

21世纪应用型本科院校规划教材



“十三五”江苏省高等学校重点教材

线性代数及其应用

(第二版)

陈荣军 钱峰 主编



南京大学出版社

内容提要

本书是在应用型本科院校大力推进公共数学改革的背景下,由常州工学院理学院组织编写的应用型本科省级重点教材.内容包括行列式、矩阵及其运算、矩阵的初等变换与线性方程组、向量组的线性相关性、相似矩阵及二次型、线性空间与线性变换六个章节.教材体现应用本科特色,立足知识、融入实验、强调实践、渗透文化,帮助学生做到“知识、能力、文化”三方面的有效训练.教材在教学内容的选取和编排上,力图做到重点突出、层次清晰、难度得当,贴近应用型院校学生实际.同时教材开辟拓展训练真题解析栏目,满足考研学生需要.另外,与传统教材相比,本书具有纸质内容与数字化资源一体化设计的特点,线上资源涵盖教学要求、知识要点等内容,有利于学生自主学习,找到学习捷径.

本书可作为高等学校理、工、管等各专业线性代数课程教材,也可作为教学参考书和考研用书.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数及其应用 / 陈荣军, 钱峰主编. — 2 版.

南京: 南京大学出版社, 2025. 8. — ISBN 978-7-305-29269-9

I. O151.2

中国国家版本馆 CIP 数据核字第 20256YL838 号

出版发行 南京大学出版社

社 址 南京市汉口路 22 号 邮 编 210093

书 名 线性代数及其应用

XIANXING DAISHU JIQI YINGYONG

主 编 陈荣军 钱 峰

责任编辑 吴 华 编辑热线 025-83596997

照 排 南京开卷文化传媒有限公司

印 刷 江苏扬中印刷有限公司

开 本 718 mm×1000 mm 1/16 开 印张 13 字数 240 千

版 次 2025 年 8 月第 2 版

印 次 2025 年 8 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-305-29269-9

定 价 39.80 元

网 址: <http://www.njupco.com>

官方微博: <http://weibo.com/njupco>

微信公众号: njupress

销售咨询热线: (025)83594756

* 版权所有, 侵权必究

* 凡购买南大版图书, 如有印装质量问题, 请与所购

图书销售部门联系调换

前 言

线性代数课程是应用型本科院校一门重要的必修课,其理论与方法广泛应用于后续课程及工程实践.本教材是我们根据多年教学经验,结合多元化学情条件与信息化教学形势编写而成,第一版已在校内使用多年,获得较好教学效果,受到授课教师与学生的一致好评.此次修订,主要是修正了第一版中出现的错误,更新了部分实用案例,并在每章增加了延伸阅读.

教材的主要特点如下:

1. 通过实际案例引出知识点,将知识点明确化,同时培养学生线性代数思想和理论运用能力;
2. 利用电子化二维码技术,方便学生在线了解重点与难点,找到学习捷径;
3. 在精简相关繁琐理论推导和计算的基础上,选题力图做到整体层次分明而综合,题型精粹而全面,同时开辟拓展训练真题解析栏目,满足考研学生需要;
4. 融入实验教学内容,引进 Matlab 数学软件,注重理论的实践与应用;
5. 介绍有关数学历史人物生平,有助于学生数学文化素养的提升.

本书的编写得到了理学院全体数学老师无私且大力的帮助,得到了学校有关部门和领导的大力支持,在此向他们表示衷心的感谢.

本书是编者在新工科背景下公共数学改革的一种探索,由于水平有限,教材中错误难免,恳请读者批评指正,本书的配套电子资源可扫描扉页二维码获取.

编 者

2025 年 2 月

目 录

第 1 章 行列式	1
1.1 全排列及其逆序数	1
1.2 n 阶行列式的定义	3
1.3 行列式的性质	8
1.4 行列式按行(列)展开	14
1.5 克拉默(Cramer)法则	21
延伸阅读一	25
基本练习题一	27
综合练习题一	29
拓展训练一	30
实际案例分析一	31
Matlab 应用一:行列式的计算	32
第 2 章 矩阵及其运算	36
2.1 矩阵的概念	37
2.1.1 矩阵的概念	37
2.1.2 几种特殊矩阵	39
2.1.3 矩阵相等	41
2.2 矩阵的运算	42
2.2.1 矩阵的加法	42
2.2.2 矩阵的数乘	43
2.2.3 矩阵的乘法	44
2.2.4 矩阵的转置	47
2.2.5 方阵的行列式	49
2.3 逆矩阵	49
2.3.1 逆矩阵的概念和性质	49
2.3.2 逆矩阵的计算	51

延伸阅读二	55
基本练习题二	57
综合练习题二	60
拓展训练二	61
实际案例分析二	63
Matlab 应用二:矩阵与逆矩阵的运算	64
第 3 章 矩阵的初等变换与线性方程组	69
3.1 矩阵的初等变换	69
3.1.1 矩阵的初等变换	71
3.1.2 初等矩阵	73
3.2 矩阵的秩	78
3.3 线性方程组的解	80
延伸阅读三	85
基本练习题三	87
综合练习题三	89
拓展训练三	90
实际案例分析三	93
Matlab 应用三:矩阵的初等变换与线性方程组的解	95
第 4 章 向量组的线性相关性	98
4.1 向量组及其线性组合	98
4.2 向量组的线性相关性	101
4.3 向量组的秩	105
4.4 线性方程组的解的结构	107
4.4.1 齐次线性方程组的解的结构	107
4.4.2 非齐次线性方程组的解的结构	111
4.5 向量空间	113
4.5.1 向量空间	113
4.5.2 子空间	113
4.5.3 基、维数、坐标	114
延伸阅读四	118
基本练习题四	120

综合练习题四	123
拓展训练四	124
实际案例分析四	125
Matlab 应用四:向量组的线性相关性	126
第 5 章 相似矩阵及二次型	130
5.1 向量的内积与正交矩阵	130
5.1.1 向量内积与正交的概念	130
5.1.2 施密特(Schmidt)正交化法	132
5.1.3 正交矩阵	133
5.2 方阵的特征值与特征向量	134
5.2.1 特征值与特征向量的概念	134
5.2.2 特征值与特征向量的求法	135
5.3 相似矩阵	136
5.3.1 相似矩阵的概念	136
5.3.2 相似矩阵的性质	137
5.3.3 矩阵相似于对角矩阵的条件	137
5.4 实对称矩阵的对角化	139
5.4.1 实对称矩阵的特征值与特征向量	139
5.4.2 实对称矩阵的相似对角矩阵的求法	140
5.5 二次型及其标准形	142
5.5.1 二次型及标准型的概念	142
5.5.2 化二次型为标准形	144
5.6 正定二次型	147
延伸阅读五	149
基本练习题五	151
综合练习题五	153
拓展训练五	153
实际案例分析五	156
Matlab 应用五:矩阵的特征值与特征向量	157
第 6 章 线性空间与线性变换	163
6.1 线性空间的定义与性质	163

6.2	维数、基与坐标	166
6.3	基变换与坐标变换	168
6.4	线性变换	172
6.4.1	线性变换	173
6.4.2	线性变换的性质	174
6.5	线性变换的矩阵	176
6.5.1	线性变换在一个基下的矩阵	176
6.5.2	线性变换在不同基下的矩阵	178
	延伸阅读六	180
	基本练习题六	183
	综合练习题六	184
	实际案例分析六	185
习题答案		187
参考文献		200

第 1 章 行列式

实际案例

平面上已知三点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 和 $C(x_3, y_3)$, 求三角形 ABC 面积 S .

$$S = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1 - x_3 y_2 - x_2 y_1 - x_1 y_3$$

这个公式是通过使用三点的坐标来计算三角形面积的一种方法。具体来说,它是通过构造一个行列式来计算三角形面积的,行列式的值代表了由这三个点确定的三角形面积.这种方法提供了一种直接而简洁的方式来计算任意三角形的面积,而不需要考虑三角形的具体形状或边的长度.

行列式是人们在求解线性方程组的过程中建立起来的,是线性代数中常用的工具.本章主要介绍 n 阶行列式的定义、性质及其计算方法,同时还要介绍用 n 阶行列式求解 n 元线性方程组的克莱姆法则.

—— 1.1 全排列及其逆序数 ——

定义 1.1 把 n 个不同的元素排成一排,叫作这 n 个元素的全排列(简称排列).

例如,自然数 $1, 2, 3$ 构成的不同排列有 $3! = 6$ 种.

$123, 132, 213, 231, 312, 321$

例 1.1 互异元素 $p_1, p_2, \dots, p_n$ 构成的不同排列有 $n!$ 种.

证明 在 n 个元素中选取 1 个, n 种取法.

在剩余 $n-1$ 个元素中选取 1 个, $n-1$ 种取法.

在剩余 $n-2$ 个元素中选取 1 个, $n-2$ 种取法.

.....

在剩余 2 个元素中选取 1 个, 2 种取法.

在剩余 1 个元素中选取 1 个, 1 种取法.

于是由乘法原理共有 $n!$ 种取法.

对于 n 个不同的元素, 我们可以规定各元素之间有一个标准次序. 例如 n 个不同的自然数可规定从小到大为标准次序.

定义 1.2 在 n 个不同的元素按照某种约定次序构成的排列中, 当某一对元素的先后次序与标准次序不同时, 称它构成 1 个逆序. 一个排列中逆序的总数叫作这个排列的逆序数.

排列 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 的逆序数记作 $\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)$. $\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)$ 为奇数时, 称 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 为奇排列; $\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)$ 为偶数时, 称 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 为偶排列; 当 $\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)$ 为零时, 称 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 为标准排列.

不妨设排列 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 为 1 至 n 这 n 个自然数的一个排列, 规定从小到大为标准次序. 考虑元素 $p_i (i = 1, 2, \cdots, n)$, 如果比 p_i 大的且排在 p_i 前面的元素有 τ_i 个, 就说 p_i 的逆序数是 τ_i . 那么这个排列的逆序数为 $\tau(p_1 p_2 \cdots p_n) = \tau_1 + \cdots + \tau_n$.

例 1.2 排列 32541 中, $\tau = \tau_1 + \cdots + \tau_5 = 0 + 1 + 0 + 1 + 4 = 6$. 故此排列为偶排列.

例 1.3 排列 $13 \cdots (2n-1)24 \cdots (2n)$, 求逆序数.

解 记作 $p_1 p_2 \cdots p_n p_{n+1} p_{n+2} \cdots p_{2n-1} p_{2n}$

$$\tau_1 = 0, \cdots, \tau_n = 0,$$

$$\tau_{n+1} = n-1, \tau_{n+2} = n-2, \cdots, \tau_{2n} = 0,$$

$$\tau = (n-1) + (n-2) + \cdots + 1 + 0 = \frac{1}{2}n(n-1).$$

定义 1.3 在一个排列中, 把任意两个元素的位置互换, 而其余的元素不动, 就得到另一排列, 这种作出新排列的手续叫作对换. 将相邻两个元素对换, 叫作相邻对换.

例如, 经过 1, 2 对换, 排列 1432 就成 2431. 显然, 如果连续进行两次相同的对换, 那么排列就还原了. 由此可知, 一个对换把全部 n 级排列两两配对, 使每两个配成对的 n 级排列在这个对换下互变.

关于排列的奇偶性, 我们有下面的基本事实.

定理 1.1 对换改变排列的奇偶性.

这就是说,经过一次对换,奇排列变成偶排列,偶排列变成奇排列.

证明 先证相邻对换: $\cdots jk \cdots$ (1)

经过 j, k 对换变成

$$\cdots kj \cdots \quad (2)$$

这里“ $\cdots$ ”表示那些不动的数. 显然,在排列(1)中如 j, k 与其他的数构成逆序数,则在排列(2)中仍然构成逆序数;如不构成逆序数则在(2)中也不构成逆序数,不同的只是 j, k 的次序. 如果原来 j, k 组成逆序,那么经过对换,逆序数减少一个;如果原来 j, k 不组成逆序,那么经过对换,逆序数就增加一个. 总之,排列的逆序数的奇偶性变了.

再证一般对换: $\cdots ji_1 i_2 \cdots i_s k \cdots$ (3)

经过 j, k 对换,排列(3)变成

$$\cdots ki_1 i_2 \cdots i_s j \cdots \quad (4)$$

不难看出,这样一个对换可以通过一系列的相邻对换实现. 把 k 经过 $s+1$ 次相邻对换,排列(3)就变成 $\cdots kji_1 i_2 \cdots i_s \cdots$, 再把 j 经过 s 次相邻对换,就变成排列(4). 因此, j, k 对换可以通过 $2s+1$ 次相邻对换来实现. $2s+1$ 是奇数. 相邻对换改变排列的奇偶性,奇数次相邻对换最终还是改变排列的奇偶性.

推论 1 奇排列变为标准排列的对换次数为奇数,偶排列变为标准排列的对换次数为偶数.

推论 2 在全部 n 个元素构成的排列中($n \geq 2$),奇偶排列的个数相等,各有 $\frac{n!}{2}$ 个.

例如,在 1, 2, 3 三个数的排列中,132, 213, 321 为奇排列,123, 231, 312 为偶排列.

—— 1.2 n 阶行列式的定义 ——

我们现在给出 n 阶行列式的定义. 在给出 n 阶行列式的定义之前,先来看一下二阶和三阶行列式的定义.

用消元法解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \quad (1-1)$$

通过消去 x_1, x_2 , 得

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2, \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}. \end{cases}$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时, 可求得方程组(1-1)的解为

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \quad (1-2)$$

式(1-2)中的分子、分母都是四个数分成两对相乘以后再相减, 也是由方程组(1-1)的四个系数与常数项所确定. 考察分母 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, 是由方程组(1-1)的四个系数确定, 把这四个数按它们在方程组中的位置, 排成二行二列的数表

$$\begin{array}{cc} a_{11} & a_{12}, \\ a_{21} & a_{22}. \end{array} \quad (1-3)$$

表达式 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ 称为数表(1-3)所确定的二阶行列式, 记作

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \quad (1-4)$$

数 $a_{ij} (i=1, 2; j=1, 2)$ 称为二阶行列式(1-4)的元素. 元素 a_{ij} 的第一个下标 i 称为行标, 表示元素位于第 i 行, 第二个下标 j 称为列标, 表示元素位于第 j 列. 位于第 i 行第 j 列的元素称为行列式(1-4)的 (i, j) 元.

上述二阶行列式的定义, 可用对角线法则来记忆. 参看图 1.1, 从 a_{11} 到 a_{22} 的连线称为主对角线, 从 a_{12} 到 a_{21} 的连线称为副对角线, 因此, 二阶行列式就是主对角线上两个元素的乘积减去副对角线上两个元素的乘积所得的差.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

图 1.1

由二阶行列式的概念, (1-2)式中的分子也可表示为

$$b_1a_{22} - a_{12}b_2 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, a_{11}b_2 - b_1a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

再记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

则方程组(1-1)的解可以表示成

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D},$$

其中分母 D 是由方程组的系数所确定的二阶行列式(称为系数行列式), x_1 的分子 D_1 是用常数项 b_1, b_2 替换 D 中第一列元素所得的二阶行列式, x_2 的分子 D_2 是用常数项 b_1, b_2 替换 D 中第二列元素所得的二阶行列式.

例 1.4 求解二元线性方程组

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 = 12, \\ 2x_1 + x_2 = 1. \end{cases}$$

解 由于系数行列式 $D = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 - (-4) = 9 \neq 0$,

$$D_1 = \begin{vmatrix} 12 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 12 - (-2) = 14,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 5 & 12 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 - 24 = -19,$$

所以原方程组的解为: $x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{14}{9}, x_2 = \frac{D_2}{D} = -\frac{19}{9}$.

定义 1.4 设有 9 个数排成 3 行 3 列的数表

$$\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}. \end{array} \quad (1-5)$$

记

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ & \quad - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}, \end{aligned} \quad (1-6)$$

式(1-6)称为数表(1-5)所确定的三阶行列式.

三阶行列式是 6 项含有三个元素乘积的代数和,每项均为不同行不同列的三个元素乘积再冠以正负号,其规律遵循图 1.2 所示的对角线法则.

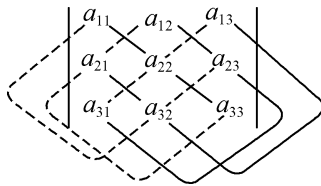


图 1.2

例 1.5 计算三阶行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}.$

解 $D = 1 \times 2 \times 4 + (-1) \times 1 \times 0 + 2 \times 3 \times 1 - 1 \times 1 \times 1 - (-1) \times 3 \times 4 - 2 \times 2 \times 0$
 $= 25.$

为了作出 n 阶行列式的定义,我们先研究三阶行列式的结构. 根据定义 1.4 可以看出:

等式(1-6)右边的每一项都是位于不同行、不同列的三个元素的乘积. 每一项都可以表示成: $\pm a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3}$, 其中行标排成标准次序 123, 列标排成 $p_1 p_2 p_3$, 这是 1, 2, 3 的某个排列(共 6 种), 对应了等式右边有 6 项. 6 项中带正号的三项列标排列为: 123, 231, 312, 这三个排列是偶排列; 带负号的三项列标排列为: 132, 213, 321, 这三个排列是奇排列.

于是三阶行列式可写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{p_1 p_2 p_3} (-1)^{\tau(p_1 p_2 p_3)} a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3},$$

其中 $\sum_{(p_1 p_2 p_3)}$ 表示对 1, 2, 3 三个数的所有排列 $p_1 p_2 p_3$ 求和.

按此规律, 可把行列式推广到一般形式.

定义 1.5 n^2 个数 $a_{ij} (i, j=1, 2, \dots, n)$, 排成 n 行 n 列的数表

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad (1-7)$$

$$\text{令 } D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{p_1 p_2 \cdots p_n} (-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}. \quad (1-8)$$

式(1-8)称为数表(1-7)的 n 阶行列式, 其中 $\sum_{p_1 p_2 \cdots p_n}$ 表示对 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 这 n 个数的所有排列 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 求和.

行列式(1-8)常简记作 $\det(a_{ij})$, 其中数 a_{ij} 为行列式 D 中的第 i 行、第 j 列的元素.

定义表明, 为了计算 n 阶行列式, 首先作所有可能由位于不同行不同列元素构成的乘积, 把这些乘积的元素按行指标排成标准排列, 然后由列指标所成的排列的奇偶性来决定这一项的正负号, 最后把这些项全部加起来. 由定义立即看出, n 阶行列式是由 $n!$ 项组成的. 按此定义的二阶、三阶行列式与原有定义的二阶、三阶行列式显然是一致的.

当 $n=1$ 时, 一阶行列式 $|a| = a$ (注意不要与绝对值符号混淆). 主对角线以下(上)的元素都为 0 的行列式叫作上(下)三角形行列式; 主对角线以下和以上的元素都为 0 的行列式叫作对角行列式.

$$\text{例 1.6 计算 } D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & a_{nn} \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & \\ \vdots & \ddots & & \\ a_{n1} & & & 0 \end{vmatrix}.$$

解 行列式中每一项是 n 个元素的乘积, 且这 n 个元素取自不同的行和不同的列. 因为第 n 行中只有第 n 列的元素 a_{nn} 不显为零, 因此只要考虑 $p_n = n$ 的那些项. 在第 $n-1$ 行中, 只有 $a_{n-1,n-1}, a_{n-1,n}$ 不显为零, 所以只考虑 $p_{n-1} = n-1$. 这样逐步推上去, 不难得到, D_1 中只有一项 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 不显含 0, 且列标构成排列的逆序数为: $\tau(12\cdots n) = 0$, 故

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

同理, D_2 中只有一项 $a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$ 不显含 0, 且列标构成排列的逆序

数为

$$\tau(n \cdots 21) = 1 + 2 + \cdots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2},$$

故

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & \\ \vdots & \ddots & & \\ a_{n1} & & & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n1}.$$

特别地,

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n, \quad \begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \ddots & & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n.$$

—— 1.3 行列式的性质 ——

行列式的计算是一个重要的问题,也是一个很麻烦的问题. n 阶行列式一共有 $n!$ 项,当 n 较大时,直接从定义来计算行列式几乎不可能. 因此我们需要进一步讨论行列式的性质,利用这些性质可以化简行列式的计算.

记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

行列式 D^T 称为行列式 D 的转置行列式.

性质 1 行列式与它的转置行列式相等.

证明 令 $b_{ij} = a_{ji} (i, j = 1, 2, \cdots, n)$, 则

$$\begin{aligned}
 D^T &= \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(p_1 p_2 \cdots p_n)} (-1)^{\tau} b_{1p_1} b_{2p_2} \cdots b_{np_n} \\
 &= \sum_{(p_1 p_2 \cdots p_n)} (-1)^{\tau} a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n} = D.
 \end{aligned}$$

由此性质可知,行列式中的行与列具有同等的地位,行列式的性质凡是对行成立的对列也同样成立,反之亦然.

性质 2 对换行列式的两行(列),行列式变号.

$$\text{设 } i < j, D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \text{ 则 } D_1 = -D.$$

$$\text{证明 设行列式 } D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

是由行列式 D 对换 i, j 两行得到,即当 $l \neq i, j$ 时, $b_{lp} = a_{lp}$; 当 $l = i, j$ 时, $b_{ip} = a_{jp}$, $b_{jp} = a_{ip}$. 由行列式的定义,

$$\begin{aligned}
 D_1 &= \sum (-1)^{\tau(p_1 \cdots p_i \cdots p_j \cdots p_n)} b_{1p_1} \cdots b_{ip_i} \cdots b_{jp_j} \cdots b_{np_n} \\
 &= \sum (-1)^{\tau(p_1 \cdots p_i \cdots p_j \cdots p_n)} a_{1p_1} \cdots a_{jp_i} \cdots a_{ip_j} \cdots a_{np_n} \\
 &= \sum (-1)^{\tau(p_1 \cdots p_i \cdots p_j \cdots p_n)} a_{1p_1} \cdots a_{ip_j} \cdots a_{jp_i} \cdots a_{np_n},
 \end{aligned}$$

记 $\tau = \tau(p_1 \cdots p_i \cdots p_j \cdots p_n)$, 排列 $p_1 \cdots p_j \cdots p_i \cdots p_n$ 的逆序数为 τ_1 , 则 $(-1)^{\tau} = -(-1)^{\tau_1}$, 所以 $D_1 = -D$.

以 r_i 表示行列式的第 i 行, 以 c_i 表示第 i 列. 交换 i, j 两行记作 $r_i \leftrightarrow r_j$, 交

换 i, j 两列记作 $c_i \leftrightarrow c_j$.

推论 1 D 中某两行(列)元素对应相等, 则 $D = 0$.

证明 因为对调此两行(列)后, D 的形式不变, 所以 $D = -D$, 从而得 $D = 0$.

性质 3 行列式的某一行(列)中所有元素都乘以同一数 k , 等于用数 k 乘此行列式.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{vmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \text{证明 等式左端} &= \sum (-1)^{\tau(p_1 \cdots p_i \cdots p_n)} [a_{1p_1} \cdots (ka_{ip_i}) \cdots a_{np_n}] \\ &= k \sum (-1)^{\tau(p_1 \cdots p_i \cdots p_n)} (a_{1p_1} \cdots a_{ip_i} \cdots a_{np_n}) = kD. \end{aligned}$$

第 i 行(列)乘 k , 记作 $r_i \times k (c_i \times k)$.

推论 2 行列式的某一行(列)中所有元素的公因子可以提到行列式记号的外面.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{vmatrix} \xlongequal{r_i \div k} k \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{vmatrix}.$$

第 i 行(列)提出公因子 k , 记作 $r_i \div k (c_i \div k)$.

推论 3 D 中某行(列)元素全为 0 , 则 $D = 0$.

推论 4 D 中某两行(列)元素成比例, 则 $D = 0$.

性质 4 若行列式的某一行(列)的元素可以写成两个数的和, 例如对第 i 行元素, 有 $a_{ij} = b_{ij} + c_{ij} (j = 1, 2, \cdots, n)$, 则该行列式等于下面两个行列式的和:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{vmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{证明} \quad \text{左端} &= \sum (-1)^{\tau(p_1 \cdots p_i \cdots p_n)} (a_{1p_1} \cdots a_{ip_i} \cdots a_{np_n}) \\
 &= \sum (-1)^{\tau(p_1 \cdots p_i \cdots p_n)} (a_{1p_1} \cdots b_{ip_i} \cdots a_{np_n}) \\
 &\quad + \sum (-1)^{\tau(p_1 \cdots p_i \cdots p_n)} (a_{1p_1} \cdots c_{ip_i} \cdots a_{np_n}) \\
 &= \text{右端(1)} + \text{右端(2)}.
 \end{aligned}$$

性质 5 把行列式的某一行(列)的各元素乘以同一数然后加到另一行(列)对应的元素上去,行列式不变.

例如以数 k 乘第 j 行元素再添加到第 i 行元素上,记作 $r_i + kr_j$, 有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{vmatrix} \xrightarrow{r_i + kr_j} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} + ka_{j1} & \cdots & a_{in} + ka_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{vmatrix} \quad (i \neq j).$$

$$\text{证明} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} + ka_{j1} & \cdots & a_{in} + ka_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ ka_{j1} & \cdots & ka_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{vmatrix}.$$

这里,第一步根据性质 4,第二步根据推论 4. 如果以数 k 乘第 j 列元素再添加到第 i 列元素上,记作 $c_i + kc_j$.

在 1.2 节我们看到, 一个上三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$. 这个计算是很简单的. 利用行列式的性质可以化简行列式的计算. 特别是利用性质 5 可以把行列式中许多元素化为 0. 所以, 计算行列式常用方法之一就是利用行列式的性质把行列式化为上(下)三角形行列式, 从而计算出行列式.

例 1.7 计算 $D = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & -4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

解 $D \xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_3} - \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ -1 & 7 & -3 & -4 \\ 2 & -9 & 5 & 7 \\ 1 & -6 & 4 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{r_2 + r_1 \\ r_3 - 2r_1 \\ r_4 - r_1}} - \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

$$\xrightarrow{\substack{r_2 \leftrightarrow r_3 \\ r_3 - 2r_2 \\ r_4 + r_2}} \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -8 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_4 + r_3} \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 15.$$

例 1.8 计算 $D = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d \end{vmatrix}$.

解

$$D \xrightarrow{\substack{r_4 - r_3 \\ r_3 - r_2 \\ r_2 - r_1}} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & a & 2a+b & 3a+2b+c \\ 0 & a & 3a+b & 6a+3b+c \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{r_4 - r_3 \\ r_3 - r_2}} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & a & 3a+b \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_4 - r_3} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^4.$$

例 1.9 计算 $D_n = \begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$.

解 $D_n \xrightarrow{r_1 + (r_2 + \cdots + r_n)} [x + (n-1)a] \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$

$$= [x + (n-1)a] \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$

$$= [x + (n-1)a] (x-a)^{n-1}.$$

上述例子表明： n 阶行列式总能利用行运算 $r_i + kr_j$ 化为上(下)三角行列式，也可利用列运算 $c_i + kc_j$ 化为上(下)三角行列式。并且，上述例子中都用到把几个运算写在一起的省略写法，需要注意各个运算的次序一般不能颠倒。

例 1.10 证明 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline c_{11} & \cdots & c_{1m} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nm} & b_{n1} & \cdots & b_{nm} \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nm} \end{vmatrix}.$$

证明 设

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nm} \end{vmatrix}$$

对 D_1 作 $r_i + kr_j$ 运算化为下三角行列式，

$$D_1 = \begin{vmatrix} p_1 & & \\ \vdots & \ddots & \\ * & \cdots & p_m \end{vmatrix} = p_1 \cdots p_m.$$

对 D_2 作 $c_i + kc_j$ 运算化为下三角行列式

$$D_2 = \begin{vmatrix} q_1 & & \\ \vdots & \ddots & \\ * & \cdots & q_n \end{vmatrix} = q_1 \cdots q_n.$$

于是对 D 的前 m 行作 $r_i + kr_j$ 运算, 再对后 n 列作 $c_i + kc_j$ 运算化为下三角行列式, 有

$$D = \begin{vmatrix} p_1 & & & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ * & \cdots & p_m & 0 & \cdots & 0 \\ \hline c_{11} & \cdots & c_{1m} & q_1 & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \\ c_{n1} & \cdots & c_{nm} & * & \cdots & q_n \end{vmatrix} = (p_1 \cdots p_m)(q_1 \cdots q_n) = D_1 D_2.$$

—— 1.4 行列式按行(列)展开 ——

一般说来, 低阶行列式的计算比高阶行列式的计算要简单, 因此很自然地考虑用低阶行列式来表示高阶行列式. 这就需要引进余子式和代数余子式的概念.

在 n 阶行列式中, 将 (i, j) 元 a_{ij} 所在的行与列上的元素划去, 其余元素按照原来的位置构成的 $n-1$ 阶行列式, 称为 (i, j) 元 a_{ij} 的余子式, 记作 M_{ij} . 记

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

A_{ij} 叫作 (i, j) 元 a_{ij} 的代数余子式.

例如四阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

中 $(2,3)$ 元 a_{23} 的余子式和代数余子式分别为

$$M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix},$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -M_{23}.$$

定理 1.2 行列式等于它的任意一行(列)的各元素与其对应的代数余子式的乘积之和, 即

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \\ &= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \quad (j = 1, 2, \cdots, n). \end{aligned}$$

证明 若行列式的第 n 行中只有 a_{nm} 非零, 先证: 行列式 $D = a_{nm}A_{nm}$.

$$\text{因为 } M_{nm} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\tau(p_1 \cdots p_{n-1})} a_{1p_1} \cdots a_{n-1,p_{n-1}}$$

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nm} \end{vmatrix} \\ &= \sum_{p_n=n} (-1)^{\tau(p_1 \cdots p_{n-1} p_n)} a_{1p_1} \cdots a_{n-1,p_{n-1}} a_{n,p_n} + \\ &\quad \sum_{p_n \neq n} (-1)^{\tau(p_1 \cdots p_{n-1} p_n)} a_{1p_1} \cdots a_{n-1,p_{n-1}} a_{n,p_n} \\ &= a_{nm} \sum (-1)^{\tau(p_1 \cdots p_{n-1} n)} a_{1p_1} \cdots a_{n-1,p_{n-1}} \\ &= a_{nm} M_{nm} = a_{nm} (-1)^{n+n} M_{nm} = a_{nm} A_{nm}, \end{aligned}$$

其中 $\tau(p_1 \cdots p_{n-1} n) = \tau(p_1 \cdots p_{n-1})$.

再证一般情况, 若行列式的第 i 行中只有 a_{ij} 非零, 则行列式 $D = a_{ij}A_{ij}$.

$$\begin{aligned}
 \text{设 } D &= \begin{vmatrix} & & a_{1j} & & \\ & D_1 & \vdots & D_2 & \\ & & a_{i-1,j} & & \\ 0 & \cdots & 0 & a_{ij} & 0 & \cdots & 0 \\ & & a_{i+1,j} & & \\ & D_3 & \vdots & D_4 & \end{vmatrix} \\
 &= (-1)^{(n-i)+(n-j)} \begin{vmatrix} & & a_{1j} & \\ & D_1 & D_2 & \vdots \\ & & a_{i-1,j} & \\ & D_3 & D_4 & \vdots \\ & & a_{nj} & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{ij} \end{vmatrix} \\
 &= (-1)^{-(i+j)} a_{ij} M_{ij} = a_{ij} A_{ij}.
 \end{aligned}$$

由行列式性质 4 及第二步所得结论,对行列式有

$$\begin{aligned}
 D &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} + 0 + \cdots + 0 & 0 + a_{i2} + \cdots + 0 & \cdots & 0 + \cdots + 0 + a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{i2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{vmatrix} + \cdots + \\
 &\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{vmatrix} = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \cdots + a_{in} A_{in}.
 \end{aligned}$$

类似地,该结论对列也成立,有

$$D = a_{1j} A_{1j} + a_{2j} A_{2j} + \cdots + a_{nj} A_{nj} \quad (j = 1, 2, \cdots, n).$$

这个定理叫作行列式按行(列)展开法则. 利用这一法则并结合行列式的性质, 可以简化行列式的计算.

例 1.7(续) 计算 $D = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & -4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

解 $D \xrightarrow[r_4 - r_1]{r_2 + r_1, r_3 - 2r_1} \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$

$$\xrightarrow{c_1 + 2c_2} \begin{vmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 15.$$

例 1.11 计算 $D_{2n} = \begin{vmatrix} a & & & & b \\ & a & & & b \\ & & \ddots & & \\ & & & a & b \\ & & & c & d \\ & & & & \ddots \\ & & c & & d \\ c & & & & d \end{vmatrix}$.

解法 1

$$D_{2n} = (-1)^{1+1} a \begin{vmatrix} & & & 0 \\ & & & \vdots \\ & & D_{2(n-1)} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d \end{vmatrix}_{(2n-1)} +$$

$$(-1)^{1+2n} b \begin{vmatrix} 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & D_{2(n-1)} & \\ c & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}_{(2n-1)}$$

$$= (-1)^{(2n-1)+(2n-1)} ad \cdot D_{2(n-1)} + (-1)(-1)^{(2n-1)+1} bc \cdot D_{2(n-1)}$$

$$= (ad - bc)D_{2(n-1)} = \cdots = (ad - bc)^{n-1} D_2,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

所以

$$D_{2n} = (ad - bc)^n.$$

解法 2 把 D_{2n} 中的第 $2n$ 行依次与第 $2n-1$ 行……第 2 行对换(作 $2n-2$ 次相邻两行的对换),再把第 $2n$ 列依次与第 $2n-1$ 列……第 2 列对换,得

$$D_{2n} = (-1)^{2(2n-2)} \begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 \\ c & d & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a & & b \\ & & \ddots & & \ddots \\ \vdots & \vdots & & a & b \\ & & & c & d \\ & & \ddots & & \ddots \\ 0 & 0 & c & & d \end{vmatrix},$$

根据例 1.10 的结果,有

$$D_{2n} = D_2 D_{2(n-1)} = (ad - bc) D_{2(n-1)}.$$

以此类推,可得

$$D_{2n} = (ad - bc)^2 D_{2(n-2)} = \cdots = (ad - bc)^{n-1} D_2 = (ad - bc)^n.$$

例 1.12 证明范德蒙德(Vandermonde)行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n \geq i > j \geq 1} (x_i - x_j), \quad (1-9)$$

其中记号“ $\prod$ ”表示全体同类因子的乘积.

证明 对 n 作数学归纳法. 因为

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1 = \prod_{2 \geq i > j \geq 1} (x_i - x_j),$$

所以当 $n=2$ 时(1-9)式成立. 现假设(1-9)式对于 $n-1$ 阶范德蒙德行列式结论成立,现在来看对 n 阶范德蒙德行列式的情形.

为此,设法把 D_n 降阶:从第 n 行开始,后行减去前行的 x_1 倍,有

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ 0 & x_2(x_2 - x_1) & x_3(x_3 - x_1) & \cdots & x_n(x_n - x_1) \\ 0 & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & x_3^{n-2}(x_3 - x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix},$$

按第 1 列展开, 并把每列的公因子 $(x_i - x_1)$ 提出, 就有

$$D_n = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \cdots (x_n - x_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix},$$

上式右端的行列式是 $n-1$ 阶范德蒙德行列式, 按归纳法假设, 它等于所有 $(x_i - x_j)$ 因子的乘积, 其中 $n \geq i > j \geq 2$. 故

$$\begin{aligned} D_n &= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \cdots (x_n - x_1) \prod_{n \geq i > j \geq 2} (x_i - x_j) \\ &= \prod_{n \geq i > j \geq 1} (x_i - x_j). \end{aligned}$$

由这个结果立即得出, 范德蒙德行列式为零的充分必要条件是 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 这 n 个数中至少有两个相等.

定理 1.3 行列式某一行(列)的元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式乘积的和等于零. 即

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0, \quad i \neq j.$$

$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = 0, \quad i \neq j.$$

证明 只证定理对行成立. $i \neq j$ 时, 有

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{j1}A_{j1} + a_{j2}A_{j2} + \cdots + a_{jn}A_{jn}, \text{ 当 } a_{j1}, a_{j2}, \cdots, a_{jn} \text{ 依次取为 } D \text{ 中的第 } i \text{ 列元素 } a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}, \text{ 得}$$

$$0 = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn}.$$

结合定理 1.2 与定理 1.3 可得

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = \begin{cases} D \ (i = j), \\ 0 \ (i \neq j), \end{cases}$$

$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = \begin{cases} D \ (i = j), \\ 0 \ (i \neq j). \end{cases}$$

例 1.13 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}$, 求 $A_{11} + A_{21} + A_{31} + A_{41}$ 和 $M_{11} + M_{12} +$

$M_{13} + M_{14}$.

解 $A_{11} + A_{21} + A_{31} + A_{41}$ 等于用 1, 1, 1, 1 代替 D 的第一列元素, 其余

元素不变, 所得行列式, 即 $A_{11} + A_{21} + A_{31} + A_{41} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0.$

$$M_{11} + M_{12} + M_{13} + M_{14} = A_{11} - A_{12} + A_{13} - A_{14} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} & \frac{c_2 + c_1}{c_3 - c_1} \frac{c_4 + c_1}{c_4 + c_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & -1 & 6 \\ 1 & 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 5 & -1 & 6 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} \frac{r_2 - 2r_1}{r_3 - r_1} \begin{vmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -7 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \\ & 3 \times (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -7 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -30. \end{aligned}$$

—— 1.5 克拉默(Cramer)法则 ——

现在我们来应用行列式解决线性方程组的问题. 在这里只考虑方程的个数与未知数的个数相等的情形. 以后会看到, 这是一个重要的情形. 至于更一般的情形留到以后讨论.

下面我们考虑含有 n 个未知量 n 个方程的线性方程组:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \quad (1-10)$$

其中 $a_{ij} (i, j = 1, 2, \dots, n)$ 称为方程组(1-10)的系数; $b_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 称为常数项; 由系数 a_{ij} 构成的行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

叫作方程组(1-10)的系数行列式; 把 D 的第 j 列元素 $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj}$ 换成常数项 $b_1, b_2, \dots, b_n$ 得到的行列式分别记为

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & b_n & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \dots$$

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}.$$

定理 1.4 (克拉默法则) 若 $D \neq 0$, 则方程组(1-10)存在唯一解

$$x_j = \frac{D_j}{D} \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (1-11)$$

证明 先证存在性

把 D_j 按第 j 列展开, 有 $D_j = \sum_{k=1}^n b_k A_{kj}$, 因此

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &= \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{D_j}{D} = \frac{1}{D} \sum_{j=1}^n a_{ij} \sum_{k=1}^n b_k A_{kj} \\ &= \frac{1}{D} \sum_{k=1}^n b_k \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{kj} = \frac{1}{D} \sum_{k=1}^n \left(b_k \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{kj} \right) = \frac{1}{D} b_i D \\ &= b_i (i = 1, 2, \cdots, n).\end{aligned}$$

这说明 (1-11) 是方程组 (1-10) 的解.

再证**唯一性** 设方程组还有解 $x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*$, 则

$$\begin{aligned}x_j^* D &= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1j} x_j^* & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{nj} x_j^* & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nm} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & (a_{11} x_1^* + \cdots + a_{1j} x_j^* + \cdots + a_{1n} x_n^*) & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & (a_{n1} x_1^* + \cdots + a_{nj} x_j^* + \cdots + a_{nm} x_n^*) & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nm} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nm} \end{vmatrix} = D_j.\end{aligned}$$

同理可得 $x_j D = D_j$.

于是 $x_j^* D = x_j D$, 因为 $D \neq 0$, 所以 $x_j^* = x_j (j = 1, 2, \cdots, n)$.

当方程组 (1-10) 的常数项都是零时, 方程组

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n = 0, \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n = 0, \\ \cdots \cdots \cdots \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \cdots + a_{nm} x_n = 0, \end{cases} \quad (1-12)$$

称为 n 元齐次线性方程组. 由克拉默法则可得

定理 1.5 若 $D \neq 0$, 则齐次方程组 (1-12) 只有零解.

推论 齐次方程组 (1-12) 有非零解 $\Rightarrow D = 0$.

例 1.14 解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8, \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9, \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5, \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0. \end{cases}$$

解 由于 $D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} = 27 \neq 0,$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 8 & 1 & -5 & 1 \\ 9 & -3 & 0 & -6 \\ -5 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} = 81, D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 8 & -5 & 1 \\ 1 & 9 & 0 & -6 \\ 0 & -5 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -7 & 6 \end{vmatrix} = -108,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 & 1 \\ 1 & -3 & 9 & -6 \\ 0 & 2 & -5 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -27, D_4 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 8 \\ 1 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 2 & -1 & -5 \\ 1 & 4 & -7 & 0 \end{vmatrix} = 27.$$

因此, $x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{81}{27} = 3, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-108}{27} = -4,$

$$x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{-27}{27} = -1, \quad x_4 = \frac{D_4}{D} = \frac{27}{27} = 1.$$

例 1.15 已知 $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$ 有唯一解, 求 λ .

解 由克拉默法则知: 方程组的系数行列式不等于零, 该方程组有唯一解. 因此,

$$D = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 2)(\lambda - 1)^2 \neq 0, \text{ 故 } \lambda \neq 1 \text{ 且 } \lambda \neq -2.$$

例 1.16 一个土建师、一个电气师、一个机械师组成一个技术服务社. 假设在一段时间内, 每个人收入 1 元人民币需要支付给其他两人的服务费用以及每个人的实际收入如表 1-1 所示, 问这段时间内, 每个人的总收入是多少? (总收入 = 实际收入 + 支付服务费)

表 1-1

服务者	被服务者			实际收入
	土建师	电气师	机械师	
土建师	0	0.2	0.3	500
电气师	0.1	0	0.4	700
机械师	0.3	0.4	0	600

解 设土建师、电气师、机械师的总收入分别是 x_1 元, x_2 元, x_3 元, 根据题意, 建立方程组

$$\begin{cases} x_1 - 0.2x_2 - 0.3x_3 = 500, \\ x_2 - 0.1x_1 - 0.4x_3 = 700, \\ x_3 - 0.3x_1 - 0.4x_2 = 600. \end{cases}$$

由克拉默法则可得

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -0.2 & -0.3 \\ -0.1 & 1 & -0.4 \\ -0.3 & -0.4 & 1 \end{vmatrix} = 0.694 \neq 0, D_1 = \begin{vmatrix} 500 & -0.2 & -0.3 \\ 700 & 1 & -0.4 \\ 600 & -0.4 & 1 \end{vmatrix} = 872,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 500 & -0.3 \\ -0.1 & 700 & -0.4 \\ -0.3 & 600 & 1 \end{vmatrix} = 1\,005, D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -0.2 & 500 \\ -0.1 & 1 & 700 \\ -0.3 & -0.4 & 600 \end{vmatrix} = 1\,080.$$

$$\text{因此, } x_1 = \frac{D_1}{D} \approx 1\,256, x_2 = \frac{D_2}{D} \approx 1\,448, x_3 = \frac{D_3}{D} \approx 1\,556.$$

也就是土建师、电气师、机械师的总收入分别约为 1 256 元, 1 448 元, 1 556 元.

人物卡片(范德蒙德):



范德蒙德, Vandermonde, Alexandre Theophile, 法国数学家, 1735—1796. 范德蒙德在高等代数方面有重要贡献. 他在 1771 年发表的论文中证明了多项式方程根的任何对称式都能用方程的系数表示出来. 他不仅把行列式应用于解线性方程组, 而且对行列式理论本身进行了开创性研究, 是行列式的奠基者. 他给出了用二阶子式和它的余子式来展开行列式的法则, 还提出了专门的行列式符号. 他具有拉格朗日的预解式、置换理论等思想, 为群的概念的产生做了一些准备工作.

延伸阅读

物流配送优化问题

物流配送优化问题涉及如何提高配送效率、降低成本以及减少碳排放。物流优化不仅是企业发展的需要,更是国家推动绿色发展和智慧物流的重要举措。近年来,我国通过大数据、人工智能等技术,提升物流配送的精准度和效率。这一过程不仅加强了物流企业的竞争力,也在支持国家节能减排、绿色经济的发展目标。例如,通过优化配送路径,合理安排运输资源,减少了不必要的油耗和碳排放,提升了整个社会的资源利用效率。物流优化体现了“绿水青山就是金山银山”的理念,助力实现可持续发展。同时,智慧物流的发展也促进了城乡经济协调发展,为偏远地区提供了更便捷的物流服务,助力乡村振兴。作为当代大学生,应认识到技术创新在推动绿色发展和社会进步中的重要作用,增强环境保护意识,肩负起时代赋予的责任,将个人发展与国家生态文明建设紧密结合,为建设“美丽中国”贡献力量。

【案例描述】

某物流公司需要将物资从三个仓库配送到三个不同的目的地。每个仓库的配送成本不同,且每个仓库只能配送到一个目的地。你需要帮助公司找到最优的配送方案,使得总配送成本最小。

【数学模型】

(1) 仓库与目的地之间的配送成本可以表示为一个 3×3 的矩阵(如表 1-2),每个元素 a_{ij} 表示从仓库 i 到目的地 j 的配送成本。

表 1-2

	仓库 1	仓库 2	仓库 3
目的地 1	8	6	5
目的地 2	7	8	7
目的地 3	5	6	8

(2) 每个仓库只能选择一个目的地配送,且每个目的地只能接收一个仓库的物资。

通过本章节的学习,学生可以利用线性代数中的行列式概念,特别是行列式与全排列、行列式展开、行列式性质、克拉默法则等内容,找到最优的配送方案。

1. 全排列及其逆序数

目标是分析不同的配送方案。每个仓库和目的地之间的对应关系可以

看作是一个排列问题. 对于 3 个仓库和 3 个目的地, 所有可能的配送方案可以用全排列来表示, 如:

方案 1: 仓库 1→目的地 1, 仓库 2→目的地 2, 仓库 3→目的地 3 (即排列 $((1, 2, 3))$)

方案 2: 仓库 1→目的地 2, 仓库 2→目的地 1, 仓库 3→目的地 3 (即排列 $((2, 1, 3))$)

学生需要理解全排列的概念, 并且可以通过计算逆序数来判断不同方案的排列特性. 在这一步, 学生将理解如何将问题形式化为排列问题, 进而与行列式的结构挂钩.

2. n 阶行列式的定义

物流配送问题可以通过行列式来建模. 在这里, 配送成本矩阵的行列式可以用来表示系统的可行性或唯一性. 学生将学习如何通过行列式计算不同方案的总配送成本, 并且明白行列式值为零时系统没有唯一解.

3. 行列式的性质

通过配送问题, 学生可以探索行列式的若干性质, 如:

- 行列互换对行列式符号的影响 (可联想为更改配送方案时总成本符号的改变).
- 行列式为零时的意义 (说明没有有效的配送方案).
- 行列式的线性性质 (说明在部分成本变化时, 对整个系统总成本的影响).

4. 行列式按行展开

学生理解如何按行展开来计算行列式, 并用这一方法计算总配送成本.

5. 克拉默法则

假设系统中的配送约束更加复杂 (比如有供需平衡的额外约束), 学生可以通过克拉默法则来解决线性方程组, 找出最优解. 在这一步, 学生不仅可以通过行列式检验配送问题的解的唯一性, 还可以直接求解最优方案.

综上, 学生应能够熟练运用行列式的相关理论与技巧来计算 3 个仓库与 3 个目的地的最优配送方案, 并且通过行列式的性质与展开方法求出总配送成本的最小值. 通过不断对配送问题的排列、行列式计算和方程求解的研究, 学生最终能够解决以下问题:

- 计算所有可能的配送方案的总成本.
- 使用行列式展开方法或克拉默法则找到最优方案, 最小化配送成本.

基本练习题一

1. 求下列各排列的逆序数:

(1) $1\ 3\ 4\ 7\ 8\ 2\ 6\ 9\ 5$;

(2) $2\ 1\ 7\ 9\ 8\ 6\ 3\ 5\ 4$;

(3) $(n-1)(n-2)\cdots 21n$.

2. 写出四阶行列式中含有因子 $a_{11}a_{23}$ 的项.

3. 计算下列行列式:

$$(1) \begin{vmatrix} a & a^2 \\ b & b^2 \end{vmatrix}; \quad (2) \begin{vmatrix} 6 & 2 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix};$$

$$(3) \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix}; \quad (4) \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}.$$

4. 计算下列行列式:

$$(1) \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}; \quad (2) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix};$$

$$(3) \begin{vmatrix} x^2+1 & xy & xz \\ xy & y^2+1 & yz \\ xz & yz & z^2+1 \end{vmatrix}; \quad (4) \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix};$$

$$(5) \begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{vmatrix} \quad (ab \neq 0); \quad (6) \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 8 & 4 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 7 & 3 \end{vmatrix}.$$

5. 证明:

$$(1) \begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^3;$$

$$(2) \begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix};$$

$$(3) \begin{vmatrix} a_1-b_1 & a_1-b_2 & \cdots & a_1-b_n \\ a_2-b_1 & a_2-b_2 & \cdots & a_2-b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n-b_1 & a_n-b_2 & \cdots & a_n-b_n \end{vmatrix} = 0 \quad (n \geq 3).$$

6. 计算下列各阶行列式(D_n 表示 n 阶行列式):

$$(1) D_n = \begin{vmatrix} a & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & a \end{vmatrix}, \text{ 其中对角线上元素都是 } a, \text{ 未写出的元素都}$$

是 0;

$$(2) D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ a_2 & 1+a_2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & a_n & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix};$$

$$(3) \begin{vmatrix} a_n & & & b_n \\ & \ddots & & \\ & & a_1 & b_1 \\ & & c_1 & d_1 \\ & \ddots & & \\ c_n & & & d_n \end{vmatrix}, \text{ 其中未写出的元素都是 } 0.$$

$$7. \text{ 设 } D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \text{ 求 } A_{14} + 2A_{24} - A_{34} + A_{44} \text{ 和 } M_{41} + M_{42} +$$

$M_{43} + M_{44}$ 之值.

8. 解方程组:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = -2, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 - 5x_4 = -2, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 11x_4 = 0. \end{cases}$$

综合练习题一

1. 证明:

$$\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} = a_1 a_2 \cdots a_n \left(a_0 - \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \right);$$

$$\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & a_2 & x + a_1 \end{vmatrix} = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n;$$

$$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\begin{vmatrix} ax+by & ay+bz & az+bx \\ ay+bz & az+bx & ax+by \\ az+bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} = (a^3 + b^3) \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}.$$

 2. 计算下列各阶行列式 (D_n 表示 n 阶行列式):

$$(1) D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix} \quad (a_1 a_2 \cdots a_n \neq 0);$$

$$(2) D_n = \det(a_{ij}), \text{ 其中 } a_{ij} = |i-j|;$$

$$(3) D_{n+1} = \begin{vmatrix} a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a-1 & \cdots & a-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

3. 问 λ, μ 取何值时, 齐次线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + \mu x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2\mu x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

有非零解?

拓展训练一

1. (2016 年) 计算行列式
$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix}.$$

解
$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix}$$

$$= \lambda \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} + 4(-1)^{4+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^4 + \lambda^3 + 2\lambda^2 + 3\lambda + 4.$$

2. (2014 年) 计算行列式
$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix}.$$

解 由行列式展开定理按第一列展开:

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = -a \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & d \end{vmatrix} - c \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 0 & b \\ c & d & 0 \end{vmatrix} = -ad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + bc \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$= -ad(ad - bc) + bc(ad - bc) = -(ad - bc)^2.$$

3. (2012 年) 计算行列式
$$\begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ a & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

解 按第一列展开, 可得

原式 = $1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{4+1} \cdot a \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} = 1 - a^4.$

4. (2008 年) $D_n = \begin{vmatrix} 2a & 1 & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & \\ & a^2 & 2a & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{vmatrix},$ 证明 $D_n = (n+1)a^n.$

证明 用数学归纳法证明.
当 $n = 1$ 时, $D_1 = 2a$, 结论成立.

当 $n = 2$ 时, $D_2 = \begin{vmatrix} 2a & 1 \\ a^2 & 2a \end{vmatrix} = 3a^2$, 结论成立.

假设结论对小于 n 的情况成立. 将 D_n 按第 1 行展开, 得

$$\begin{aligned} D_n &= 2aD_{n-1} - \begin{vmatrix} a^2 & 1 & & & \\ 0 & 2a & 1 & & \\ & a^2 & 2a & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}_{n-1} = 2aD_{n-1} - a^2D_{n-2} \\ &= 2ana^{n-1} - a^2(n-1)a^{n-2} = (n+1)a^n. \end{aligned}$$

实际案例分析一

医院营养师为病人配制的一份菜肴由蔬菜、鱼和肉松组成, 这份菜肴需含 1 200 cal 热量, 30 g 蛋白质和 300 mg 维生素 C, 已知三种食物每 100 g 中的有关营养的含量如表 1-3 所示, 试求所配菜肴中每种食物的数量.

表 1-3

	蔬菜	鱼	肉松
热量/cal	60	300	600
蛋白质/g	3	9	6
维生素 C/mg	90	60	30

设所配菜肴中蔬菜、鱼和肉松的数量分别为 x_1, x_2, x_3 百克, 根据题意, 建立方程组

$$\begin{cases} 60x_1 + 300x_2 + 600x_3 = 1\,200, \\ 3x_1 + 9x_2 + 6x_3 = 30, \\ 90x_1 + 60x_2 + 30x_3 = 300. \end{cases}$$

根据克拉默法则, $D = -248\,400, D_1 = -378\,000, D_2 = -594\,000, D_3 = -162\,000$, 所以, $x_1 = \frac{D_1}{D} \approx 1.5217, x_2 = \frac{D_2}{D} \approx 2.3913, x_3 = \frac{D_3}{D} \approx 0.6522$. 也就是, 所配菜肴中蔬菜约 152.17 g, 鱼约 239.13 g, 肉松约 65.22 g.

Matlab 应用一: 行列式的计算

Matlab 函数和命令:

$\det(A)$	求行列式 A 的值, $\det$ 是英文单词 determinant(行列式)的缩写
$[L, U] = \text{Lu}(A)$	将 A 分解, 满足 $A = L \times U$, 其中 L 的值为 1, U 和 A 的值相等
$\text{diag}(A)$	取出 A 的主对角线上的元素
$\text{prod}(du)$	计算数组元素的连乘积
$\text{solve}(\text{方程或方程组})$	求方程或方程组的解

例 1.7(续) 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & -4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ 的值.

解 在 Matlab 的命令行窗口输入下列代码:

```
>>D=[2 -5 1 2;-3 7 -1 -4;5 -9 2 7;4 -6 1 2];
```

注意: 一行元素与元素之间用空格分割, 也可以用逗号分割(必须是英文半角符号); 行与行之间用英文分号分割.

```
>>\det(D)
```

回车后显示:

```
ans = 15
```

即行列式 D 的值为 15.

例 1.7 (续) 用化简三角行列式的方法求解行列式 $D =$

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & -4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix} \text{ 的值.}$$

解 在 Matlab 的命令行窗口输入下列代码:

```
>>D=[2 -5 1 2;-3 7 -1 -4;5 -9 2 7;4 -6 1 2];
```

```
>>[L,U]=lu(D)
```

```
L =
```

```
    0.4000   -0.8750   -0.5000    1.0000
   -0.6000    1.0000         0         0
    1.0000         0         0         0
    0.8000    0.7500    1.0000         0
```

```
U =
```

```
   5.0000   -9.0000    2.0000    7.0000
         0    1.6000    0.2000    0.2000
         0         0   -0.7500   -3.7500
         0         0         0   -2.5000
```

```
>>Det(L)
```

```
ans =
```

```
1
```

```
>>du=diag(U)
```

%取出 U 的主对角线元素

```
du =
```

```
    5.0000
    1.6000
   -0.7500
   -2.5000
```

```
>>prod(du)
```

%求主对角线元素的乘积

```
ans =
```

```
15
```

```
>> det(U)
```

```
ans =
```

```
15
```

说明 以上>>后面的部分为 Matlab 命令窗口中的输入,%后面的是注释,实验时可以不输入. 不带>>的行一般为 Matlab 的返回值也就是运算结果.

例 1.14(续) 用克拉默法则解线性方程组
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8, \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9, \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5, \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0. \end{cases}$$

解

```
>>clear %清除工作区变量
>>D=[2 1 -5 1;1 -3 0 -6;
0 2 -1 2;1 4 -7 6]; %输入系数行列式到变量 D 中,行末的分号
                        (英文状态下的分号)表示不显示结果
>>det(D) %计算行列式 D 的值
ans=
27
                        %D=27 方程组有唯一解
>>b=[8;9; -5;0]; %输入方程组右端常数项到变量 b 中
>>D1=D; %令 D1 等于 D
>>D1(:,1)=b; %用列向量 b 替换行列式 D1 的第一列
>>D2=D; %令 D2 等于 D
>>D2(:,2)=b; %用列向量 b 替换行列式 D2 的第二列
>>D3=D; %令 D3 等于 D
>>D3(:,3)=b; %用列向量 b 替换行列式 D3 的第三列
>>D4=D; %令 D4 等于 D
>>D4(:,4)=b; %用列向量 b 替换行列式 D4 的第四列
                        %用克拉默法则计算线性方程组的解
>>x1=det(D1)/det(D)
x1 = 3.0000
>>x2=det(D2)/det(D)
x2 = -4.0000
>>x3=det(D3)/det(D)
x3 = -1.0000
>>x4=det(D4)/det(D)
```

x4 = 1.0000

例 1.15(续) 已知
$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$$
 有唯一解, 求 λ .

解

```
>>clear %清除工作区变量
>>syms lambda %定义符号变量 lambda
>>D=[lambda,1,1;1,lambda,1;1,1,lambda];
%输入系数行列式,注意逗号与分
%号的差别
>>det(D) %计算系数行列式的值
ans=
lambda^3 - 3 * lambda + 2
>> solve(lambda^3 - 3 * lambda + 2==0)
%解方程  $\lambda^3 - 3\lambda + 2 = 0$ , 注意括号
%里的方程必须有两个等号
ans =
-2
1
```

即当 $\lambda \neq 1$ 且 $\lambda \neq -2$ 时 $D \neq 0$, 方程有唯一解.

第 2 章 矩阵及其运算

实际案例

生产成本案例：

某公司生产三种产品 A、B 和 C，每种产品的原料费、工人薪酬和管理费如下表 1 所示，每季度每种产品的产量如下表 2 所示。

表 1 产品成本

成本	产品 A	产品 B	产品 C
原料费	20	10	15
工人薪酬	40	20	30
管理费	15	10	10

表 2 产品产量

产品	一季度	二季度	三季度	四季度
A	300	200	150	180
B	250	100	200	300
C	200	400	300	250

用矩阵 $\mathbf{E}, \mathbf{F}$ 分别表示产品成本和产量如下：

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 20 & 10 & 15 \\ 40 & 20 & 30 \\ 15 & 10 & 10 \end{bmatrix}, \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 300 & 200 & 150 & 180 \\ 250 & 100 & 200 & 300 \\ 200 & 400 & 300 & 250 \end{bmatrix},$$

通过矩阵乘法得到

$$\mathbf{EF} = \begin{bmatrix} 11500 & 11000 & 9500 & 10350 \\ 23000 & 22000 & 19000 & 20700 \\ 9000 & 8000 & 7250 & 8200 \end{bmatrix}.$$

矩阵 **EF** 第一、二和三行分别表示原料费、工人薪酬和管理费在每个季度的总付出,而第一、二、三、四列分别表示每个季度产品 A、B 和 C 的总成本.因此,通过矩阵及其运算,可以较容易反映公司生产产品的成本状况.

在数学中,矩阵(matrix)是一个按照长方阵列排列的复数或实数集合,最早来自方程组的系数及常数所构成的方阵,这一概念由 19 世纪英国数学家阿瑟·凯利首先提出.在东汉前期的《九章算术》中,用分离系数法表示线性方程组,得到了其增广矩阵.在消元过程中,使用的把某行乘以某一非零实数、从某行中减去另一行等运算技巧,相当于矩阵的初等变换.但那时并没有现今理解的矩阵概念,虽然它与现有的矩阵形式上相同,但在当时只是作为线性方程组的标准表示与处理方式.

因此,矩阵是从许多实际问题的计算中抽象出来的一个数学概念,是研究线性函数的一个有力工具,它在自然科学、工程技术和经济管理的许多学科中都有广泛的应用.

—— 2.1 矩阵的概念 ——

2.1.1 矩阵的概念

矩阵是数(或函数)的矩形表.在经济活动中,我们常用数表表示一些量或关系,如产量的统计表、商品的价格表.

例 2.1 某商品有三个产地、四个销售点,它的库存情况如表 2-1 所示:

表 2-1

库 存 产地	销售地	销售点 1	销售点 2	销售点 3	销售点 4
A		3	5	2	1
B		7	8	9	3
C		2	6	1	8

如果用一个三行四列或 3×4 的数表表示该商品的库存情况,可以简记作

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 & 1 \\ 7 & 8 & 9 & 3 \\ 2 & 6 & 1 & 8 \end{pmatrix},$$

其中每一行表示该商品各个产地在各销售点的库存,每一列表示各销售点该商品三个产地的库存数.

定义 2.1 由 $m \times n$ 个数排成 m 行 n 列的表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为 m 行 n 列矩阵,简称 $m \times n$ 矩阵. 矩阵通常用大写字母 $A, B, \cdots$ 或者 $(a_{ij}), (b_{ij}), \cdots$ 表示. 为了表明矩阵的行列数,矩阵也表成 $A_{m \times n}, (a_{ij})_{m \times n}$.

矩阵中的数 $a_{ij} (i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, n)$ 称为矩阵的第 i 行第 j 列元素, i, j 分别称为 a_{ij} 的行标、列标.

例 2.1 中的矩阵可记为

$$A_{3 \times 4} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 & 1 \\ 7 & 8 & 9 & 3 \\ 2 & 6 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

特别地,当 $m = 1$ 时,矩阵只有一行,即

$$A = (a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad a_{1n}),$$

称其为行矩阵或行向量.

当 $n = 1$ 时,矩阵只有一列,即

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix},$$

称其为列矩阵或列向量.

当 $m = n$ 时,矩阵的行列数相等,即

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix},$$

称其为 n 阶矩阵或 n 阶方阵.

所有元素全为零的 $m \times n$ 矩阵,称为零矩阵,记作 $\mathbf{O}_{m \times n}$ 或 $\mathbf{O}$. 例如

$$\mathbf{O}_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{O}_{3 \times 4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

分别为二阶零矩阵和 3×4 零矩阵.

在矩阵 $\mathbf{A} = (a_{ij})$ 中各元素的前面添上负号得到的矩阵,称为 $\mathbf{A}$ 的负矩阵,记作 $-\mathbf{A}$, 即

$$-\mathbf{A} = (-a_{ij}) = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \cdots & -a_{mn} \end{pmatrix}.$$

例如

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, -\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

则 $-\mathbf{A}$ 是 $\mathbf{A}$ 的负矩阵.

2.1.2 几种特殊矩阵

1. 三角形矩阵

在 n 阶矩阵中,从左上角到右下角的对角线称为主对角线,从右上角到左下角的对角线称为次对角线或副对角线.

主对角线下(或上)方的元素全都是零的 n 阶矩阵,称为 n 阶上(或下)三角形矩阵. 即

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ 或 } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

上三角形矩阵、下三角形矩阵统称为三角形矩阵.

2. 对角矩阵

如果矩阵既是上三角形矩阵, 又是下三角形矩阵, 则称其为 n 阶对角矩阵. 如

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

就是一对角矩阵.

对角矩阵由主对角线上的元素完全确定, 因此, 对角矩阵可记作

$$\text{diag}(a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}).$$

例 2.2 下列矩阵都是什么矩阵?

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad (2) \begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}; \quad (3) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$(4) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad (5) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

解 对角矩阵: (1)、(2)、(5);

上三角矩阵: (1)、(2)、(3)、(5);

下三角矩阵: (1)、(2)、(5).

3. 数量矩阵

主对角线上元素都是非零常数 a 的 n 阶对角矩阵, 称为 n 阶数量矩阵或称 n 阶纯量矩阵. 如 $n=2, 3$ 时的数量矩阵为

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

4. 单位矩阵

主对角线上元素都是1的 n 阶对角矩阵,称为 n 阶单位矩阵.记作 E_n 或 E .如 $n=2,3$ 时的单位矩阵为

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. 对称矩阵

如果 n 阶矩阵 $A = (a_{ij})$ 的元素满足 $a_{ij} = a_{ji} (i, j = 1, 2, \dots, n)$,则称 A 是对称矩阵.

例如,矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 4 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 5 & -3 & 2 \\ -2 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

分别是三阶对称矩阵和四阶对称矩阵.

6. 反对称矩阵

如果 n 阶矩阵 $A = (a_{ij})$ 的元素满足 $a_{ij} = -a_{ji} (i, j = 1, 2, \dots, n)$,则称 A 是反对称矩阵.

显然,对反对称矩阵有 $a_{ii} = 0 (i = 1, 2, \dots, n)$.

例如,矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ -4 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & -5 & 0 & -2 \\ -2 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

分别是三阶反对称矩阵和四阶反对称矩阵.

2.1.3 矩阵相等

定义 2.2 如果两个矩阵 $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ 的行数、列数分别相等,则称 A 与 B 是同型矩阵;两个同型矩阵 A 与 B ,如果对应的元素相等,则称矩阵 A 与矩阵 B 相等,记作

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}.$$

即如果 $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}$ 和 $\mathbf{B} = (b_{ij})_{m \times n}$ 且 $a_{ij} = b_{ij} (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)$, 那么 $\mathbf{A} = \mathbf{B}$.

—— 2.2 矩阵的运算 ——

2.2.1 矩阵的加法

定义 2.3 设 $\mathbf{A} = (a_{ij}), \mathbf{B} = (b_{ij})$ 是两个 $m \times n$ 矩阵, 则称矩阵

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

为 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 的和, 记作

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = (a_{ij} + b_{ij}).$$

由定义可知, 只有行数与列数分别相同的两个矩阵才能做加法运算.

由矩阵的加法及负矩阵的概念, 可以定义矩阵的减法:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B}) = (a_{ij} - b_{ij}).$$

例 2.3 设矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix},$$

求 $\mathbf{A} + \mathbf{B}, \mathbf{A} - \mathbf{B}$.

$$\text{解 } \mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 5 & -3 & -4 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

设 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{O}$ 都是 $m \times n$ 矩阵, 根据矩阵加法及减法定义, 易证矩阵的加法满足以下运算定律:

(1) 加法交换律: $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$;

- (2) 加法结合律: $(A+B)+C=A+(B+C)$;
 (3) 零矩阵满足: $A+O=A$;
 (4) 存在负矩阵 $-A$, 满足: $A-A=A+(-A)=O$.

2.2.2 矩阵的数乘

定义 2.4 设 $A=(a_{ij})$ 是 $m \times n$ 矩阵, k 是任一实数, 则称

$$C = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

为数 k 与矩阵 A 的数量乘积, 或称为矩阵的数乘. 记作

$$C = kA = (ka_{ij})_{m \times n}.$$

特别地, 当 $k=-1$ 时, $kA=-A$.

任一 n 阶数量矩阵可表示为 aE_n ($a \neq 0$).

由定义易知, 对实数 k, l , 矩阵 $A=(a_{ij}), B=(b_{ij})$ 有下列运算定律:

- (1) $k(A+B) = kA + kB$;
 (2) $(k+l)A = kA + lA$;
 (3) $(kl)A = k(lA) = l(kA)$;
 (4) $1A = A$.

例 2.4 设两矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix},$$

求 $3A+2B$.

$$\text{解} \quad 3A+2B = 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -6 \\ 12 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

例 2.5 已知矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 5 & 7 \\ 5 & 4 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 7 & 5 & -4 \\ 5 & 1 & 9 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

且 $\mathbf{A} + 2\mathbf{X} = \mathbf{B}$, 求矩阵 $\mathbf{X}$.

解 由 $\mathbf{A} + 2\mathbf{X} = \mathbf{B}$, 得 $\mathbf{X} = \frac{1}{2}(\mathbf{B} - \mathbf{A})$, 所以有

$$\mathbf{B} - \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 7 & 5 & -4 \\ 5 & 1 & 9 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 5 & 7 \\ 5 & 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & -6 \\ 4 & -4 & 2 \\ -2 & -6 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{X} = \frac{1}{2}(\mathbf{B} - \mathbf{A}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & 6 & -6 \\ 4 & -4 & 2 \\ -2 & -6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

2.2.3 矩阵的乘法

定义 2.5 设 $\mathbf{A} = (a_{ij})$ 是 $m \times s$ 矩阵, $\mathbf{B} = (b_{ij})$ 是 $s \times n$ 矩阵,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ms} \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{sn} \end{pmatrix},$$

则称 $m \times n$ 矩阵 $\mathbf{C} = (c_{ij})$ 为矩阵 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 的乘积, 其中

$$\begin{aligned} c_{ij} &= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{is}b_{sj} \\ &= \sum_{k=1}^s a_{ik}b_{kj} \quad (i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, n). \end{aligned}$$

记作 $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$.

在矩阵乘法的定义中, 要求第一个矩阵的列数必须等于第二个矩阵的行数. 乘积 $\mathbf{C}$ 的第 i 行第 j 列的元素等于 $\mathbf{A}$ 的第 i 行与 $\mathbf{B}$ 的第 j 列的对应元素的乘积的和.

例 2.6 设

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 5 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix},$$

求 $\mathbf{AB}$.

$$\begin{aligned}
 \text{解 } \mathbf{AB} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 5 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 \times 1 + (-1) \times 2 + 2 \times 0 & 0 \times 3 + (-1) \times (-3) + 2 \times 4 \\ 1 \times 1 + 3 \times 2 + (-1) \times 0 & 1 \times 3 + 3 \times (-3) + (-1) \times 4 \\ 5 \times 1 + (-1) \times 2 + 4 \times 0 & 5 \times 3 + (-1) \times (-3) + 4 \times 4 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -2 & 11 \\ 7 & -10 \\ 3 & 34 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

例 2.7 设矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

求 $\mathbf{AB}, \mathbf{BA}, \mathbf{AC}$.

$$\text{解 } \mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{AC} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

由矩阵乘法定义及上述例题可知,当矩阵 $\mathbf{AB}$ 有意义时, $\mathbf{BA}$ 不一定有意义;而且 $\mathbf{AB}$ 和 $\mathbf{BA}$ 也不一定相等,即矩阵的乘法不满足交换律. 当 $\mathbf{AB} = \mathbf{O}$ 时, $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 可以是非零矩阵. 也即两个非零矩阵的乘积可能是零矩阵. 当有 $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$, 且 $\mathbf{A} \neq \mathbf{O}$ 时, 不一定有 $\mathbf{B} = \mathbf{C}$.

矩阵乘法与数的乘法有着不同的地方,也有相似的地方,即矩阵乘法满足下列运算定律:

- (1) $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$;
- (2) $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}, (\mathbf{B} + \mathbf{C})\mathbf{A} = \mathbf{BA} + \mathbf{CA}$;
- (3) $k(\mathbf{AB}) = (k\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(k\mathbf{B}), k$ 为常数;
- (4) $\mathbf{E}_m \mathbf{A}_{m \times n} = \mathbf{A}_{m \times n}, \mathbf{A}_{m \times n} \mathbf{E}_n = \mathbf{A}_{m \times n}$.

因为矩阵的乘法满足结合律,所以可定义矩阵的幂.

设 $\mathbf{A} = (a_{ij})$ 是 n 阶矩阵,用 $\mathbf{A}^k (k > 0)$ 表示 k 个 $\mathbf{A}$ 的连乘积,称为 $\mathbf{A}$ 的

k 次方幂, 规定 $\mathbf{A}^0 = \mathbf{E}$.

显然, 矩阵的幂运算满足下列运算定律:

$$\mathbf{A}^k \mathbf{A}^l = \mathbf{A}^{k+l}, (\mathbf{A}^k)^l = \mathbf{A}^{kl} (k, l \geq 0).$$

由于矩阵的乘法不满足交换律, 所以等式

$$(\mathbf{AB})^k = \mathbf{A}^k \mathbf{B}^k$$

一般不成立.

如果 $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$, 就称矩阵 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 可交换. 此时矩阵 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 一定是同阶方阵.

显然, n 阶单位矩阵与 n 阶数量矩阵及 n 阶零矩阵与任一 n 阶矩阵都可交换. 如果矩阵 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 可交换, 则有 $(\mathbf{AB})^k = \mathbf{A}^k \mathbf{B}^k$.

例 2.8 设矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}$, 求 $\mathbf{A}^{100}$.

解 因为

$$\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2\lambda & 1 \end{pmatrix}, \dots,$$

$$\text{所以 } \mathbf{A}^{100} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 100\lambda & 1 \end{pmatrix}.$$

例 2.9 设上三角矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

求 $\mathbf{A}^n$.

解 设

$$\lambda \mathbf{E} = \begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \lambda & \\ & & \lambda \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

则 $\mathbf{A} = \lambda \mathbf{E} + \mathbf{B}$.

由于 $\lambda \mathbf{E}$ 与 $\mathbf{B}$ 可交换, 因而有

$$\mathbf{A}^n = (\lambda \mathbf{E} + \mathbf{B})^n = \lambda^n \mathbf{E} + n\lambda^{n-1} \mathbf{B} + \frac{n(n-1)}{2} \lambda^{n-2} \mathbf{B}^2 + \dots + \mathbf{B}^n.$$

由于

$$\mathbf{B}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{B}^3 = \mathbf{B}^4 = \cdots = \mathbf{B}^n = \mathbf{O} (n \geqslant 3),$$

所以有

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^n &= (\lambda \mathbf{E} + \mathbf{B})^n = \lambda^n \mathbf{E} + n\lambda^{n-1} \mathbf{B} + \frac{n(n-1)}{2} \lambda^{n-2} \mathbf{B}^2 \\ &= \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2!} \lambda^{n-2} \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{pmatrix} (n \geqslant 2). \end{aligned}$$

2.2.4 矩阵的转置

把一个矩阵的行列互换,所得到的矩阵称为这个矩阵的转置.

定义 2.6 设 $\mathbf{A} = (a_{ij})$ 是一个 $m \times n$ 矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

则 $n \times m$ 矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为矩阵 $\mathbf{A}$ 的转置矩阵,简称 $\mathbf{A}$ 的转置,记作 $\mathbf{A}^T$.

例 2.10 设矩阵

$$\mathbf{A} = (a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n), \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

求 $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$, $\mathbf{A} \mathbf{A}^T$ 和 $\mathbf{B}^T \mathbf{B}$.

解 因为

$$\mathbf{A}^T = (a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n)^T = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},$$

所以

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^T \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} (a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n) = \begin{pmatrix} a_1^2 & a_1 a_2 & \cdots & a_1 a_n \\ a_2 a_1 & a_2^2 & \cdots & a_2 a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n a_1 & a_n a_2 & \cdots & a_n^2 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{A} \mathbf{A}^T &= (a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2. \end{aligned}$$

又

$$\mathbf{B}^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

所以

$$\mathbf{B}^T \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

矩阵的转置满足下列运算定律:

- (1) $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$;
- (2) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$;
- (3) $(k\mathbf{A})^T = k\mathbf{A}^T$ (k 为实数);
- (4) $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$.

由对称矩阵的概念可知, $\mathbf{A}$ 为对称矩阵即 $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$; $\mathbf{A}$ 为反对称矩阵即 $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$.

2.2.5 方阵的行列式

定义 2.7 设 $A = (a_{ij})$ 是一个 n 阶矩阵, 由 A 的元素所构成的行列式(各元素的位置不变), 称为矩阵 A 的行列式, 记作 $|A|$ 或 $\det A$.

由 n 阶矩阵 A 确定的行列式 $|A|$ 的运算满足下列运算定律:

- (1) $|A^T| = |A|$;
- (2) $|\lambda A| = \lambda^n |A|$, λ 是实数, 特别地, $|-A| = (-1)^n |A|$;
- (3) $|AB| = |A| |B|$, 特别地 $|A^n| = |A|^n$.

例 2.11 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \beta_1, \beta_2$ 均为四维列向量, 已知

$A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1), B = (\alpha_3, \alpha_1, \alpha_2, \beta_2)$, 且 $|A| = 1, |B| = 2$. 求 $|A+B|$.

解 由于矩阵加法 $A+B = (\alpha_1 + \alpha_3, \alpha_2 + \alpha_1, \alpha_3 + \alpha_2, \beta_1 + \beta_2)$, 根据行列式的性质有

$$\begin{aligned}
 |A+B| &= |\alpha_1 + \alpha_3, \alpha_2 + \alpha_1, \alpha_3 + \alpha_2, \beta_1 + \beta_2| \\
 &= |2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3), \alpha_2 + \alpha_1, \alpha_3 + \alpha_2, \beta_1 + \beta_2| \\
 &= 2|\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_2 + \alpha_1, \alpha_3 + \alpha_2, \beta_1 + \beta_2| \\
 &= 2|\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, -\alpha_3, -\alpha_1, \beta_1 + \beta_2| \\
 &= 2|\alpha_2, -\alpha_3, -\alpha_1, \beta_1 + \beta_2| \\
 &= 2|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1 + \beta_2| \\
 &= 2(|A| + |B|) = 6.
 \end{aligned}$$

在上一章中, 行列式有乘法公式 $|AB| = |A| \cdot |B|$, 但 $|A+B|$ 没有运算法则, 本例题考查用行列式性质对其化简. 同时要注意 $|k\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n| = k|\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n|$, 而 $|kA| = k^n |A|$, 不是 $k|A|$, 两者亦不能混淆.

—— 2.3 逆矩阵 ——

2.3.1 逆矩阵的概念和性质

前面我们定义了矩阵的加法、减法和乘法运算, 那么矩阵能否定义除法

运算呢？先来看数的除法与乘法的关系。

设 a, b 为两个数, 当 $a \neq 0$ 时, a 的倒数 $\frac{1}{a}$ 存在, 且有 $b \div a = b \times \frac{1}{a}$, 即数的除法可用乘法来表示. 上述关系成立的关键是 a 的倒数 $\frac{1}{a}$ 存在. a 的倒数也称为 a 的逆, 即 $\frac{1}{a} = a^{-1}$. 显然只要 $a \neq 0$ 时, a 就有逆 a^{-1} , 且满足

$$aa^{-1} = a^{-1}a = 1.$$

类似地, 我们可以引入逆矩阵的概念.

定义 2.8 设 A 是一个 n 阶矩阵, 若存在矩阵 B , 满足:

$$AB = BA = E.$$

则称矩阵 A 可逆, B 是 A 的逆矩阵. 如果不存在满足条件的矩阵 B , 则称矩阵 A 不可逆.

$$\text{例如, 矩阵 } A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

因为

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

所以矩阵 A 可逆, 其逆为矩阵 B .

根据可逆矩阵的定义易证可逆矩阵具有以下性质:

性质 1 若矩阵 A 可逆, 则 A 的逆矩阵必唯一. 此时, A 的逆矩阵记作 A^{-1} .

证明 设矩阵 B_1, B_2 都是 A 的逆矩阵, 则 $B_1A = AB_1 = E, B_2A = AB_2 = E$,

$$B_1 = B_1E = B_1(AB_2) = (B_1A)B_2 = EB_2 = B_2.$$

性质 2 若 A 可逆, 则 A^{-1} 也可逆, 且 $(A^{-1})^{-1} = A$.

性质 3 若 A 可逆, 数 $k \neq 0$, 则 kA 也可逆, 且 $(kA)^{-1} = k^{-1}A^{-1}$.

性质 4 若 n 阶矩阵 A, B 可逆, 则 AB 也可逆, 且 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

证明 因为 A, B 可逆, 故逆矩阵 A^{-1}, B^{-1} 都存在, 且有

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AE A^{-1} = AA^{-1} = E,$$

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}EB = B^{-1}B = E,$$

所以 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

上述性质 4 可以推广到多个 n 阶矩阵相乘的情形, 即当 n 阶矩阵 $A_1, A_2, \dots, A_s$ 都可逆时, 乘积 $A_1 A_2 \cdots A_s$ 也可逆, 且有 $(A_1 A_2 \cdots A_s)^{-1} = A_s^{-1} A_{s-1}^{-1} \cdots A_1^{-1}$.

性质 5 如果矩阵 A 可逆, 则 A^T 也可逆, 且 $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

性质 6 如果矩阵 A 可逆, 则 $|A^{-1}| = |A|^{-1}$.

2.3.2 逆矩阵的计算

定义 2.9 设 $A = (a_{ij})$ 是一个 n 阶矩阵, A_{ij} 为 $|A|$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式, $i, j = 1, 2, \dots, n$, 称矩阵

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

为 A 的伴随矩阵, 记作 A^* .

定理 2.1 n 阶矩阵 A 可逆的充分必要条件为 $|A| \neq 0$. 如果 A 可逆, 则

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^* = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

证明 必要性. 设 n 阶矩阵 A 可逆, 则存在矩阵 B , 有 $AB = BA = E$. 两边取行列式得

$$|AB| = |A| |B| = |E| = 1, \text{ 所以有 } |A| \neq 0.$$

充分性. 设 $|A| \neq 0$, 由伴随矩阵的构成及行列式按行展开的性质可得:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \mathbf{A}^* &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\mathbf{A}| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |\mathbf{A}| & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & |\mathbf{A}| \end{pmatrix} \\ &= |\mathbf{A}| \mathbf{E}, \end{aligned}$$

所以 $\mathbf{A} \left(\frac{1}{|\mathbf{A}|} \mathbf{A}^* \right) = \mathbf{E}$. 同理有 $\left(\frac{1}{|\mathbf{A}|} \mathbf{A}^* \right) \mathbf{A} = \mathbf{E}$.

所以矩阵 $\mathbf{A}$ 可逆, 且 $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \mathbf{A}^*$.

定理给出了矩阵 $\mathbf{A}$ 可逆的充分必要条件, 同时也给出了求逆矩阵的方法, 这种方法称为伴随矩阵法.

当矩阵 $\mathbf{A}$ 满足 $|\mathbf{A}| \neq 0$ 时, 称 $\mathbf{A}$ 为非奇异矩阵, 否则称为奇异矩阵.

推论对于 n 阶矩阵 $\mathbf{A}$, 如果存在矩阵 $\mathbf{B}$, 有 $\mathbf{AB} = \mathbf{E}$, 则矩阵 $\mathbf{A}$ 可逆, 且 $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$.

例 2.12 求矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

的伴随矩阵 $\mathbf{A}^*$.

解 因为

$$\mathbf{A}_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1, \mathbf{A}_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4, \mathbf{A}_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 3,$$

$$\mathbf{A}_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1, \mathbf{A}_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 5, \mathbf{A}_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3,$$

$$\mathbf{A}_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1, \mathbf{A}_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -6, \mathbf{A}_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4,$$

所以

$$\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -1 & 5 & 3 \\ 1 & -6 & -4 \end{pmatrix}.$$

例 2.13 设

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

求 $\mathbf{A}$ 可逆的条件, 在可逆的条件下, 求 $\mathbf{A}^{-1}$.

解 $\mathbf{A}$ 可逆的充分必要条件是 $|\mathbf{A}| = ad - bc \neq 0$.

在此条件下,

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \mathbf{A}^* = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

例 2.14 矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

是否可逆? 若可逆, 求 $\mathbf{A}^{-1}$.

解 因为 $A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$, $A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$, $A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 2$,

故 $|\mathbf{A}| = 1 \times (-1) + 2 \times (-1) + 1 \times 2 = -1 \neq 0$, 所以 $\mathbf{A}$ 可逆.

又

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2, A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1, A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 4,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1, A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1, A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3,$$

所以

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \mathbf{A}^* = -\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -4 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

例 2.15 设

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

求矩阵 $\mathbf{X}$, 使得 $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$.

解 因为

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 6 \neq 0,$$

所以 $\mathbf{A}$ 可逆, 则可求得

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

在 $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ 的两边左乘 $\mathbf{A}^{-1}$, 得 $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{AX} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$, 即有

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 11 & 3 \\ -1 & -3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

例 2.16 求证: $(\mathbf{A}^*)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^* = \frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|}$.

证明 设 $\mathbf{A}$ 可逆, 则

$$(\mathbf{A}^*)^{-1} = (|\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|},$$

$$(\mathbf{A}^{-1})^* = |\mathbf{A}^{-1}|(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|}.$$

例 2.17 已知 $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ 均为 n 阶矩阵, 且 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{E} - \mathbf{AB}$ 都是可逆矩阵, 证明 $\mathbf{E} - \mathbf{BA}$ 可逆.

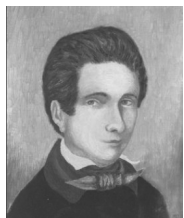
证明

$$\begin{aligned} |\mathbf{E} - \mathbf{BA}| &= |\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} - \mathbf{BA}| = |(\mathbf{A}^{-1} - \mathbf{B})\mathbf{A}| \\ &= |\mathbf{A}^{-1} - \mathbf{B}| |\mathbf{A}| = |\mathbf{A}| |\mathbf{A}^{-1} - \mathbf{B}| \\ &= |\mathbf{A}(\mathbf{A}^{-1} - \mathbf{B})| = |\mathbf{E} - \mathbf{AB}| \neq 0 \end{aligned}$$

故 $\mathbf{E} - \mathbf{BA}$ 可逆.

代数名家卡片(伽罗瓦)

埃瓦里斯特·伽罗瓦,1811年10月25日生,法国数学家,现代数学中的分支学科群论的创立者.用群论彻底解决了根式求解代数方程的问题,而且由此发展了一整套关于群和域的理论,人们称之为伽罗瓦群和伽罗瓦理论.他系统化地阐释了为何五次以上的方程式没有公式解,而四次以下有公式解.



延伸阅读二

图书库存管理与订单分配问题

随着大数据、物联网和人工智能技术的广泛应用,中国许多大型图书馆、书店以及在线平台都采用了智能化的库存管理系统和订单分配系统.这些系统能够根据销售数据和读者需求预测,合理安排库存,并通过智能分配算法优化物流,提升运营效率.这一过程不仅提高了图书供应链的管理水平,也有效推动了知识的快速传播.中国的“全民阅读”工程和“文化扶贫”战略中,许多乡村地区的中小学、图书馆都实现了信息化的图书管理系统建设.这些系统能够精准地进行库存管理,及时补充缺货书籍,并通过高效的订单分配系统将图书配送到各地,满足读者的阅读需求,尤其是偏远地区的儿童和青少年.这不仅缩小了城乡文化资源分配上的差距,也在国家促进教育公平、文化均衡发展的战略中起到了重要作用.作为国家的青年力量,应当认识到技术背后更深层次的社会意义,学习先进的管理技术,同时培养社会责任感,把个人发展与国家的文化建设和社会服务事业相结合,努力为实现全民阅读、文化强国目标贡献智慧与力量.

【案例描述】

某书店接到多所学校的教科书订单.书店需要从三个仓库为两所学校分配相应数量的教科书.每个仓库储存的教科书数量不同,而每所学校的订单需求也各不相同.任务是帮助书店合理分配仓库的库存,以满足学校的需求,并在某些情况下计算额外的补货需求.

【数学模型】

(1) 每个仓库的库存情况可以用矩阵 A 表示,矩阵中的元素 a_{ij} 表示仓库

i 对学校 j 的可供应数量. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 100 & 80 & 60 \\ 120 & 90 & 50 \end{pmatrix}$ 这个 3×2 矩阵表示仓库 1 有

100 本教科书可供学校 1, 有 80 本可供学校 2; 仓库 2 和仓库 3 类似.

(2) 学校的教科书需求可以用一个 2×1 的列矩阵 $\mathbf{B}$ 表示: $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 230 \\ 220 \end{pmatrix}$, 其中, 第一行表示学校 1 的总需求是 230 本, 第二行表示学校 2 的总需求是 220 本.

通过本章的学习, 学生将理解矩阵及其运算(包括加法、乘法、求逆等), 并最终解决如何有效分配库存以满足学校的订单需求, 或确定是否需要额外补货.

1. 矩阵的概念

首先, 学生会学习矩阵的基本概念, 并了解如何用矩阵来描述实际问题. 在本案例中, 库存矩阵 $\mathbf{A}$ 和需求矩阵 $\mathbf{B}$ 代表仓库库存和学校需求的情况. 通过这个案例, 学生可以清楚地看到矩阵如何用于表示多个实体之间的关系(即仓库和学校之间的教科书分配情况).

学生在这一部分应熟悉矩阵的维数, 如何将实际问题抽象为矩阵, 以及矩阵中的元素如何对应到现实问题.

2. 矩阵运算

学生接着会学习矩阵的基本运算, 包括矩阵加法、标量乘法和矩阵乘法. 这里, 矩阵运算可以直接用于计算各仓库为学校分配的教科书数量. 比如, 仓库的总库存 $\mathbf{A}$ 和一个分配策略矩阵 $\mathbf{X}$ 的乘积 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X}$ 可以用于表示分配结果:

$$\begin{pmatrix} 100 & 80 & 60 \\ 120 & 90 & 50 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 230 & 220 \end{pmatrix}$$

学生将通过矩阵乘法理解如何根据仓库库存和学校需求确定合理的分配策略.

3. 逆矩阵

在解决库存分配问题时, 假如仓库的库存与学校的需求存在某种线性对应关系(例如库存足够并且需求精确对应库存的分配), 则可以通过逆矩阵来求解分配方案. 假设书店可以通过一定的策略调整每个仓库的库存分配, 这样就能找到一个合适的库存分配矩阵 $\mathbf{X}$, 满足 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$. 通过求逆矩阵 $\mathbf{A}^{-1}$, 学生将能够解出最优的分配策略:

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}.$$

学生会学到如何在满足条件的情况下,利用逆矩阵解决线性方程组,找到合理分配方式.

特殊情况:库存不足或超出需求

在现实问题中,仓库的库存可能不足以完全满足需求.在这种情况下,学生可以通过矩阵运算计算缺少的库存量.假设仓库的库存不足,则通过矩阵乘法运算,学生可以计算出实际库存与需求的差异.这可以引导学生在学完矩阵运算后,通过设置方程组,计算出每个仓库需要额外补充多少库存,才能完全满足学校的订单.

• 基础分配策略:学生首先需要通过矩阵乘法计算初步的库存分配情况.假设书店采取一个简单策略,平均分配库存,那么学生可以利用矩阵乘法计算各仓库的教科书分配情况.

• 校验是否满足需求:学生将学会通过矩阵运算校验仓库库存是否能够满足学校需求,是否需要额外补货,或者是否需要重新分配库存.

• 应用逆矩阵求解最优分配:如果库存和需求完全匹配,学生可以通过逆矩阵的方法求出最优的库存分配方案,确保每个学校的需求都能被最优满足.

基本练习题二

1. 设矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & b \\ 1 & a & -5 & -2 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} c & -1 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & d & -2 \end{pmatrix}$$

且 $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, 求元素 a, b, c, d 的值.

2. 设矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -4 & 0 \\ -3 & 5 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & -4 & 9 & 12 \\ 6 & -8 & -9 & 5 \end{pmatrix}.$$

求(1) $3\mathbf{A} - \mathbf{B}$; (2) $2\mathbf{A} + 3\mathbf{B}$; (3) 若 $\mathbf{X}$ 满足 $(3\mathbf{A} - \mathbf{X}) + 2(\mathbf{B} - \mathbf{X}) = \mathbf{0}$, 求 $\mathbf{X}$.

3. 计算下列各题.

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad (2) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \end{pmatrix};$$

$$(3) \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}; \quad (4) \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix};$$

$$(5) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

4. 计算 $\mathbf{AB} - \mathbf{BA}$, 其中

$$(1) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$(2) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. 计算下列各题.

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^2; \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2;$$

$$(3) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n \quad (n \text{ 是正整数});$$

$$(4) \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^n \quad (n \text{ 是正整数}).$$

6. 设矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -4 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

求 (1) $\mathbf{A}^T \mathbf{B}$; (2) $(\mathbf{AB})^T$.

7. 设矩阵 A, B, C 满足 $AB = BA, AC = CA$, 试证:

$$(1) A(B+C) = (B+C)A; \quad (2) A(BC) = (BC)A;$$

$$(3) (A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3.$$

8. 对任意 n 阶矩阵 A , 试证:

$$(1) A + A^T \text{ 为对称矩阵}; \quad (2) A - A^T \text{ 为反对称矩阵}.$$

9. 举反例说明下列命题是错误的:

$$(1) \text{ 若 } A^2 = 0, \text{ 则 } A = 0;$$

$$(2) \text{ 若 } A^2 = A, \text{ 则 } A = 0 \text{ 或 } A = E;$$

$$(3) \text{ 若 } AB = AC, \text{ 且 } A \neq 0, \text{ 则 } B = C.$$

10. 设矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

求 (1) $|A^T B^2 C|$; (2) $|(2A - 3C)B|$; (3) $|(3BB^T)^2|$.

$$11. \text{ 求矩阵 } A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix} \text{ 的伴随矩阵 } A^*.$$

12. 求下列矩阵的逆矩阵.

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; \quad (2) \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix};$$

$$(3) \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad (4) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$(5) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}; \quad (6) \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

13. 求满足下列方程的矩阵 X .

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix};$$

$$(2) \mathbf{X} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$(3) \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{X} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

综合练习题二

1. 设矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & a \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b & 2 & c \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

当 $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ 时, 求 a, b, c .

2. 设二阶方阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 和三阶矩阵 $\mathbf{A}$, 分别求 $(\mathbf{A}^*)^*$.

3. 设 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 都是 n 阶矩阵, 已知 $|\mathbf{A}| = 2, |\mathbf{B}| = -3$, 求 $|2\mathbf{A}^* \mathbf{B}^{-1}|$.

4. 设矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

矩阵 $\mathbf{B}$ 满足 $\mathbf{AB} + \mathbf{B} + \mathbf{A} + 2\mathbf{E} = \mathbf{0}$, 求 $|\mathbf{B} + \mathbf{E}|$.

5. 已知方阵 $\mathbf{A}$ 满足 $\mathbf{A}^2 - \mathbf{A} - 2\mathbf{E} = \mathbf{0}$, 证明 $\mathbf{A}$ 及 $\mathbf{A} + 2\mathbf{E}$ 都可逆, 并求 $\mathbf{A}^{-1}$ 及 $(\mathbf{A} + 2\mathbf{E})^{-1}$.

6. 证明: 对于任意方阵 $\mathbf{A}$ 满足 $\mathbf{A}\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^*\mathbf{A} = |\mathbf{A}|\mathbf{E}$.

7. 设 $\mathbf{A}$ 是 $m \times n$ 阶实矩阵, 则 $\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{0}$ 的充分必要条件是 $\mathbf{A} = \mathbf{0}$.

8. 设 $\mathbf{A}$ 是 $n \times 1$ 阶矩阵, $\mathbf{B}$ 是 $1 \times n$ 阶矩阵, 若 $\mathbf{P} = \mathbf{AB} \neq \mathbf{0}, \mathbf{P}^k = \mathbf{0} (k > 2)$, 则 $\mathbf{P}^2 = \mathbf{0}$.

9. 设 $\mathbf{A}$ 是 n 阶矩阵, $\mathbf{A}^*$ 是 $\mathbf{A}$ 的伴随矩阵, 则 $\mathbf{A}$ 可逆的充分必要条件是 $|\mathbf{A}^*| \neq 0$.

10. 设 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 均为 n 阶可逆矩阵, 证明:

$$(1) (\mathbf{A}^k)^* = (\mathbf{A}^*)^k; \quad (2) (k\mathbf{A})^* = k^{n-1} \mathbf{A}^*;$$

$$(3) (\mathbf{AB})^* = \mathbf{B}^* \mathbf{A}^*; \quad (4) |\mathbf{A}^*| = |\mathbf{A}|^{n-1};$$

$$(5) (\mathbf{A}^*)^* = |\mathbf{A}|^{n-2} \mathbf{A}.$$

11. 设多项式 $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m$, 记

$$f(\mathbf{A}) = a_0\mathbf{E} + a_1\mathbf{A} + \cdots + a_m\mathbf{A}^m,$$

$f(\mathbf{A})$ 称为方阵 $\mathbf{A}$ 的 m 次多项式.

$$(1) \text{ 设 } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \text{ 证明: } \mathbf{A}^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 \\ 0 & \lambda_2^k \end{pmatrix}, f(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & 0 \\ 0 & f(\lambda_2) \end{pmatrix}.$$

$$(2) \text{ 设 } \mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^{-1}, \text{ 证明: } \mathbf{A}^k = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}^k\mathbf{P}^{-1}, f(\mathbf{A}) = \mathbf{P}f(\mathbf{\Lambda})\mathbf{P}^{-1}.$$

拓展训练二

1. (2002 年) 已知 $\boldsymbol{\alpha} = (1, 2, 1)^T, \boldsymbol{\beta} = \left(1, \frac{1}{2}, 0\right)^T, \mathbf{A} = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T$, 则 $\mathbf{A}^4 =$ _____.

解 因为矩阵乘法有结合律, 注意到 $\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha}$ 是一个数, 这就有

$$\mathbf{A}^2 = (\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T)(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T) = \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\beta}^T = 2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T = 2\mathbf{A},$$

$$\mathbf{A}^4 = 2^3\mathbf{A} = 2^3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1, \frac{1}{2}, 0 \end{pmatrix} = 8 \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 0 \\ 16 & 8 & 0 \\ 8 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. (2008 年) 设 $\mathbf{A}$ 为 n 阶非零矩阵, $\mathbf{E}$ 为 n 阶单位矩阵, 若 $\mathbf{A}^3 = \mathbf{0}$, 则 ()

- A. $\mathbf{E} - \mathbf{A}$ 不可逆, $\mathbf{E} + \mathbf{A}$ 不可逆
- B. $\mathbf{E} - \mathbf{A}$ 不可逆, $\mathbf{E} + \mathbf{A}$ 可逆
- C. $\mathbf{E} - \mathbf{A}$ 可逆, $\mathbf{E} + \mathbf{A}$ 可逆
- D. $\mathbf{E} - \mathbf{A}$ 可逆, $\mathbf{E} + \mathbf{A}$ 不可逆

解 由于 $(\mathbf{E} - \mathbf{A})(\mathbf{E} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2) = \mathbf{E} - \mathbf{A}^3 = \mathbf{E}$, $(\mathbf{E} + \mathbf{A})(\mathbf{E} - \mathbf{A} + \mathbf{A}^2) = \mathbf{E} + \mathbf{A}^3 = \mathbf{E}$, 故 $\mathbf{E} - \mathbf{A}, \mathbf{E} + \mathbf{A}$ 均可逆, 应选 C.

3. (2009 年) 设 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 均为 2 阶矩阵, $\mathbf{A}^*, \mathbf{B}^*$ 分别为 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 的伴随矩阵, 若

的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{n-1} = 0, \lambda_n = 1$, $E - \alpha\alpha^T$ 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{n-1} = 1, \lambda_n = 0$, 从而 $|E - \alpha\alpha^T| = 0$, 即 $E - \alpha\alpha^T$ 不可逆, 所以答案选 A.

实际案例分析二

1. 在讨论国民经济的数学问题中, 如何用合理的数学符号和方式来表示某一地区关于运输物资的产地和销地问题? 或者调运方案问题?

分析 在国民经济问题中, 常常用到矩阵, 也就是说用矩阵来表示物资的产地和销地问题是一种更合理和直观的形式, 例如在某一地区, 煤有 s 个产地 $A_1, A_2, \cdots, A_s$ 和 n 个销地 $B_1, B_2, \cdots, B_n$, 那么一个调运方案就可用一个矩

阵 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}$ 来表示, 其中 a_{ij} 表示由产地 A_i 运到销地 B_j 的数量.

2. 一个城市有三个重要的企业: 一个煤矿, 一个发电厂和一条铁路. 开采 1 元钱的煤, 煤矿必须支付 0.25 元的运输费. 而生产 1 元钱的电力, 发电厂需支付 0.65 元的煤作燃料, 自己亦需支付 0.05 元的电费来驱动辅助设备及支付 0.05 元的运输费. 而提供 1 元钱的运输费, 铁路需支付 0.55 元的煤作燃料, 0.10 元的电费驱动它的辅助设备. 某周内, 煤矿从外面接到 50 000 元煤的定货, 发电厂从外面接到 25 000 元电力的定货, 外界对地方铁路没有要求. 问这三个企业在那一周内生产总多少时才能精确地满足它们本身的要求和外界的要求?

分析 对于一周的周期, x_1 表示煤矿的总产值, x_2 表示电厂的总产值, x_3 表示铁路的总产值.

根据题意, $\begin{cases} x_1 - (0 \cdot x_1 + 0.65x_2 + 0.55x_3) = 50\,000, \\ x_2 - (0.25x_1 + 0.05x_2 + 0.10x_3) = 25\,000, \\ x_3 - (0.25x_1 + 0.05x_2 + 0 \cdot x_3) = 0. \end{cases}$ 写成矩阵形式, 得

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0.65 & 0.55 \\ 0.25 & 0.05 & 0.10 \\ 0.25 & 0.05 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50\,000 \\ 25\,000 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

记

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0.65 & 0.55 \\ 0.25 & 0.05 & 0.10 \\ 0.25 & 0.05 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 50\,000 \\ 25\,000 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

则上式写为 $\mathbf{X} - \mathbf{CX} = \mathbf{d}$, 即 $(\mathbf{E} - \mathbf{C})\mathbf{X} = \mathbf{d}$.

此方程组有唯一解, 其解为

$$\mathbf{X} = (\mathbf{E} - \mathbf{C})^{-1} \mathbf{d} = \frac{1}{503} \begin{pmatrix} 756 & 542 & 470 \\ 220 & 690 & 190 \\ 200 & 170 & 630 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 50\,000 \\ 25\,000 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 102\,087 \\ 56\,163 \\ 28\,330 \end{pmatrix}.$$

得煤矿总产值为 102 087 元, 发电厂总产值为 56 163 元, 铁路总产值为 28 330 元.

Matlab 应用二: 矩阵与逆矩阵的运算

例 2.18 用 Matlab 相关命令生成如下特殊矩阵

(1) 零矩阵

```
>>zeros(3,4)           %生成 3×4 级零矩阵
ans =                   %ans 为默认存储返回值的变量
    0    0    0    0
    0    0    0    0
    0    0    0    0
```

(2) 单位矩阵

```
>>eye(3)               %生成 3 阶单位矩阵
ans =
    1    0    0
    0    1    0
    0    0    1
```

(3) 对角矩阵

```
>>diag([1 2 -3])       %以 1,2,-3 为主对角元素生成对角矩阵
ans =
    1    0    0
    0    2    0
    0    0   -3
```

(4) 全 1 矩阵

```
>> ones(3) %生成 3 阶元素全是 1 的矩阵
```

```
ans =
```

```
1 1 1
```

```
1 1 1
```

```
1 1 1
```

例 2.19 设

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -3 & 6 & 4 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

求 $\mathbf{A}^T, \mathbf{A} + \mathbf{B}, \mathbf{AB}, \mathbf{A}^2, \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}, \mathbf{A} \cdot * \mathbf{B}$.

在 Matlab 命令行窗口输入如下命令：

```
>> A=[1 2 -1;0 1 2;-3 6 4] %输入矩阵 A,下面是回车后显示的返回值,如果输入错误可以按向上的箭头,编辑输入命令后敲回车键重新输入
```

```
A =
```

```
1 2 -1
```

```
0 1 2
```

```
-3 6 4
```

```
>> B=[-1 0 1;0 2 2;3 5 1] %输入矩阵 B
```

```
B =
```

```
-1 0 1
```

```
0 2 2
```

```
3 5 1
```

```
>> A' %求矩阵 A 的转置矩阵,ans 为返回值  
存储默认变量
```

```
ans =
```

```
1 0 -3
```

```
2 1 6
```

```
-1 2 4
```

```
>> A+B %计算两个矩阵的和
```

```
ans =
    0     2     0
    0     3     4
    0    11     5
>>A*B
```

%计算两个矩阵的乘积(俗称差乘),如果第一个矩阵的行数与第二个矩阵的列数不相等会出错

```
ans =
   -4    -1     4
     6    12     4
    15    32    13
>>A^2
```

%计算矩阵的乘方,等价于 $\mathbf{A} \times \mathbf{A}$

```
ans =
     4     -2    -1
    -6     13    10
   -15     24    31
>>inv(A)*B
```

%求 $\mathbf{A}$ 的逆矩阵与 $\mathbf{B}$ 的乘积

```
ans =
   -1.0000   0.1304   1.3478
     0   0.3478   0.2609
     0   0.8261   0.8696
>> A*B
```

%求矩阵 $\mathbf{A}$ 与矩阵 $\mathbf{B}$ 对应元素的乘积(俗称点乘).必须两个矩阵行列数相同时才能运算

```
ans =
   -1     0    -1
     0     2     4
   -9    30     4
```

例 2.3(续) 已知矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix},$

求 $\mathbf{A} + \mathbf{B}, \mathbf{A} - \mathbf{B}, 3\mathbf{A} + 2\mathbf{B}, \mathbf{B}^T, \mathbf{B}^T \mathbf{B}.$

解

```

>>A=[1 2 0;3 1 -2];B=[2 2 1;2 -4 -2]; %输入矩阵 A,B
>>A+B %计算矩阵 A+B
ans =
     3     4     1
     5    -3    -4
>>A-B %计算矩阵 A-B
ans =
    -1     0    -1
     1     5     0
>>3 * A+2 * B %计算矩阵 3A+2B,
乘号用 * 号表示不能省略!
ans =
     7    10     2
    13    -5   -10
>>B' %求 B 的转置矩阵,注意必须是英文输入状态下的单引号
ans =
     2     2
     2    -4
     1    -2
>>B' * B %求 B 的转置矩阵与 B 的乘积
ans =
     8    -4    -2
    -4    20    10
    -2    10     5

```

例 2.12(续) 求矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

的伴随矩阵 $\mathbf{A}^*$.

解

```
>>A=[2 2 3;1 -1 0;-1 2 1];           %输入矩阵 A
>>A\eye(3) * det(A)                   %求 A 的伴随矩阵
ans =
    -1.0000    4.0000    3.0000
    -1.0000    5.0000    3.0000
     1.0000   -6.0000   -4.0000
```

例 2.15(续) 设 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, 求矩阵 $\mathbf{X}$, 使得

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B}.$$

解

```
>> format rat                           %设定 Matlab 的输出
                                         为有理数

>>A=[1 1 -1;0 2 2;1 -1 0];
B=[1 -1;1 1;2 1];                      %输入矩阵 A,B
>>A\B                                    %求矩阵方程 AX = B
                                         的解

ans =
    11/6    1/2
   -1/6   -1/2
     2/3     1
```

第3章 矩阵的初等变换与线性方程组

实际案例

百鸡问题

今有鸡翁一,直钱五;鸡母一,直钱三;鸡雏三,直钱一,凡百钱买鸡百只.问鸡翁、母、雏各几何?(《张邱建算经》)

矩阵的初等变换是矩阵的一种非常重要的运算,本章在引入矩阵的初等变换的基础上首先给出矩阵的秩的概念,并利用初等变换研究秩的性质;然后运用矩阵的秩来研究线性方程组无解、有唯一解或有无穷多解的充分必要条件,并简要介绍一下运用初等变换求解线性方程组的方法.

—— 3.1 矩阵的初等变换 ——

克拉默法则解决了含有 n 个未知量 n 个方程的线性方程组有唯一解的问题,但在自然科学、工程技术、日常生活等许多领域内,还会大量碰到另外两类方程组的求解问题:一类是方程的个数和未知数的个数不相等(如上述“百鸡问题”);另一类是方程的个数和未知数的个数虽然相等,但方程组的系数行列式为零. 如

$$\text{例 3.1 解线性方程组} \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 2, & (1) \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, & (2) \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 2. & (3) \end{cases} \quad (3-1)$$

$$\text{因为方程组的系数行列式 } D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0, \text{ 所以由克拉默法则可知,上述方程组一定没有唯一解.}$$

那如何来求解这类方程组呢?

我们先来回顾一下用消元法求解线性方程组的过程.

$$\begin{aligned}
 (3-1) \xrightarrow[\substack{(2) \leftrightarrow (1) \\ (3)-(1)}]{(3)-2(2)} & \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, & (4) \\ 3x_2 + 3x_3 = 0, & (5) \\ 0 = 0. & (6) \end{cases} & (3-2) \\
 \xrightarrow[\substack{\frac{1}{5}(5)}]{(4)-2(8)} & \begin{cases} x_1 - x_3 = 1, & (7) \\ x_2 + x_3 = 0, & (8) \\ 0 = 0. & (9) \end{cases}
 \end{aligned}$$

方程组(3-3)中的(9)式是恒等式,所以(3-3)是3个未知数2个有效方程的方程组,方程组(3-3)本质上即为方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 1, & (7) \\ x_2 + x_3 = 0. & (8) \end{cases} \quad (3-4)$$

尽管方程组(3-3)和(3-4)都已呈梯形,但我们无法用以前熟悉的“回代”的方法来唯一确定 x_1, x_2, x_3 的值.

若将方程组改写为

$$\begin{cases} x_1 = 1 + x_3, \\ x_2 = -x_3, \end{cases}$$

任意给定 x_3 的值,就可以确定出 x_1, x_2 的值,从而得到方程组的一个解,表达式中的 x_3 常称为自由未知量. 于是,方程组(3-1)的解可以表示为

$$\begin{cases} x_1 = 1 + x_3, \\ x_2 = -x_3, \\ x_3 = x_3, \end{cases}$$

其中 x_3 可取任意数. 以后我们也常常令 $x_3 = k$, 把方程组的解记成

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

即

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ 其中 } k \text{ 为任意常数.}$$

以上解题中的消元过程是我们大家熟悉的,消元的过程其实就是把方程组中一个或几个方程进行了这样的操作,即:

(1) 互换方程组中某两个方程的排列位置,如 $(2) \leftrightarrow (1)$;

(2) 用不等于零的数乘以方程组中的某个方程,如 $\frac{1}{3}(5)$;

(3) 一个方程加上另一个方程的 k 倍,如 $(3) - 2(2)$ 等.

这三种操作常常称为方程组的三种变换.显然方程组的上述三种变换都是可逆的,所以每次变换前与变换后的方程组都是同解方程组.上述变换过程中,实际上我们是把整个方程组的每个方程看成一个整体进行变换的,改变的只是未知数的系数和常数项,未知数并没有参与运算.由此,我们可以引入矩阵的初等变换的概念,上述解方程的主要过程可以通过与方程组相对应的矩阵的初等变换来完成.

3.1.1 矩阵的初等变换

定义 3.1 对矩阵的行(列)进行下列三种变换,称为矩阵的初等行(列)变换:

(1) 互换矩阵中的两行(列)的位置,记作 $r_i \leftrightarrow r_j$ ($c_i \leftrightarrow c_j$);

(2) 用一个数 $k \neq 0$ 乘矩阵的某一行(列)的所有元素,记作 kr_i (kc_i);

(3) 把矩阵的某一行(列)的所有元素乘数 k 加到另一行(列)对应的元素上去,记作 $r_i + kr_j$ ($c_i + kc_j$).

矩阵的初等行变换和初等列变换统称为矩阵的初等变换.

当一个矩阵经过初等变换后,就变成了另外一个新的矩阵.例如,把矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

的第1行和第2行互换,就得到矩阵

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

定义 3.2 如果矩阵 $\mathbf{B}$ 可以由矩阵 $\mathbf{A}$ 经过一系列初等变换而得到,则称矩阵 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 是等价的,记作 $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$.

等价是矩阵之间的一种重要关系,具有下列性质:

- (1) 反身性, 即 $A \sim A$;
- (2) 对称性, 即若 $A \sim B$, 则 $B \sim A$;
- (3) 传递性, 即若 $A \sim B, B \sim C$, 则 $A \sim C$.

在等价的矩阵中, 常常会用到以下几种比较特殊的特殊矩阵.

定义 3.3 满足下面两个条件的矩阵称为行阶梯形矩阵:

- (1) 零行(若有零行)在下方;
- (2) 各个非零行的第一个不为零的元素 a_{ij} (称为首非零元), 它的列标 (j) 随着行标 (i) 的递增而严格增大.

例如矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

都是行阶梯形矩阵.

定义 3.4 满足下面两个条件的行阶梯形矩阵称为行最简形矩阵:

- (1) 各个非零行的首非零元都是 1;
- (2) 每个首非零元所在的列的其余元素都是零.

如矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

都是行最简形矩阵.

定义 3.5 如果一个矩阵的左上角是一个单位矩阵, 其他位置上的元素都为零, 则称这矩阵为标准形矩阵.

例 3.2 化矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 2 & 6 & -4 & 5 \\ -1 & -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

为行最简形矩阵和标准形矩阵.

$$\begin{aligned}
\text{解 } A &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 2 & 6 & -4 & 5 \\ -1 & -3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3+r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{r_3 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B_1 \text{ (} B_1 \text{ 是行阶梯形矩阵)} \\
&\xrightarrow{r_2 \div 2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B_2 \text{ (} B_2 \text{ 也是行阶梯形矩阵)} \\
&\xrightarrow[r_2-r_3]{\begin{matrix} r_1+2r_2 \\ r_1-4r_3 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B_3 \text{ (} B_3 \text{ 是行最简形矩阵)},
\end{aligned}$$

对 B_3 继续施行初等列变换, 有

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 2 & 6 & -4 & 5 \\ -1 & -3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\begin{matrix} c_2 \leftrightarrow c_3 \\ c_3 \leftrightarrow c_4 \end{matrix}]{\begin{matrix} c_2-3c_1 \\ c_2 \leftrightarrow c_3 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = B_4,$$

B_4 是标准形矩阵.

由此我们可以得到

定理 3.1 对任何非零矩阵 $A_{m \times n}$ 都可以仅经过有限次初等行变换化为行最简形矩阵, 任何非零矩阵 $A_{m \times n}$ 矩阵都可经过初等变换化为标准形矩阵.

即任何矩阵都等价于相应的行最简形矩阵和标准形矩阵.

3.1.2 初等矩阵

矩阵间的等价关系也可通过矩阵间的运算来表示.

定义 3.6 由单位矩阵 E 经过一次初等变换而得到的矩阵称为初等矩阵.

对应于三种初等变换, 有三种初等矩阵. 每个初等变换都有一个初等矩阵与之对应.

(1) 把单位矩阵 i 行与 j 行的位置互换 (或第 i 列与 j 列的位置互换), 得到的初等矩阵记作 $E(i, j)$, 即

$$E(i, j) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & 1 \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \\ \leftarrow \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \end{array}$$

第 i 列 第 j 列

(2) 用非零数 k 乘以单位矩阵的第 i 行(或第 i 列), 得到的初等矩阵记作 $E(i(k))$, 即

$$E(i(k)) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & k & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

第 i 列

(3) 用 k 乘单位矩阵的第 j 行再加到第 i 行(或 k 乘单位矩阵的第 i 列再加到第 j 列), 得到的初等矩阵记作 $E(i, j(k))$, 即

$$E(i, j(k)) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & \cdots & k & \\ & & & \ddots & \vdots & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \\ \leftarrow \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \end{array}$$

第 i 列 第 j 列

不难看出,初等矩阵都是可逆的,并且它们的逆矩阵是同一类型的初等矩阵:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(i, j)^{-1} &= \mathbf{E}(i, j), \\ \mathbf{E}(i(k))^{-1} &= \mathbf{E}(i(k^{-1})), \\ \mathbf{E}(i, j(k))^{-1} &= \mathbf{E}(i, j(-k)). \end{aligned}$$

有了初等矩阵的概念之后,我们就可以把一般矩阵 $\mathbf{A}$ 的初等变换同矩阵与初等矩阵的乘法运算联系起来了.我们先来看一个简单的例子:

设

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix},$$

用 2 阶初等矩阵 $\mathbf{E}(1, 2), \mathbf{E}(2(k)), \mathbf{E}(1, 2(k))$ 左乘 $\mathbf{A}$, 得

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(1, 2) \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{E}(2(k)) \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{E}(1, 2(k)) \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} + ka_{21} & a_{12} + ka_{22} & a_{13} + ka_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

用 3 阶初等矩阵 $\mathbf{E}(1, 2), \mathbf{E}(2(k)), \mathbf{E}(1, 2(k))$ 右乘 $\mathbf{A}$, 得

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \mathbf{E}(1, 2) &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{A} \mathbf{E}(2(k)) &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & ka_{12} & a_{13} \\ a_{21} & ka_{22} & a_{23} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{A} \mathbf{E}(1, 2(k)) &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & ka_{11} + a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & ka_{21} + a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

从上面的结果可知:用 2 阶初等矩阵 $\mathbf{E}(1, 2), \mathbf{E}(2(k)), \mathbf{E}(1, 2(k))$ 左乘

A , 分别相当于交换 A 的 1、2 两行, 用 k 乘 A 的第 2 行, 把 A 的第 2 行乘以 k 加到第 1 行上; 用 3 阶初等矩阵 $E(1, 2), E(2(k)), E(1, 2(k))$ 右乘 A , 分别相当于交换 A 的 1、2 两列, 用 k 乘 A 的第 2 列, 把 A 的第 1 列乘以 k 加到第 2 列上.

一般地, 有

定理 3.2 设 $A = (a_{ij})_{m \times n}$, 对 A 施行一次初等行变换相当于在 A 的左边乘上一个相应的初等矩阵; 对 A 施行一次初等列变换相当于在 A 的右边乘上一个相应的初等矩阵.

推论 1 矩阵 A, B 等价的充分必要条件是存在初等矩阵 $P_1, P_2, \dots, P_s; Q_1, Q_2, \dots, Q_t$, 使得

$$A = P_s \cdots P_1 B Q_1 \cdots Q_t.$$

推论 2 n 阶矩阵 A 可逆的充分必要条件是 $A = P_s P_{s-1} \cdots P_1$, 其中 $P_s, P_{s-1}, \dots, P_1$ 都是初等矩阵.

由推论 2, 若 A 可逆, 则有

$$A = P_s P_{s-1} \cdots P_1,$$

故有

$$P_1^{-1} P_2^{-1} \cdots P_s^{-1} A = E$$

及

$$A^{-1} = P_1^{-1} P_2^{-1} \cdots P_s^{-1}.$$

由此, 我们可以得到用初等变换求逆矩阵的方法: 在矩阵 A 的右边写上一个同阶的单位矩阵 E , 构成一个 $n \times 2n$ 的矩阵 $(A, E) \xrightarrow{r} (E, A^{-1})$. 若左半部分的矩阵不能化成单位矩阵 E , 则矩阵 A 不存在逆矩阵.

例 3.3 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, 求 A^{-1} .

解 构造矩阵 (A, E) 并对其进行初等行变换:

$$(A, E) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} r_1 \leftrightarrow r_2 \\ r_2 - 2r_1 \\ r_3 + r_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3 - 4r_2]{\begin{matrix} r_1 + r_2 \\ r_2 \leftrightarrow r_3 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -6 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 \times (-1)]{r_2 + r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\text{所以 } \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\text{例 3.4 求矩阵方程 } \mathbf{AX} = \mathbf{B}, \text{ 其中 } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

解 由推论 2, 若 $\mathbf{A}$ 可逆, 则有

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}_s \mathbf{P}_{s-1} \cdots \mathbf{P}_1,$$

故有

$$\mathbf{P}_1^{-1} \mathbf{P}_2^{-1} \cdots \mathbf{P}_s^{-1} \mathbf{A} = \mathbf{E}.$$

用 $\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}$ 右乘等式两端, 有 $\mathbf{P}_1^{-1} \mathbf{P}_2^{-1} \cdots \mathbf{P}_s^{-1} \mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} = \mathbf{X}$, 比较两式可以看出, 对 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 施行一系列相同的初等行变换, 当 $\mathbf{A}$ 化成单位矩阵时, $\mathbf{B}$ 化成了 $\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} = \mathbf{X}$, 即

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \xrightarrow{r} (\mathbf{E}, \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}).$$

于是有

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}, \mathbf{B}) &= \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow[r_3 - 3r_1]{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 8 \\ 0 & 4 & 5 & -2 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \div 4} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 5 & -2 & 7 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow[r_3 - 4r_2]{r_1 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2 - r_3]{r_1 + r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\text{所以 } \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

—— 3.2 矩阵的秩 ——

矩阵经过初等变换后,元素可以发生很大的变化,但等价矩阵之间也有许多特性是保持不变的,其中最本质的不变特性就是矩阵的秩.

定义 3.7 设有 $m \times n$ 矩阵 $\mathbf{A}$, 在 $\mathbf{A}$ 中位于任意选定的 k 行 k 列交点上的 k^2 个元素, 按原来的次序组成的 k 阶行列式, 称为 $\mathbf{A}$ 的一个 k 阶子式, 其中 $k \leq \min\{m, n\}$.

定义 3.8 矩阵 $\mathbf{A}$ 的非零子式的最高阶数称为矩阵 $\mathbf{A}$ 的秩, 记作 $R(\mathbf{A})$ 或 $\text{Rank}(\mathbf{A})$.

规定: 零矩阵 $\mathbf{O}$ 的秩为零, 即 $R(\mathbf{O}) = 0$.

例 3.5 求下列矩阵的秩,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

解 因为 $\mathbf{A}$ 的一个二阶子式

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

又 $\mathbf{A}$ 的四个三阶子式

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 0,$$

所以有 $R(\mathbf{A}) = 2$.

对于矩阵 $\mathbf{B}$, 容易发现 $\mathbf{B}$ 的所有四阶子式都为零, 同时有一个三阶子式

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

所以有 $R(\mathbf{B})=3$.

非零子式在矩阵的初等变换中,有一个非常重要的特性,那就是:如果 $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$, 则 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 中非零子式的最高阶数相等,从而有

定理 3.3 任何矩阵经初等变换后,其秩不变.

推论 等价矩阵具有相同的秩.

由定义易知矩阵的秩具有如下简单的性质:

(1) 设 $\mathbf{A}=(a_{ij})_{m \times n}$, 则 $0 \leq R(\mathbf{A}) \leq \min\{m, n\}$.

(2) 若矩阵 $\mathbf{A}$ 中有一个 r 阶子式不为零, 则 $R(\mathbf{A}) \geq r$; 若矩阵 $\mathbf{A}$ 的所有 r 阶子式都为零, 则 $R(\mathbf{A}) < r$.

(3) 行阶梯形矩阵的秩等于它的非零行的个数.

设 $\mathbf{A}=(a_{ij})_{m \times n}$, 如果 $R(\mathbf{A})=m$ ($R(\mathbf{A})=n$), 则称矩阵 $\mathbf{A}$ 为行(列)满秩矩阵, 简称满秩矩阵.

定理 3.4 n 阶矩阵 $\mathbf{A}$ 可逆的充分必要条件是 $\mathbf{A}$ 为满秩矩阵.

推论 n 阶可逆矩阵 $\mathbf{A}$ 与单位矩阵等价.

对于一般阶数较高的矩阵,用定义来求出它的秩往往比较麻烦,而对于行阶梯形矩阵,由于行阶梯形矩阵的秩等于它的非零行的行数,一看便可知,因此,把一个矩阵先化为行阶梯形矩阵再来求秩是一种常用的简便方法.

例 3.6 求矩阵的秩

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & 4 & 10 & -4 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & 4 & 10 & -4 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4 - 4r_1]{r_3 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 18 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 12 & -3 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow[r_4 - \frac{1}{2}r_3]{r_4 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 18 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

由秩的性质可得, $R(\mathbf{A}) = 3$.

此外, 对于矩阵的运算, 还有以下一些性质:

$$(1) \max\{R(\mathbf{A}), R(\mathbf{B})\} \leq R(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \leq R(\mathbf{A}) + R(\mathbf{B});$$

$$(2) R(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \leq R(\mathbf{A}) + R(\mathbf{B});$$

$$(3) R(\mathbf{AB}) \leq \min\{R(\mathbf{A}), R(\mathbf{B})\}.$$

—— 3.3 线性方程组的解 ——

n 个未知量 $x_1, x_2, \dots, x_n$, m 个方程的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \quad (3-5)$$

(3-5)式可以用矩阵形式写成

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \quad (3-6)$$

其中, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ 为系数矩阵, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ 为常数项矩阵, $\mathbf{x} =$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ 为未知数矩阵, $(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ 称为增广矩阵.

显然, 这个方程和前面讨论的矩阵方程 $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ 不同(因为 $\mathbf{A}$ 不一定是方阵), 但我们依然可以通过把增广矩阵 $(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ 化为行最简形矩阵来讨论方程组的解.

例 3.7 解方程组
$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ -2x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 2x_4 = 1, \\ 5x_1 + 5x_2 - 13x_3 - 3x_4 = -2. \end{cases}$$

$$\text{解 } (\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & 6 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & -13 & -3 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - 5r_1]{r_2 + 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & 10 & -8 & -8 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 + 2r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

由此可得 $R(\mathbf{A})=2, R(\mathbf{A}, \mathbf{b})=3$, 由矩阵 $(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ 可化成的行阶梯形矩阵可知, 线性方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 是无解的, 因为行阶梯形矩阵的第 3 行所对应的方程 $0 = -1$ 是一个矛盾方程!

由此可得

定理 3.5 线性方程组 (3-5) 有解的充分必要条件是它的系数矩阵的秩等于它的增广矩阵的秩. 即

$$R(\mathbf{A}) = R(\mathbf{A}, \mathbf{b}).$$

$$\text{例 3.8 解方程组 } \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 2, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 15x_4 = 7, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 11x_4 = 5. \end{cases}$$

$$\text{解 } (\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 1 & 15 & 7 \\ 1 & 3 & 2 & 11 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - r_1]{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 7 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 7 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - r_2]{r_1 - 2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 & -10 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

显然, $R(\mathbf{A}) = R(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = 2$, 由定理 3.5 可知, 原方程组有解, 与原方程组同解的方程组为

$$\begin{cases} x_1 - 7x_3 - 10x_4 = -4, \\ x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 3, \end{cases}$$

此时我们无法唯一确定 x_1, x_2, x_3, x_4 的值, 若将方程组改写为

$$\begin{cases} x_1 = -4 + 7x_3 + 10x_4, \\ x_2 = 3 - 3x_3 - 7x_4, \end{cases}$$

任意给定 x_3, x_4 的一组值, 则就可以确定出 x_1, x_2 的值, 从而得到方程组的一个解, 表达式中含有两个自由未知量 x_3, x_4 .

如令 $x_3 = k_1, x_4 = k_2$, k_1, k_2 可以任意取值, 则方程组的解可以写成

$$\begin{cases} x_1 = -4 + 7k_1 + 10k_2, \\ x_2 = 3 - 3k_1 - 7k_2, \\ x_3 = k_1, \\ x_4 = k_2, \end{cases} \quad (k_1, k_2 \text{ 为任意实数})$$

即

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 10 \\ -7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (k_1, k_2 \text{ 为任意实数})$$

上述这样的表达式称为线性方程组的通解, 由于 k_1, k_2 可取任意实数, 所以方程组有无穷多个解.

综合前面的讨论, 有

推论 (1) 当 $R(A) = R(A, b) = n$ 时, 方程组没有自由未知量, 只有唯一解;

(2) 当 $R(A) = R(A, b) = r < n$ 时, 方程组有 $n-r$ 个自由未知量, 令它们分别等于 $k_1, k_2, \dots, k_{n-r}$, 可得含 $n-r$ 个参数 $k_1, k_2, \dots, k_{n-r}$ 的解, 这些参数可任意取值, 因此这时方程组有无穷多个解;

(3) $R(A) \neq R(A, b)$ 时, 即 $(R(A) < R(A, b))$ 时, 方程组中含有矛盾方程, 无解.

例 3.9 λ 为何值时, 方程组 $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$ 有解?

$$\begin{aligned} \text{解} \quad (A, b) &= \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow[r_3 - \lambda r_1]{r_2 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda - 1 & 1 - \lambda & \lambda - \lambda^2 \\ 0 & 1 - \lambda & 1 - \lambda^2 & 1 - \lambda^3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 + r_2} \\ &\begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda - 1 & 1 - \lambda & \lambda - \lambda^2 \\ 0 & 0 & (\lambda + 2)(1 - \lambda) & (\lambda + 1)^2(1 - \lambda) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- (1) 当 $\lambda \neq -2$ 且 $\lambda \neq 1$ 时, $R(\mathbf{A}) = R(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = 3$, 方程组有唯一解;
 (2) 当 $\lambda = -2$ 时, $R(\mathbf{A}) = 2, R(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = 3$, 方程组无解;
 (3) 当 $\lambda = 1$ 时, $R(\mathbf{A}) = R(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = 1 < 3$, 方程组有无穷多个解, 此时

$$(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

由此得到

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1,$$

若把 x_2, x_3 取为自由未知量, 便可得到方程组的通解

$$\begin{cases} x_1 = 1 - x_2 - x_3, \\ x_2 = x_2, \\ x_3 = x_3, \end{cases} \quad (x_2, x_3 \text{ 可取任意值})$$

即
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (k_1, k_2 \text{ 为任意常数}).$$

当线性方程组(3-5)中的常数项全为零时, 方程组(3-5)即为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \quad \quad \quad \cdots \cdots \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0, \end{cases} \quad (3-7)$$

用矩阵形式表示写成

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{0}. \quad (3-8)$$

方程组(3-7)常常称为 n 元齐次线性方程组. 因为方程组(3-8)的增广矩阵只比系数矩阵多一列零向量, 所以它们的秩总是相等的. 也即方程组(3-7)总是有解的, 显然, $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ 就是方程组的一个解, 常称为齐次线性方程组的零解. 若有不全为零的一组 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的值使方程组(3-7)成立, 则它称为齐次线性方程组(3-7)的非零解.

由上面的论述和定理 3.5 的推论可得:

定理 3.6 齐次线性方程组 (3-7) 有非零解的充分必要条件是 $R(A) < n$.

例 3.10 解方程组
$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 0, \\ 8x_1 + 7x_2 + 6x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$$

解
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & 4 & -2 \\ 8 & 7 & 6 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - 4r_1]{r_2 - r_1} \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 & 1 \\ 1 & 8 & 6 & -3 \\ 0 & 19 & 14 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3 + r_2]{\substack{r_2 \leftrightarrow r_1 \\ r_2 - 2r_1}} \begin{pmatrix} 1 & 8 & 6 & -3 \\ 0 & -19 & -14 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_1 - 8r_2]{r_2 \div (-19)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{19} & -\frac{1}{19} \\ 0 & 1 & \frac{14}{19} & -\frac{7}{19} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

显然有 $R(A) = 2 < 4$, 因而齐次线性方程组有非零解, 同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 + \frac{2}{19}x_3 - \frac{1}{19}x_4 = 0, \\ x_2 + \frac{14}{19}x_3 - \frac{7}{19}x_4 = 0, \end{cases}$$

由此即得

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{2}{19}x_3 + \frac{1}{19}x_4, \\ x_2 = -\frac{14}{19}x_3 + \frac{7}{19}x_4, (x_3, x_4 \text{ 可任意取值}) \\ x_3 = x_3, \\ x_4 = x_4, \end{cases}$$

即
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} -\frac{2}{19} \\ -\frac{14}{19} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{19} \\ \frac{7}{19} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (k_1, k_2 \in \mathbf{R}),$$

也可以写成

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} -2 \\ -14 \\ 19 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 0 \\ 19 \end{pmatrix} \quad (k_1, k_2 \in \mathbf{R}). \text{ (想一想: 为什么?)}$$

对于矩阵 $\mathbf{A}_{m \times n}$, 由于 $R(\mathbf{A}) \leq \min\{m, n\}$, 所以我们由定理 3.6 可得

推论 如果齐次方程组(3-7)中, $m < n$, 则它一定有非零解.

人物卡片(克拉默):



克拉默(Gabriel Cramer, 瑞士数学家, 1704—1752), 主要著作是《代数曲线的分析引论》, 首先定义了正则、非正则、超越曲线和无理曲线等概念, 第一次正式引入坐标系的纵轴(Y轴), 然后讨论曲线变换, 并依据曲线方程的阶数将曲线进行分类.

为了确定经过5个点的一般二次曲线的系数, 应用了著名的“克拉默法则”, 即由线性方程组的系数确定方程组解的表达式. 该法则于1729年由英国数学家马克劳林得到, 1748年发表, 但克拉默的优越符号使之流传.

延伸阅读三

交通网络的调度问题

近年来, 随着中国城市化进程加快, 交通网络日益复杂, 如何有效调度和优化交通资源成为一项重要课题. 通过智能调度系统, 利用大数据、人工智能、云计算等先进技术, 国家在缓解城市交通拥堵、提高交通效率和减少碳排放方面取得了显著成效. 比如在北京、上海等大城市, 智能交通系统能够实时分析道路交通状况, 优化信号灯时长、公交车发车频率, 以及及时调度交通资源, 最大限度地减少交通拥堵. 这不仅提高了人们的出行体验, 也对社会经济效率起到了积极的促进作用. 在这一过程中, 科技创新起到了核心作用. 智能调度系统通过数据的精准分析、预测模型的建立和调度算法的优化, 极大提升了交通网络的管理水平. 而这背后, 离不开中国科研人员在算法、硬件设备和大数据平台上的长期攻关与自主创新. 这一切体现了国家“科技强国”的战略方针, 也彰显了中国不断突破关键核心技术、推

动科技自立自强的决心,这不仅仅是一个技术问题,它体现了国家在推动绿色发展、促进社会公平、实现高质量发展的战略目标.新时代的学生应当学习交通领域的先进技术和管理经验,同时树立社会责任感,将个人发展与国家需求相结合,努力为中国的智能交通建设和交通强国目标贡献力量.

【案例描述】

某城市正在规划一条公交线路,这条线路共有3个站点:A、B和C.城市管理者需要设计一套调度方案,确保从站点A出发的车辆可以顺利经过B站和C站,并到达终点站,但由于各种交通限制,某些路线的通行能力有限.为了简化问题,假设从A到B、B到C以及C到终点的道路有不同的通行能力限制,交通部门希望通过数学方法来确定最佳的调度方案.

这个问题可以归结为一个线性方程组的求解问题.每条道路的通行能力可以看作一个方程的系数,车辆的数量则为未知数.通过求解这个线性方程组,管理者可以确定从A到C站的最佳车辆分配方案.

【数学模型】

我们假设A、B、C三个站点的通行能力分别为1、2、3辆车每小时,交通部门给出以下线性方程组:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 10 \quad \text{从A站出发的总车辆数;}$$

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 15 \quad \text{各路段车辆通行的限制;}$$

$$x_1 - x_2 + x_3 = 5 \quad \text{站点C通行限制.}$$

其中, x_1, x_2, x_3 分别表示从A到B、B到C以及C到终点的调度车辆数量.

1. 矩阵的初等变换

通过将这个线性方程组表示为矩阵形式:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} (x_1 \quad x_2 \quad x_3) (10 \quad 15 \quad 5).$$

学生可以利用初等行变换来简化矩阵并求解车辆的分配方案.

2. 矩阵的秩

通过行简化矩阵,学生能够直观地了解矩阵秩的含义,以及秩在求解方程组时的作用.如果方程组无解或有无穷多个解,学生将学会如何通过计算矩阵的秩来判断系统是否有解,并且是否存在多种方案.

3. 线性方程组的解

通过对简化后的矩阵进行回代,学生可以得到具体的解 x_1, x_2, x_3 ,从而得出每个路段需要调度的车辆数量.这不仅解决了实际交通问题,也帮助学生深入理解线性方程组的解法.

基本练习题三

1. 用初等行变换把下列矩阵化为行最简形矩阵:

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & -8 & 6 & 5 \\ 3 & 4 & -5 & 2 & 4 \end{pmatrix}; \quad (2) \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 4 & -5 \\ 3 & 8 & -2 & 13 \\ 4 & -1 & 9 & -6 \end{pmatrix};$$

$$(3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad (4) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 2 & 1 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. 利用矩阵的初等变换,求下列矩阵的逆矩阵:

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; \quad (2) \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix};$$

$$(3) \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad (4) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. 用矩阵的初等变换,求解下列矩阵方程:

$$(1) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -4 \end{pmatrix} \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix};$$

$$(2) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{X} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix};$$

$$(3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 5 & -4 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$(4) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. 求下列矩阵的秩:

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 15 & -2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 11 & 2 & 7 \end{pmatrix};$$

$$(3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad (4) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$5. \text{ 设 } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & t & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 若 } R(\mathbf{A})=2, \text{ 求 } t \text{ 的值.}$$

6. 证明: $\max\{R(\mathbf{A}), R(\mathbf{B})\} \leq R(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \leq R(\mathbf{A}) + R(\mathbf{B})$.

7. 证明: $R(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \leq R(\mathbf{A}) + R(\mathbf{B})$.

8. 设 $\mathbf{A}$ 为 n 阶方阵, 证明: $R(\mathbf{A} + \mathbf{E}) + R(\mathbf{A} - \mathbf{E}) \geq n$.

9. 求解下列非齐次线性方程组:

$$(1) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -9, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 2, \\ 3x_1 - 6x_2 - x_3 = 25; \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -4, \\ 3x_1 - 6x_2 + 7x_3 = -6, \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1; \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 1; \end{cases} \quad (4) \begin{cases} x_1 + x_3 - x_4 = -3, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 3x_4 = -4, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ 7x_1 + 7x_3 - 3x_4 = 3. \end{cases}$$

10. 求解下列齐次线性方程组:

$$(1) \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 0, \\ 8x_1 + 7x_2 + 6x_3 - 3x_4 = 0; \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 - x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_4 = 0; \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 - 7x_3 + x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

$$11. \lambda \text{ 为何值时, 齐次线性方程组 } \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ \lambda x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \text{ 有非零解?}$$

综合练习题三

1. 若矩阵 $\mathbf{A}$ 中存在 r 阶子式 $|\mathbf{A}_r| \neq 0$, 则 $R(\mathbf{A})$ 与 r 的大小关系是_____.

2. 已知 $\mathbf{A}$ 为 4×3 矩阵, $R(\mathbf{A}) = 2$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, 则 $R(\mathbf{AB})$ = _____.

3. 设矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{pmatrix}$, 且 $R(\mathbf{A}) = 3$, 则 $k =$ _____.

4. 当 $\lambda =$ _____ 时, 齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + \lambda x_3 = 0, \\ x_1 + 4x_2 + \lambda^2 x_3 = 0 \end{cases}$ 一定有非零解.

5. 已知方程组 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 \\ 1 & a & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ 无解, 则 $a =$ _____.

- A. 若 $Ax=0$ 有非零解, 则 $Ax=b$ 有无穷多组解
B. 若 $Ax=0$ 只有零解, 则 $Ax=b$ 无解
C. 若 $Ax=b$ 有无穷多组解, 则 $Ax=0$ 有非零解
D. 若 $Ax=b$ 有唯一解, 则 $Ax=0$ 有非零解

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & k \\ -1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 7 & 5 & 3 \end{pmatrix},$$

10. 设矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & b \\ 2 & a & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$, 当 a, b 满足何条件时, 可使

11. λ 为何值时, 非齐次线性方程组
$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$$

- ### 拓展训练三

- 第 1 列的 -1 倍加到第 2 列得 $\mathbf{C}$, 记 $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则 ()

- 90

解 按已知条件,用初等矩阵描述有

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{A}, \mathbf{C} = \mathbf{B} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

于是 $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{A} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{PAP}^{-1}$. 所以应选 B.

2. (2016 年) 设矩阵 $\begin{pmatrix} a & -1 & -1 \\ -1 & a & -1 \\ -1 & -1 & a \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 等价, 则 $a =$

_____.

解 因为 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & -1 & -1 \\ -1 & a & -1 \\ -1 & -1 & a \end{pmatrix}$ 与 $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 等价, 所以

$$R(\mathbf{A}) = R(\mathbf{B}).$$

又因为 $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 所以 $R(\mathbf{A}) = R(\mathbf{B}) = 2$.

从而 $|\mathbf{A}| = 0$, 即

$$\begin{vmatrix} a & -1 & -1 \\ -1 & a & -1 \\ -1 & -1 & a \end{vmatrix} = 0, \text{ 得 } a=2 \text{ 或 } a=-1.$$

当 $a=-1$ 时, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, 此时 $R(\mathbf{A})=1$, 不合题意, 所以

$$a=2.$$

3. (2015 年) 设矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 4 & a^2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ d \\ d^2 \end{pmatrix}$, 若集合 $\Omega = \{1, 2\}$, 则

线性方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 有无穷多解的充分必要条件为 ()

A. $a \notin \Omega, d \notin \Omega$

B. $a \notin \Omega, d \in \Omega$

C. $a \in \Omega, d \notin \Omega$

D. $a \in \Omega, d \in \Omega$

解 $(\mathbf{A}, \mathbf{b}) =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a & d \\ 1 & 4 & a^2 & d^2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 & d-1 \\ 0 & 0 & (a-1)(a-2) & (d-1)(d-2) \end{pmatrix},$$

$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 有无穷多解 $\Leftrightarrow R(\mathbf{A}) = R(\mathbf{A}, \mathbf{b}) < 3 \Leftrightarrow a=1$ 或 $a=2$ 且 $d=1$ 或 $d=2$. 所以选 D.

4. (2010 年) 设 $\mathbf{A}$ 是 $m \times n$ 矩阵, $\mathbf{B}$ 是 $n \times m$ 矩阵, 且 $\mathbf{AB} = \mathbf{E}$, 其中 $\mathbf{E}$ 为 m 阶单位矩阵, 则 ()

- A. $R(\mathbf{A}) = R(\mathbf{B}) = m$ B. $R(\mathbf{A}) = m; R(\mathbf{B}) = n$
C. $R(\mathbf{A}) = n; R(\mathbf{B}) = m$ D. $R(\mathbf{A}) = R(\mathbf{B}) = n$

解 因为 $\mathbf{AB} = \mathbf{E}$, 故 $R(\mathbf{E}) = m$. 又 $R(\mathbf{AB}) \leq R(\mathbf{A})$, $R(\mathbf{AB}) \leq R(\mathbf{B})$, 故有

$$m = R(\mathbf{AB}) \leq R(\mathbf{A}), \quad m = R(\mathbf{AB}) \leq R(\mathbf{B}).$$

又 $\mathbf{A}$ 是 $m \times n$ 矩阵, $\mathbf{B}$ 是 $n \times m$ 矩阵, 故 $R(\mathbf{A}) \leq m$, $R(\mathbf{B}) \leq m$. 结合上述不等式可得 $R(\mathbf{A}) = R(\mathbf{B}) = m$, 即应该选 A.

5. (1998 年) 设 $n (n \geq 3)$ 阶矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ a & 1 & a & \cdots & a \\ a & a & 1 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & 1 \end{pmatrix}$, 若矩阵 $\mathbf{A}$

的秩为 $n-1$, 则 a 必为 ()

- A. 1 B. $\frac{1}{1-n}$ C. -1 D. $\frac{1}{n-1}$

解 $R(\mathbf{A}) < n \Rightarrow |\mathbf{A}| = 0 \Rightarrow a=1$ 或 $a = \frac{1}{1-n}$. 当 $a=1$ 时, 显然 $R(\mathbf{A}) =$

1, 故选 B.

6. (1997 年) 非齐次线性方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 中未知量个数为 n , 方程个数为 m , 系数矩阵 $\mathbf{A}$ 的秩为 r , 则 ()

- A. 当 $r = m$ 时, 方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 有解
B. 当 $r = n$ 时, 方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 有唯一解
C. 当 $m = n$ 时, 方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 有唯一解
D. 当 $r < n$ 时, 方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 有无穷多解

解 因为 $\mathbf{A}$ 是 $m \times n$ 矩阵, 若秩 $R(\mathbf{A}) = m$, 则

$$m = R(\mathbf{A}) \leq R(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \leq m.$$

于是 $R(\mathbf{A}) = R(\mathbf{A}, \mathbf{b})$, 故方程组有解, 应选 A.

7. (2016 年) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-a \\ 1 & 0 & a \\ a+1 & 1 & a+1 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2a-2 \end{pmatrix}$, 且方程组

$Ax = \beta$ 无解.

(1) 求 a 的值;

(2) 求方程组 $A^T Ax = A^T \beta$ 的通解.

$$\text{解 (1)} \quad (A, \beta) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-a & 0 \\ 1 & 0 & a & 1 \\ a+1 & 1 & a+1 & 2a-2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - (a+1)r_1]{r_2 - r_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-a & 0 \\ 0 & -1 & 2a-1 & 1 \\ 0 & -a & a^2+a & 2a-2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 + ar_2]{(-1)r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-a & 0 \\ 0 & 1 & 1-2a & -1 \\ 0 & 0 & 2a-a^2 & a-2 \end{pmatrix}, \text{ 方程组 } Ax = \beta$$

无解, 所以 $R(A) \neq R(A, \beta)$, 因此 $a=0$.

$$(2) \text{ 将 } a=0 \text{ 代入可得 } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \text{ 从而 } A^T A =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, A^T \beta = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

$$\text{因此 } (A^T A, A^T \beta) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ 故有方程组}$$

$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 + x_3 = -2, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = -2 - x_3, \text{ 令 } \xi_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \end{cases} \text{ 则原方程组}$$

的通解为 $x = \xi_0 + k\xi$, 其中 k 为任意常数.

实际案例分析三

今有鸡翁一,直钱五;鸡母一,直钱三;鸡雏三,直钱一,凡百钱买鸡百只.问鸡翁、母、雏各几何? (《张邱建算经》)

假设 x, y, z 分别为买鸡翁、鸡母、鸡雏的只数,则由问题可得非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x + y + z = 100, \\ 5x + 3y + \frac{1}{3}z = 100. \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{A}, \mathbf{b}) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 5 & 3 & \frac{1}{3} & 100 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 5r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & -2 & -\frac{14}{3} & -400 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow[r_1 - r_2]{r_2 \div (-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{4}{3} & -100 \\ 0 & 1 & \frac{7}{3} & 200 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

显然, $R(\mathbf{A}) = R(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = 2 < 3$, 原方程组有无穷多解, 同解方程组为

$$\begin{cases} x - \frac{4}{3}z = -100, \\ y + \frac{7}{3}z = 200, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x = -100 + \frac{4}{3}z, \\ y = 200 - \frac{7}{3}z, \\ z = z. \end{cases}$$

由于 x, y, z 一定为正整数, 可得 $75 < z < 85$, 且 z 为 3 的倍数, 所以 $z = 78, 81, 84$, 与此相对应的 $x = 4, 8, 12; y = 18, 11, 4$.

$$\text{即} \quad \begin{cases} x_1 = 4, \\ y_1 = 18, \\ z_1 = 78; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 8, \\ y_2 = 11, \\ z_2 = 81; \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = 12, \\ y_3 = 4, \\ z_3 = 84. \end{cases}$$

这恰好是张邱建给出的三组解. 至于如何得到的这三组解, 《张邱建算经》的“术”文是:

“鸡翁每增四, 鸡母每减七, 鸡雏每益三, 即得.”

这实际上表明了这个非齐次线性方程组的通解公式为

$$\begin{cases} x = 4 + 4k, \\ y = 18 - 7k, \\ z = 78 + 3k \end{cases} \quad (k \in \mathbf{R}).$$

$$\text{想一想, 通解公式} \begin{cases} x = -100 + \frac{4}{3}z, \\ y = 200 - \frac{7}{3}z, \\ z = z \end{cases} \quad \text{能写成} \begin{cases} x = 4 + 4k, \\ y = 18 - 7k, \\ z = 78 + 3k \end{cases} \quad \text{的形式吗?}$$

Matlab 应用三: 矩阵的初等变换与线性方程组的解

相关 Matlab 命令或函数

Rank(A) 求矩阵 A 的秩

rref(A) 将矩阵 A 化为行最简矩阵

inv(A) 求矩阵 A 的逆

例 3.2(续) 化矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 2 & 6 & -4 & 5 \\ -1 & -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ 为行最简形矩阵.

解

```
>>A=[1 3 -2 2;2 6 -4 5;-1 -3 4 0];
```

```
>>rref(A) %求 A 的行最简形矩阵
```

```
ans =
```

```
1 3 0 0
```

```
0 0 1 0
```

```
0 0 0 1
```

例 3.4(续) 求矩阵方程 $AX=B$, 其中 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$, $B =$

$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

解

```
>>A=[3 1 -1;2 2 0;1 -1 -2];
```

```
>>B=[1 -2;2 2;1 -3];
```

```
>>rref([A,B]) %解法一,将矩阵[A,B]化为行最简矩阵
```

```
ans =
```

```
1 0 0 -1 -2
```

```
0 1 0 2 3
```

```
0 0 1 -2 -1
```

```
>>X=inv(A)*B %解法二,求矩阵 A 的逆与矩阵 B 的乘积
```

```
>> X =
```

-1.0000 -2.0000

2.0000 3.0000

-2.0000 -1.0000

所以 $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

例 3.8(续) 解方程组
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 2, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 15x_4 = 7, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 11x_4 = 5. \end{cases}$$

解

»D=[1 2 -1 4;2 5 1 15;1 3 2 11];

»b=[2 7 5]'

»Rank(D) %求系数矩阵 $\mathbf{D}$ 的秩

ans= 2

»Rank([D,b]) %求增广矩阵 $[\mathbf{D}, \mathbf{b}]$ 的秩

ans=2

%R($\mathbf{D}$)=R($\mathbf{D}, \mathbf{b}$)=2<4, 方程有无穷多解

»rref([D,b]) %将矩阵 $[\mathbf{D}, \mathbf{b}]$ 化为行最简矩阵

ans=

1 0 -7 -10 -4

0 1 3 7 3

0 0 0 0 0

%原方程的通解方程为
$$\begin{cases} x_1 - 7x_3 - 10x_4 = -4, \\ x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 3. \end{cases}$$

原方程组的通解为:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 10 \\ -7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (k_1, k_2 \text{ 为任意实数})$$

例 3.10(续) 解方程组
$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 0, \\ 8x_1 + 7x_2 + 6x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$$

解

```
>>A=[2 -3 -2 1;3 5 4 -2;8 7 6 -3];
```

```
>>Rank(A) %求矩阵 A 的秩
```

```
ans=2
```

$\%R(A) = 2 < 4$ ，齐次线性方程组有非零解。

```
>> format rat
```

$\%$ 将 Matlab 的输出设置为分数

```
>>rref(A)
```

$\%$ 将矩阵 A 化为行最简矩阵

```
ans =
```

```
1 0 2/19 -1/19
```

```
0 1 14/19 -7/19
```

```
0 0 0 0
```

同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 + \frac{2}{19}x_3 - \frac{1}{19}x_4 = 0, \\ x_2 + \frac{14}{19}x_3 - \frac{7}{19}x_4 = 0, \end{cases}$$

由此即得

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{2}{19}x_3 + \frac{1}{19}x_4, \\ x_2 = -\frac{14}{19}x_3 + \frac{7}{19}x_4, (x_3, x_4 \text{ 可任意取值}), \\ x_3 = x_3, \\ x_4 = x_4 \end{cases}$$

即

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} -\frac{2}{19} \\ -\frac{14}{19} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{19} \\ \frac{7}{19} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (k_1, k_2 \in \mathbf{R}).$$