - e^{x}) = -1.$$

例 3.4.24 证明反常积分 $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^{p}}$ 当 $p > 1$ 时收敛，$p \leqslant 1$ 时发散.

证明 $p = 1$ 见例 3.4.19；

当 $p \neq 1$ 时，$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^{p}} = \left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_{1}^{+\infty} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p} = \begin{cases} \frac{1}{p-1} & p > 1 \\ +\infty & p < 1 \end{cases}.$

综上，$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^{p}} = \begin{cases} \frac{1}{p-1} & p > 1 \\ +\infty & p \leqslant 1 \end{cases}.$

例 3.4.25 求【应用案例】中纯收益的(贴)现值.

解 由例 3.4.12 处【小智囊】，

已知 $C = 10000$(万元)，$a = 1000$(万元)，$r = 0.05$，$T \to +\infty$.

可得无限期的总收益现值为

$$R = \int_{0}^{+\infty} a e^{-rt}\,dt = \int_{0}^{+\infty} 1000 e^{-0.05t}\,dt = \left[\frac{1000}{-0.05}e^{-0.05t}\right]_{0}^{+\infty}$$
$$= \lim_{t\to+\infty}\frac{1000}{-0.05}e^{-0.05t} + \frac{1000}{0.05} = \frac{1000}{0.05} = 20000\text{(万元)}.$$

纯收益的(贴)现值为

$$L = R - C = 20000 - 10000 = 10000\text{(万元)}.$$

即该投资项目在无限期情况下的纯收益的(贴)现值为 1 亿元.

习题 3.4

小试牛刀

1. 求下列函数的导数.

(1) $\int_0^x \ln(1+t)\,dt$.　　(2) $\int_x^{-1} t^2\sin t\,dt$.

2. 计算下列定积分.

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x\,dx$.　　(2) $\int_1^2 \left(2e^x+\frac{1}{x}\right)dx$.

(3) $\int_0^2 (4-2x)(4-x^2)\,dx$.　　(4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\frac{x}{2}\,dx$.

(5) $\int_0^1 \frac{3^x+4\cdot 5^x}{2^x}\,dx$.　　(6) $\int_0^5 |2x-4|\,dx$.

(7) $\int_{(\frac{\pi}{6})^2}^{(\frac{\pi}{3})^2} \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$.　　(8) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x\sin x\,dx$.

(9) $\int_0^1 \frac{2x}{2+5x^2}\,dx$.　　(10) $\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$.

(11) $\int_{-3}^3 \frac{x^5\sin^2 x}{1+x^2+x^4}\,dx$.　　(12) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+x^3}{\cos^2 x}\,dx$.

3. 利用换元积分法计算下列定积分.

(1) $\int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx$.　　(2) $\int_4^{16} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\,dx$.

(3) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}$.　　(4) $\int_1^{64} \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt[3]{x}+1)}\,dx$.

4. 利用分部积分法计算下列定积分.

(1) $\int_0^{\sqrt{3}} \arctan x\,dx$.　　(2) $\int_1^2 x\ln x\,dx$.

(3) $\int_0^1 xe^{-x}\,dx$.　　(4) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\sin^2 x}\,dx$.

(5) $\int_1^e \ln^3 x\,dx$.　　(6) $\int_0^{2\pi} x\cos^2 x\,dx$.

5. 计算下列反常积分.

(1) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$.　　(2) $\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$.

(3) $\int_{-\infty}^0 \cos x\,dx$.　　(4) $\int_{-\infty}^0 xe^{-x^2}\,dx$.

(5) $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x\ln x}$.　　(6) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{9+3x^2}$.

6. 已知某投资总额为 100 万元，在 10 年中每年可获收益 20 万元，年利率 5%，试求：

(1) 该投资的纯收益的(贴)现值；

(2) 回收该项投资的时间.

大展身手

7. 求下列函数的导数.

(1) $\int_0^{\sin x} e^t \, dt$.　　(2) $\int_0^{x^2} \sin\sqrt{t} \, dt$.

8. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\int_0^x \dfrac{1-\cos t}{t} dt}{x}$.　　(2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\int_0^x [\ln(1+t)-t] dt}{e^{x^3}-1}$.

9. 计算下列定积分.

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \dfrac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} dx$.　　(2) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^3 x \, dx$.

(3) $\int_1^2 \dfrac{dx}{x(x^4+1)}$.　　(4) $\int_1^2 \dfrac{dx}{x+x^3}$.

(5) $\int_0^1 e^{\sqrt[3]{x}} dx$.　　(6) $\int_0^1 \dfrac{\sqrt{e^x}}{\sqrt{e^x+e^{-x}}} dx$.

(7) $\int_0^{\sqrt{\ln 2}} x^3 e^{-x^2} dx$.　　(8) $\int_1^2 \sqrt{x} \ln x \, dx$.

*(9) $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$.　　*(10) $\int_1^{\sqrt{3}} \dfrac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$.

*(11) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \dfrac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$.　　*(12) $\int_{-3}^{3} x^2 \sqrt{9-x^2} \, dx$.

10. 计算下列反常积分.

(1) $\int_0^{+\infty} \dfrac{dx}{(x+2)(x+3)}$.　　(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{dx}{x^2+4x+5}$.

(3) $\int_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x^2(x+1)}$.　　(4) $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} dx$.

11. 已知某企业按年利率 10%(连续复利)贷款 100 万元购买某设备，该设备 10 年后完全失去价值，在 10 年中公司每年收益为 b 万元，试求：

(1) b 为何值时，公司不会亏本？

(2) $b=20$ 万元时，纯收益的(贴)现值.

第五节　定积分的应用

应用案例

农业科技现代化是实现乡村振兴和粮食安全的重要保障，不仅提高了农业生产效率，还推动了资源节约和环境保护. 某农业科技公司正在评估一种新型智能灌溉设备的生产效率，已知边际产量 $Q'(t)$ 是一个关于时间 t 的连续函数（单位：台/小时），现需要计算该设备从时刻 a 到时刻 b 的总产量.

一、定积分的元素法

在前面我们用定积分表示过曲边梯形的面积和资本现值. 解决这两个问题的基本思想是：分割、近似代替、求和、取极限. 这四个步骤在实际应用时显得比较烦琐. 为简便起见，人们在许多应用学科中经常采用微元分析法（或称元素法），这个方法是根据上面四个步骤，但是更突出了“细分”与“求和”，将四个步骤简化成两个步骤.

第一步　无限细分区间 $[a,b]$，取有代表性的子区间 $[x,x+\mathrm{d}x]$（如图 3-11），求出相应于这个子区间的部分量 ΔU 的近似值

$$\Delta U \approx f(x)\cdot \mathrm{d}x,$$

这个值称为整体量的微元，记为 $\mathrm{d}U$，即 $\mathrm{d}U=f(x)\cdot \mathrm{d}x$.

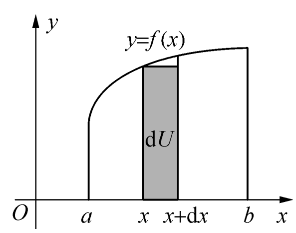


图 3-11

第二步　求和，把这些微元对区间 $[a,b]$ 无限求和，即得整体量 U 的值

$$U=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

说明　本章总假定函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，整体量 U 对区间 $[a,b]$ 具有可加性.

应用定积分的元素法，不仅可以计算曲边梯形的面积，还可以计算一些比较复杂的平面图形的面积及经济学中不均匀产出的产量.

在【应用案例】中，如果边际产量 $Q'(t)=q$（q 为常数，即产量均匀），那么总产量 $Q=q(b-a)$.

当边际产量不均匀时，采用如下步骤.

(1) 取微元　在区间 $[a,b]$ 上取有代表性的子区间 $[t,t+\mathrm{d}t]$，产量 ΔQ 的近似值为 $Q'(t)\mathrm{d}t$，称为产量微元，记为 $\mathrm{d}Q$，即

$$\mathrm{d}Q=Q'(t)\mathrm{d}t.$$

(2) 求积分　在时间段 $[a,b]$ 内总产量为

$$Q=\int_a^b Q'(t)\,\mathrm{d}t.$$

二、直角坐标系下平面图形的面积

小试牛刀

例 3.5.1　求由两条抛物线 $y=x^2$，$y^2=x$ 所围成的图形的面积.

解　解方程组 $\begin{cases} y=x^2 \\ y^2=x \end{cases}$，得两抛物线的交点为 $(0,0)$ 和 $(1,1)$（如图 3－12).

利用微元法，选 x 作为积分变量，无限细分区间 $[0,1]$，在小区间 $[x,x+\mathrm{d}x]$ 上与其相对应的小窄条的面积近似于高为 $\sqrt{x}-x^2$，底为 $\mathrm{d}x$ 的小矩形的面积，故面积微元 $\mathrm{d}A=(\sqrt{x}-x^2)\mathrm{d}x$，面积微元对区间 $[0,1]$ 无限求和，从而有面积

$$A=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)\mathrm{d}x=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{1}{3}.$$

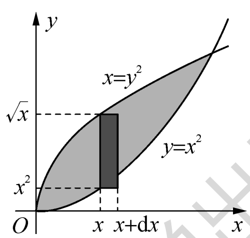


图 3－12

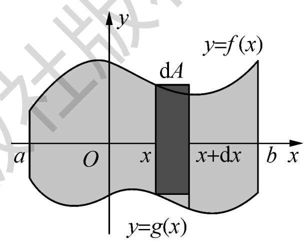


图 3－13

小智囊

设曲线 $y=f(x)$，$y=g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)\geqslant g(x)(x\in[a,b])$，则由曲线 $y=f(x)$，$y=g(x)$ 与直线 $x=a$，$x=b$ 所围成的平面图形（如图 3－13 所示）的面积

$$A=\int_a^b[f(x)-g(x)]\mathrm{d}x. \tag{3-16}$$

例 3.5.2　求由曲线 $y=\sin x$，$y=\sin 2x$ 在 $[0,\pi]$ 上所围图形的面积.

解　解方程组 $\begin{cases} y=\sin x \\ y=\sin 2x \end{cases}$，求得曲线在 $[0,\pi]$ 上的交点为 $(0,0)$，$\left(\frac{\pi}{3},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 和 $(\pi,0)$.（如图 3－14 所示），所以有

$$\begin{aligned} A&=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\sin 2x-\sin x)\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}(\sin x-\sin 2x)\mathrm{d}x \\ &=\left(-\frac{1}{2}\cos 2x+\cos x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}}+\left(-\cos x+\frac{1}{2}\cos 2x\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}=\frac{5}{2}. \end{aligned}$$

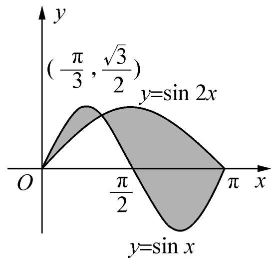


图 3－14

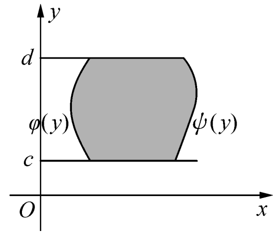


图 3－15

小智囊

类似地，可得由曲线 $x=\varphi(y)$，$x=\psi(y)(\psi(y)\geqslant\varphi(y))$ 与直线 $y=c$，$y=d$ 所围成的图形(如图 3－15 所示)面积

$$A=\int_c^d[\psi(y)-\varphi(y)]\mathrm{d}y \tag{3-17}$$

例 3.5.3　求抛物线 $y^2=2x$ 与直线 $y=x-4$ 所围图形面积.

解　解方程组 $\begin{cases}y^2=2x\\y=x-4\end{cases}$，求得交点为(2，−2)，(8，4)(如图 3－16 所示)．所以所求图形面积为

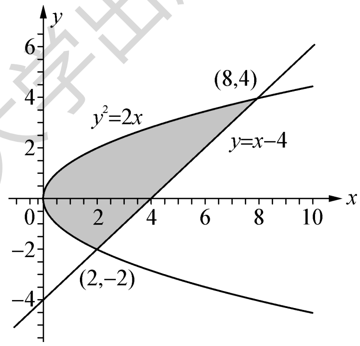


图 3－16

$$A=\int_{-2}^4\left(y+4-\frac{1}{2}y^2\right)\mathrm{d}y=\left(\frac{y^2}{2}+4y-\frac{y^3}{6}\right)\Bigg|_{-2}^4=18.$$

小提示

式(3－16)、(3－17)可以直接用于计算平面图形面积，主要区别在于积分变量的选择不同，应根据平面图形的特点以及计算的难易程度，做出恰当的选择.

大展身手

例 3.5.4　求由曲线 $y=x^2$，$y=x$，$y=2x$ 所围成的图形面积.

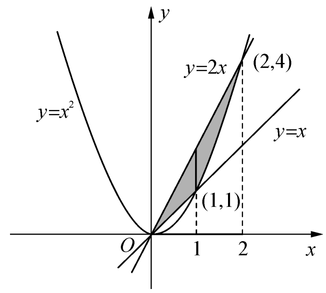


图 3-17

解　解方程组 $\begin{cases} y=x^2 \\ y=x \end{cases}$，求得交点为(0,0)，(1,1)（如图 3-17 所示）.

解方程组 $\begin{cases} y=x^2 \\ y=2x \end{cases}$，求得交点为(0,0)，(2,4).

所以所求图形面积为

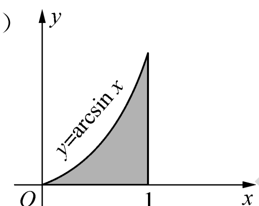
$$A=\int_0^1(2x-x)\mathrm{d}x+\int_1^2(2x-x^2)\mathrm{d}x=\left(\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1+\left(x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_1^2=\frac{7}{6}.$$

习题 3.5

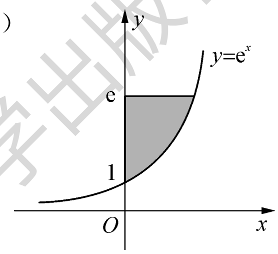
小试牛刀

1. 求下列图形中阴影部分的面积.

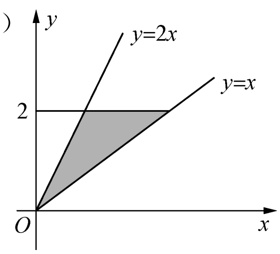
(1)



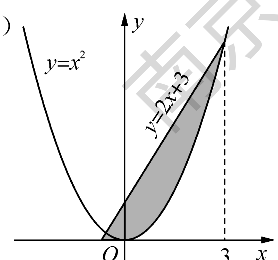
(2)



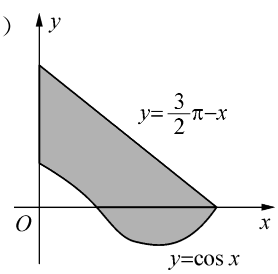
(3)



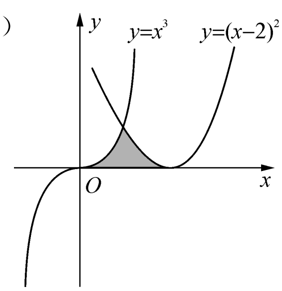
(4)



(5)



(6)



2. 求下列曲线所围成的图形的面积.

(1) $y=\cos x$，$y=\sin x$，$x=0$，$x=\pi$.　　(2) $y=\sqrt{x}$，$y=x$.

(3) $y=1-\dfrac{x^2}{4}$，$y=-\dfrac{5}{12}x$.　　(4) $xy=1$，$y=x$，$y=2$.

大展身手

3. 求由抛物线 $y=-x^2+4x-3$ 及其在点$(0,-3)$,$(3,0)$处的切线所围成的图形的面积.

4. 求由星形线 $x=a\cos^3 t$,$y=a\sin^3 t$ 所围图形(如图 3－18)的面积.

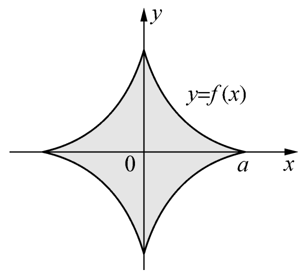


图 3－18

第六节　积分在经济分析中的应用

在企业经营管理过程中,管理者经常会面临有关成本和收益的分析,来帮助其在项目实施过程中能清醒地认识到以何种方式降低投入成本,提高价值收益,不断调整和优化企业的生产和经营策略.本节将介绍总成本和总收益等经济函数的相关计算和分析,并将总成本与收益、利润等进行比较,以获得有意义的分析指标.

一、由边际函数求经济函数

在微分学中,如果对总成本、总收益、总利润函数等求导,就得到其边际函数(边际成本、边际收益、边际利润等),由于积分与微分互为逆运算,所以对边际函数积分便可以得到经济函数.下面介绍如何应用不定积分求经济函数.

例 3.6.1　已知某产品总产量在时刻 t 时的变化率为 $Q'(t)=30+12\sqrt{t}$,求该产品的总产量 Q 与时间 t 的函数关系式 $Q(t)$.

解　该产品的总产量 Q 与时间 t 的函数关系式为

$$Q(t)=\int Q'(t)\mathrm{d}t=\int(30+12\sqrt{t})\mathrm{d}t=30t+12\cdot\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+C=30t+8\sqrt{t^3}+C.$$

由 $Q(0)=0$,代入上式得 $C=0$,所以该产品的总产量函数为 $Q(t)=30t+8t^{\frac{3}{2}}(t\geqslant 0)$.

例 3.6.2　设某产品的边际成本函数 $C'(q)=600+2q$(元/件),其中 q 为产量,且生产 100 件产品的成本为 80000 元,求总成本函数和固定成本.

解　总成本函数 $C(q)$ 是边际成本函数的一个原函数,因此,总成本函数为

$$C(q)=\int C'(q)\mathrm{d}q=\int(600+2q)\mathrm{d}q=600q+q^2+C.$$

因为 $C(100)=80000$，代入上式得 $C=10000$.

所以总成本函数为 $C(q)=q^2+600q+10000(q\in\mathbf{N})$.

固定成本为 $C(0)=10000$(元).

例 3.6.3 已知某产品的边际收益函数 $R'(q)=200-\dfrac{2}{3}q$，其中 q 为销售量，求总收益函数及需求函数.

解 总收益函数为 $R(q)=\int R'(q)\mathrm{d}q=\int\left(200-\dfrac{2}{3}q\right)\mathrm{d}q=200q-\dfrac{1}{3}q^2+C$.

因为 $R(0)=0$，代入上式得 $C=0$.

所以总收益函数为 $R(q)=200q-\dfrac{1}{3}q^2(q\in\mathbf{N})$.

由 $R(q)=p\cdot q=200q-\dfrac{1}{3}q^2=(200-\dfrac{1}{3}q)q$，得 $p=200-\dfrac{1}{3}q$，那么 $q=600-3p$，这里的销售量 q 可以理解为需求量 Q，

于是需求函数为 $Q(p)=600-3p(0\leqslant p\leqslant 200)$.

例 3.6.4 设某商品的需求量 Q 是价格 p 的函数，即 $Q=Q(p)$，该商品的最大需求量为 2000(即 $p=0$ 时，$Q=2000$)，已知边际需求函数 $Q'(p)=-2000\ln 3\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^p$，求该商品的需求函数.

解 需求函数为
$$Q(p)=\int Q'(p)\mathrm{d}p=\int\left[-2000\ln 3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^p\right]\mathrm{d}p$$
$$=-2000\ln 3\cdot\frac{1}{\ln\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^p+C=2000\left(\frac{1}{3}\right)^p+C.$$

因为 $Q(0)=2000$，代入上式得 $C=0$.

所以该商品的需求函数为 $Q(p)=2000\left(\dfrac{1}{3}\right)^p(p\geqslant 0)$.

例 3.6.5 某工厂生产某款电视机 q 百台时的边际成本表示为 $C'(q)=0.02q+10$(万元/百台)，边际收益为 $R'(q)=30-0.02q$ (万元/百台)，固定成本为 100 万元，试求该款电视机的利润函数 $L(q)$，并讨论最大利润问题.

解 总成本函数为 $C(q)=\int C'(q)\mathrm{d}q=\int(0.02q+10)\mathrm{d}q=0.01q^2+10q+C_1$.

因为 $C(0)=100$，代入上式得 $C_1=100$.

所以总成本函数为 $C(q)=0.01q^2+10q+100$.

总收益函数为 $R(q)=\int R'(q)\mathrm{d}q=\int(30-0.02q)\mathrm{d}q=30q-0.01q^2+C_2$.

因为 $R(0)=0$，代入上式得 $C_2=0$.

所以总收益函数为 $R(q)=30q-0.01q^2$.

于是该款电视机的总利润函数为
$$L(q)=R(q)-C(q)=30q-0.01q^2-(0.01q^2+10q+100)$$
$$=-0.02q^2+20q-100(q\geqslant 0).$$

令 $L'(q)=-0.04q+20=0$，解得 $q=500$(百台).

因为 $L''(q)=-0.04<0$，

所以 $q=500$ 时，利润最大，此时边际收益等于边际成本，利润为

$L(500)=-0.02\times500^2+20\times500-100=4900$(万元).

即该电视机的产量为 5 万台时，能获得最大利润 4900 万元.

二、由边际函数求经济总量及其改变量

如果已知某经济量的变化率(即边际经济函数)，需要求该经济函数在某一条件下的经济总量或某一时期、某一区间内的经济改变量，则用定积分来解决较方便. 下面介绍如何应用定积分求经济总量及其改变量.

例 3.6.6　已知某玩具厂生产的某款遥控车，其总产量 Q 在时刻 t 的变化率 $Q'(t)=-\dfrac{3}{5}t^2+2t+80$(万辆/年)，求前 5 年的总产量.

解　总产量 $Q(t)$ 是变化率 $Q'(t)$ 的原函数，因此，从开始到第 5 年末的总产量：

$$Q(5)-Q(0)=\int_0^5 Q'(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^5\left(-\frac{3}{5}t^2+2t+80\right)\mathrm{d}t$$

$$=\left(-\frac{1}{5}t^3+t^2+80t\right)\Big|_0^5=400\text{(万辆)}.$$

即前 5 年的总产量为 400 万辆.

例 3.6.7　已知生产某款服装的边际成本函数 $C'(q)=600-2q$ (元/件)，且固定成本为 1 万元，其中 q 为产量. 求该款服装产量为 100 件时的总成本，并求产量从 100 件再增加 100 件时要追加多少投资.

解　固定成本为 $C(0)=10000$(元).

由公式 $\int_0^{100}C'(q)\,\mathrm{d}q=C(100)-C(0)$，

得到 $C(100)=\int_0^{100}C'(q)\,\mathrm{d}q+C(0)=\int_0^{100}(600-2q)\,\mathrm{d}q+C(0)$

$=(600q-q^2)\Big|_0^{100}+10000=60000$(元).

即该款服装产量为 100 件时的总成本是 6 万元.

因为 $C(200)-C(100)=\int_{100}^{200}(600-2q)\,\mathrm{d}q=(600q-q^2)\Big|_{100}^{200}=30000$(元).

所以该款服装产量从 100 件再增加 100 件时，需要追加投资 3 万元.

例 3.6.8　已知生产某商品 q 件时的边际收益为 $R'(q)=-0.08q+25$ (万元/件)，边际成本为 $C'(q)=5$(万)，求产量从 250t 增加到 300 件时的销售收益 $R(q)$、总成本 $C(q)$、利润 $L(q)$ 的改变量(增量).

解　边际利润为

$$L'(q)=R'(q)-C'(q)=-0.08q+20.$$

$$R(300)-R(250)=\int_{250}^{300}(-0.08q+25)\,\mathrm{d}q=150\text{(万元)}.$$

$$C(300)-C(250)=\int_{250}^{300}5\mathrm{d}q=250(\text{万元}).$$

$$L(300)-L(250)=\int_{250}^{300}(-0.08q+20)\mathrm{d}q=-100(\text{万元}).$$

例 3.6.9 已知某产品总产量的变化率是时间 t 的函数：$Q'(t)=3t+6$(万件/年)，求第一个五年和第二个五年的总产量各为多少件？

解 第一个五年的总产量为

$$Q(5)-Q(0)=\int_0^5(3t+6)\mathrm{d}t=\left(\frac{3t^2}{2}+6t\right)\bigg|_0^5=67.5(\text{万件}).$$

第二个五年的总产量为

$$Q(10)-Q(5)=\int_5^{10}(3t+6)\mathrm{d}t=\left(\frac{3t^2}{2}+6t\right)\bigg|_5^{10}=142.5(\text{万件}).$$

例 3.6.10 已知生产某款游戏机 q 台时的边际收益 $R'(q)=50-q$ (元/台)，求

(1) 生产 10 台游戏机时的总收益及平均收益；

(2) 游戏机从 10 台增加到 20 台时，总收益的变化以及对应的平均收益.

解 (1)因为 $R'(q)=50-q$，

所以 $R(10)=\int_0^{10}R'(q)\mathrm{d}q+R(0)=\int_0^{10}(50-q)\mathrm{d}q+0=\left(50q-\frac{1}{2}q^2\right)\bigg|_0^{10}=450(\text{元}).$

$\bar{R}(10)=\dfrac{R(10)}{10}=45(\text{元/台}).$

即生产 10 台游戏机时的总收益为 450 元，平均收益为每台 45 元.

(2) 游戏机从 10 台增加到 20 台时，

$R(20)-R(10)=\int_{10}^{20}R'(q)\mathrm{d}q=\int_{10}^{20}(50-q)\mathrm{d}q=\left(50q-\frac{1}{2}q^2\right)\bigg|_{10}^{20}=350(\text{元}).$

$\dfrac{R(20)-R(10)}{20-10}=\dfrac{350}{10}=35(\text{元 / 台}).$

即该款游戏机从 10 台增加到 20 台时，总收益增加 350 元，平均收益为每台 35 元.

例 3.6.11 设某产品的总成本 C (万元)的变化率是产量 q (百台)的函数：$C'(q)=4+\dfrac{q}{4}$，总收益 R (万元)的变化率是产量 q 的函数：$R'(q)=8-q$.

(1) 求产量由 100 台增加到 500 台时总成本与总收益各增加多少？

(2) 已知固定成本 $C(0)=1$(万元)，分别求出总成本、总利润与总产量的函数关系式.

解 (1) 产量由 100 台增加到 500 台时总成本与总收益分别为

$$C(5)-C(1)=\int_1^5\left(4+\frac{q}{4}\right)\mathrm{d}q=\left(4q+\frac{q^2}{8}\right)\bigg|_1^5=19(\text{万元}),$$

$$R(5)-R(1)=\int_1^5(8-q)\mathrm{d}q=\left(8q-\frac{q^2}{2}\right)\bigg|_1^5=20(\text{万元}).$$

(2) $C(q)=\int\left(4+\dfrac{q}{4}\right)\mathrm{d}q=4q+\dfrac{q^2}{8}+C.$

又 $C(0)=1$，得 $C=1$，故总成本函数 $C(q)=4q+\dfrac{q^2}{8}+1$.

由于 $R'(q)=8-q$，且 $R(0)=0$，故总边际收益 $R(q)=0+\int_0^q(8-q)\mathrm{d}q=8q-\dfrac{q^2}{2}$.

由 $L(q)=R(q)-C(q)$，得总利润函数为

$$L(q)=-1+4q-\frac{5q^2}{8}.$$

习题 3.6

小试牛刀

1. 已知生产某产品 q 件时的边际成本为 $180q^{-\frac{1}{3}}$，且生产 1000 件的成本为 29000 元，求该产品的成本函数 $C(q)$ 和固定成本.

2. 已知销售某种医疗设备的边际收益函数为 $6q-q^2$(万元/万台)，其中 q 为销售量. 试求该设备的总收益函数和收益最大时的销售量和最大收益.

3. 某厂生产的某款一次性水杯，其总产量的变化率 $Q'(t)=6t+10$(万个/年)，求该款水杯从第 5 年末到第 10 年末的总产量.

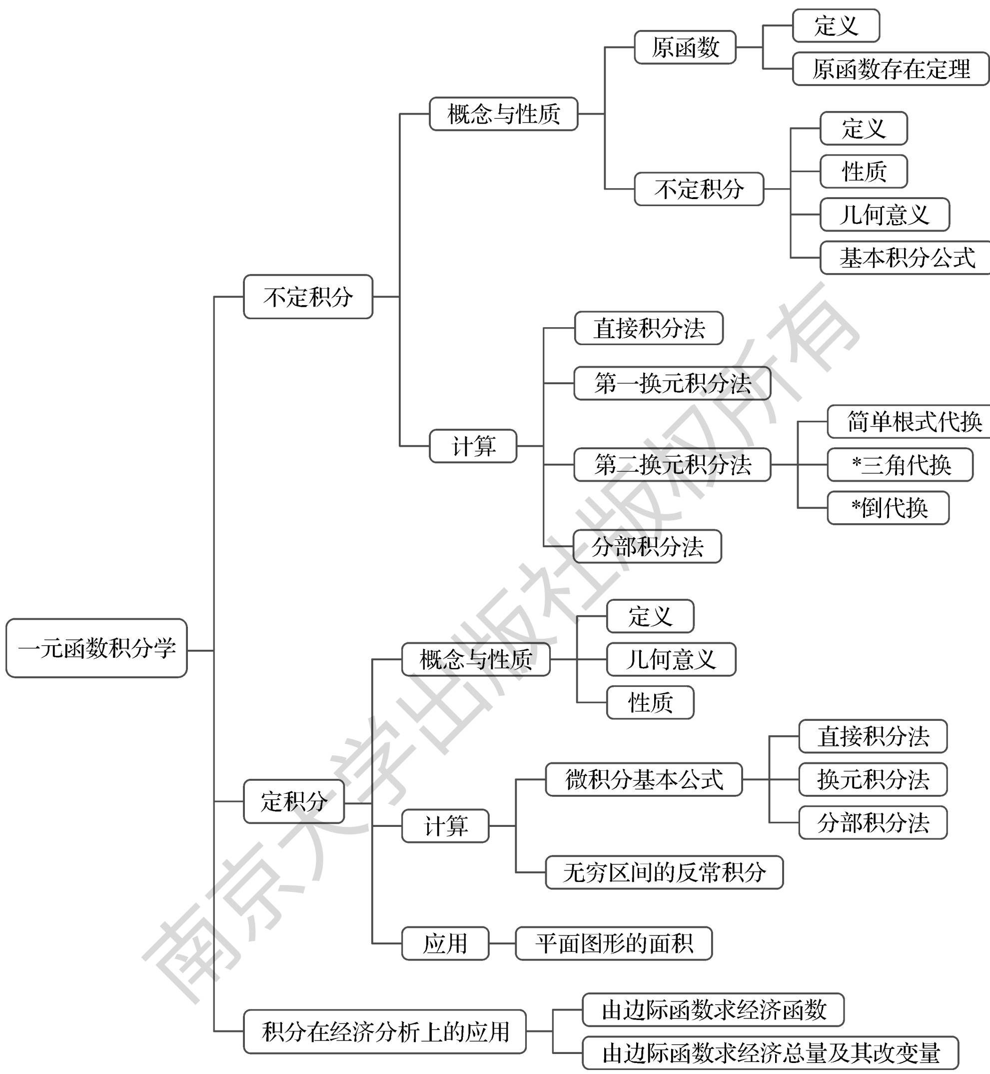
4. 已知销售某款豆浆机 q 件时的边际收益 $R'(q)=300-\dfrac{2}{5}q$ (元/件)，求该款豆浆机的销量从 100 件增加到 300 件时所得的销售收益.

大展身手

5. 已知某商品的边际收益函数为 $5-q$，其中 q 为销售量，试求该商品的总收益函数 $R(q)$ 平均收益函数 $\overline{R}(q)$ 以及需求函数 $Q(p)$.

6. 已知某厂生产某种化肥的边际成本为 $C'(q)=100+\dfrac{50}{\sqrt{q}}$ (元/吨)，其中 q 为产量. 求当化肥产量从 10000 吨增加到 40000 吨时，需要增加多少成本，并求此时平均每吨要增加多少成本.

本章结构图



趣味阅读(三)

中国南北朝时期数学家祖暅

祖暅,字景烁,(456 年—536 年)范阳遒县(今河北涞水)人.中国南北朝时期数学家、天文学家,祖冲之之子.同父亲祖冲之一起圆满解决了球面积的计算问题,得到正确的体积公式,并据此提出了著名的“祖暅原理”.

祖暅原理,又称等幂等积定理,是一个涉及几何求体积的著名命题.《缀术》是中国南北朝时期的一部算经,汇集了祖冲之父子的数学研究成果.祖冲之父子总结了魏晋时期著名数学家刘徽的有关工作,在《缀术》有云“幂势既同则积不容异”,即等高的两立体,若其任意高处的水平截面积相等,则这两立体体积相等.

祖暅原理主要应用于计算一些复杂的几何体的体积.在西方,直到17世纪,这一原理才由意大利数学家卡瓦列里(Bonaventura · Cavalieri,1589年—1647年)发现.其在于1635年出版的《连续不可分几何》中提出了等积原理,所以西方人称之为“卡瓦列里原理”.其实,他的发现要比我国的祖暅晚1100多年.

由于家学渊源,祖暅从小也钻研数学.祖暅有巧思入神之妙,当他读书思考时,十分专一,即使有雷霆之声,他也听不到.有一次,他边走路边思考数学问题,走着走着,竟然撞了对面过来的仆射徐勉.“仆射”是很高的官,徐勉是朝廷要人,倒被这位年轻小子碰得够戗,不禁大叫起来,这时祖暅方才醒悟.

据《南史》和《北史》记载,梁朝与北魏在边境地区常有冲突.在一次战役中,梁朝军队失利,祖暅作为随军人员被北魏俘虏.北魏方面得知他是祖冲之的儿子,且本人也是一位杰出的学者,因此对他颇为礼遇.北魏朝廷安排他住进了驿站,并提供了良好的生活条件,希望他能留在北魏为朝廷效力.祖暅在此期间并未放弃学术研究,继续钻研数学和天文学,甚至与北魏的学者进行了交流.后来,经过梁朝与北魏的谈判,祖暅得以返回梁朝.

祖暅在科学上也取得了重大成就,《大明历》就是由于他的建议,才被梁朝采用.祖暅还有不少其他科学发现,例如肯定北极星并非真正在北天极,而要偏离1度多等等.算得这些结果,同他丰富的数学知识是分不开的.他还结识了一位天文学的爱好者信都芳,两人常常在一起研讨天文、数学,十分投机.祖暅把自己的学问毫无保留地教给信都芳,使他有很大进步.此外,他还研制了铜日圭、漏壶等精密观测仪器多种.祖暅的儿子祖皓,续传家学,后来也成了数学家.

单元测试三(基础题)

一、选择题(每题3分,共18分)

1. 在(a,b)内,若$f'(x)=g'(x)$,则一定有(　　).

A. $f(x)=g(x)$　　B. $\int \mathrm{d}f(x)=\int \mathrm{d}g(x)$

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=\int g(x)\mathrm{d}x$　　D. $\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]'=\left[\int g(x)\mathrm{d}x\right]'$

2. 下列各式中正确的是(　　).

A. $\int \frac{1}{1-x}\mathrm{d}x=\ln|1-x|+C$　　B. $\int \cos 2x\,\mathrm{d}x=\sin 2x+C$

C. $\int \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x=\ln(1+\mathrm{e}^x)+C$　　D. $\int \frac{\tan^2 x}{1-\sin^2 x}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\tan^3 x+C$

3. 设函数 $\Phi(x)=\int_{x^2}^{2}\mathrm{e}^t\cos t\,\mathrm{d}t$，则函数 $\Phi(x)$ 的导数 $\Phi'(x)$ 等于(　　).

A. $2x\mathrm{e}^{x^2}\cos x^2$　　B. $-2x\mathrm{e}^{x^2}\cos x^2$　　C. $-2x\mathrm{e}^x\cos x$　　D. $-\mathrm{e}^{x^2}\cos x^2$

4. 设 $f(x)$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 的连续函数，则与 $\int_1^2 f\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$ 的值相等的定积分为(　　).

A. $\int_1^2 \frac{f(x)}{x^2}\mathrm{d}x$　　B. $\int_2^1 \frac{f(x)}{x^2}\mathrm{d}x$　　C. $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f(x)}{x^2}\mathrm{d}x$　　D. $\int_1^{\frac{1}{2}} \frac{f(x)}{x^2}\mathrm{d}x$

5. 定积分 $\int_0^{\pi}|\cos x|\,\mathrm{d}x=$(　　).

A. -2　　B. 0　　C. 2　　D. 1

6. 设 $\int_a^{+\infty}\frac{1}{x\ln^2 x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2\ln 2}$，则积分下限 a 的值为(　　).

A. 2　　B. 4　　C. 6　　D. 8

二、填空题(每空 3 分，共 18 分)

1. 若 $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$，则 $\int \mathrm{e}^{-x}f(\mathrm{e}^{-x})\mathrm{d}x=$________.

2. 设 $f(x)$ 的一个原函数为 x^2，则 $\int f'(x)\mathrm{d}x=$________.

3. 已知 $\Phi(x)=\int_0^x \sin t^2\,\mathrm{d}t$，则 $\Phi'(x)=$________.

4. $\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x=$________.

5. 函数 $f(x)=x^2$ 在 $[0,1]$ 上的平均值是________.

6. $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^4}\mathrm{d}x=$________.

三、计算题(每题 4 分，共 48 分)

1. $\int \frac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

2. $\int \frac{x}{\sqrt{2-x}}\mathrm{d}x$.

3. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-x-6}$.

4. $\int \frac{\mathrm{e}^x\mathrm{d}x}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}}$.

5. $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\cos^2(1-3x^2)}$.

6. $\int \frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x$.

7. $\int_4^9 \sqrt{x}(1+\sqrt{x})\mathrm{d}x$.

8. $\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{2x+1}}\mathrm{d}x$.

9. $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^x}$.

10. $\int_{-1}^{1} x\arctan x\,\mathrm{d}x$.

11. $\int_{-\infty}^{1}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.

12. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x$.

四、综合题(第 1 题 4 分,第 2、3 题各 6 分,共 16 分)

1. 求由直线 $y=x$,$y=2x$ 及 $y=2$ 所围图形面积.

2. 求由抛物线 $x^2=4y(x>0)$,直线 $y=1$ 及 y 轴所围成的平面图形的面积.

3. 已知某产品的边际成本 $C'(q)=3+q$ (万元/百台),边际收益 $R'(q)=15-q$ (万元/百台),试求:

(1) 产量 q 从 200 台增加到 300 台时总成本和总收益各增加多少?

(2) 产量为多少时可获得最大利润?

(3) 在最大利润产量基础上再生产 100 台,总利润会发生什么变化?

单元测试三(提升题)

一、选择题(每题 3 分,共 18 分)

1. 若 $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$,则 $\int f(b-ax)\mathrm{d}x=(\quad)$.

A. $F(b-ax)+C$　　B. $-\dfrac{1}{a}F(b-ax)+C$

C. $aF(b-ax)+C$　　D. $\dfrac{1}{a}F(b-ax)+C$

2. 若 $\int f(x)\mathrm{d}x=3\mathrm{e}^{\frac{x}{3}}-x+C$,则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=(\quad)$.

A. 3　　B. -3　　C. $\dfrac{1}{3}$　　D. $-\dfrac{1}{3}$

3. 若 $f(x)=\mathrm{e}^{-x}$,则 $\int\dfrac{f'(\ln x)}{x}\mathrm{d}x=(\quad)$.

A. $\dfrac{1}{x}+C$　　B. $\dfrac{1}{x}$

C. $-\ln x+C$　　D. $\ln x+C$

4. 下列不等关系中不正确的是(　　).

A. $\int_0^1 x\,\mathrm{d}x\geqslant\int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x$　　B. $\int_1^2 x\,\mathrm{d}x\geqslant\int_1^2 x^3\,\mathrm{d}x$

C. $\int_1^2 x\,\mathrm{d}x\geqslant\int_1^2 \ln x\,\mathrm{d}x$　　D. $\int_0^1 x\,\mathrm{d}x\geqslant\int_0^1 \ln(x+1)\mathrm{d}x$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \sin t\,\mathrm{d}t}{\int_0^x t\,\mathrm{d}t}$ 的值等于(　　).

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 2

6. 下列反常积分中收敛的是(　　).

A. $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$　　B. $\int_1^{+\infty}\dfrac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$

C. $\int_1^{+\infty}\dfrac{1+x}{1+x^2}\mathrm{d}x$　　D. $\int_1^{+\infty}\dfrac{1+x}{x^3}\mathrm{d}x$

二、填空题(每空 3 分,共 18 分)

1. 已知 $f(\cos x)=\sin^2 x$,则 $\int f(x-1)\mathrm{d}x=$________.

2. $\int \dfrac{\sin x\cos^3 x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x=$________.

3. 设函数 $\Phi(x)=\int_0^{x^2}\ln(1+t)\mathrm{d}t$,则$\Phi''(1)=$________.

4. 定积分 $\int_{-1}^{1}(x\cos^4 x+|x|)\mathrm{d}x$ 的值为________.

5. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^{x^2}\arcsin 2\sqrt{t}\,\mathrm{d}t}{x^3}=$________.

6. $\int_2^{+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{(x-1)^3}}\mathrm{d}x=$________.

三、计算题(每题 4 分,共 48 分)

1. $\int \dfrac{3x^2-2x-\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

2. $\int \dfrac{1}{(x^2+1)(x^2+2)}\mathrm{d}x$.

3. $\int \dfrac{3x+2}{\sin^2 x}\mathrm{d}x$.

4. $\int \dfrac{\ln(1+x^2)}{x^3}\mathrm{d}x$.

5. $\int \dfrac{x\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

6. $\int \dfrac{\ln x+1}{(x\ln x)^3}\mathrm{d}x$.

7. $\int_{-1}^{1}(\sqrt{1+x^2}+x)^2\mathrm{d}x$.

8. $\int_0^4 \arctan\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$.

*9. $\int_0^{\sqrt{2}}\dfrac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}x$.

*10. $\int_{\sqrt{3}}^{3}\dfrac{1}{x^2\sqrt{x^2+9}}\mathrm{d}x$.

11. $\int_2^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x^2+x-2}$.

12. $\int_0^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{4x^2+4x+2}$.

四、综合题(第 1、2 题各 4 分,第 3 题 8 分,共 16 分)

1. 求曲线 $y=\mathrm{e}^x$,$y=\mathrm{e}^{-x}$ 与直线 $x=1$ 所围平面图形的面积.

2. 设平面图形 D 由曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 与其过原点的切线及 y 轴所围成,试求所围平面图形 D 的面积.

3. 已知某工厂需要购置一批设备,现在计划投入 500 万元,在 10 年中每年收益为 100 万元(该设备 10 年后完全失去价值),如果连续年利率为 6%,求 10 年期间:

(1) 总收益的现值;

(2) 纯收益的(贴)现值;

(3) 投资回收期.